Die Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens bei Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I unter dem Aspekt des Conceptual Change

Simon Weixler

München 2009

Die Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens bei Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I unter dem Aspekt des Conceptual Change

Dissertation
an der Fakultät für Mathematik, Informatik und Statistik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von

Simon Weixler

München, den 01. September 2009

Erstgutachterin:
Prof. Dr. Kristina Reiss
Ludwig-Maximilians-Universität München

Zweitgutachter:
Prof. Dr. Bernd Wollring
Universität Kassel

Datum der mündlichen Prüfung:
14. Oktober 2009

Für meine Eltern,
Maximilian und Rosemarie,
und Patricia Maria.

Mein besonderer Dank gilt Frau Prof. Dr. Kristina Reiss,
die mich zu der vorliegenden Arbeit herzlich ermutigt hat,
sowie Herrn Prof. Dr. Bernd Wollring
für vielfältige fruchtbare Anregungen.

Abstract

We present an analysis and an investigation on the development of intuitive probabilistic thinking of students at secondary level (in German schools) from the specific perspective of conceptual change. Introductorily we report the theory of conceptual change and its extensions, different approaches to categorize “misconceptions” and to support conceptual change, the evolution of probabilistic ways of thinking with regard to well known problems in the history of probabilistic thinking, and give an overview of various kinds of probability interpretations. Concerning intuitive probabilistic thinking, results and findings of research from cognitive psychology and developmental psychology are picked up and regarded from the perspective of the conceptual change theory. Initiated by elements of the “structure-and-process model” by Scholz (1987) the emphasis lies on simple probabilistic heuristics, so-called “simple everyday heuristics”, and biases in using these heuristics. With respect to the concept of “probabilistic intuition”, we identify different developmental stages of probabilistic thinking. On this basis we re-analyse the results and findings of five selected studies concerning students’ development of intuitive probabilistic thinking at secondary school level and correlate them to the theory of conceptual change. For three fundamental conceptual elements of chance and probability, the *Laplace model of probability*, the *principle of stochastic independence* and the *empirical law of large numbers*, we present a new developed theoretical model of the transition from the cognitive structure at the beginning of secondary school level to the cognitive structure at the end of secondary school level which includes elements of the “structure-and-process model” by Scholz (1987). Based on these concepts and findings we finally conceptualise a new model of developmental steps concerning the intuitive probabilistic thinking of pupils at secondary school level which is empirically tested and approved by a field study of 521 students using specific tasks in paper-and-pencil tests.

Vorgelegt wird eine Untersuchung zur Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens bei Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I unter der spezifischen Perspektive des Conceptual Change. Referiert werden vorab die Theorie des Conceptual Change und ihre Erweiterungen, verschiedene Ansätze zur Einordnung von „Fehlkonzepten“ und zur Förderung des Conceptual Change, ferner ein kurzer Abriss zur Entwicklungsgeschichte probabilistischer Denkweisen unter Bezug auf klassische Probleme des Denkens in Wahrscheinlichkeiten sowie ein Überblick zu verschiedenen Interpretationen von Wahrscheinlichkeit. Zum intuitiven probabilistischen Denken werden Erkenntnisse und Befunde aus der Kognitions- und der Entwicklungspsychologie aufgenommen und unter dem Aspekt des Conceptual Change betrachtet. Ausgehend von Elementen eines Prozess-Struktur-Modells von Scholz (1987) liegt dabei der Schwerpunkt auf einfachen probabilistischen Heuristiken („simple everyday heuristics“) und auf kognitiven Verzerrungen beim Anwenden dieser Heuristiken. Bezogen auf den Begriff der probabilistischen Intuition werden verschiedene Entwicklungsphasen des probabilistischen Denkens identifiziert und unter dieser theoretischen Perspektive die Befunde von fünf ausgewählten Studien zur Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens bei Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I neu analysiert und zur Theorie des Conceptual Change in Beziehung gesetzt. Für drei grundlegende Konzepte von Zufall und Wahrscheinlichkeit, das *Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit*, das *Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit* und die *Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen*, wird der Übergang von der kognitiven Struktur zu Beginn der Sekundarstufe I auf die kognitive Struktur am Ende der Sekundarstufe I in einem neu entwickelten theoretischen Modell dargestellt, das auf der Theorie des Conceptual Change basiert und das Elemente des Prozess-Struktur-Modells von Scholz (1987) aufnimmt. Aus diesen Konzepten und Befunden wird abschließend ein eigenes Modell von Entwicklungsschritten zum intuitiven probabilistischen Denken in der Sekundarstufe I neu konzipiert und in einer Studie mit 521 Schülerinnen und Schülern anhand von Aufgaben empirisch überprüft und anhand von aufgabenbasierten Tests bestätigt.

“In learning probability,

students must create new intuitions.”

(Fischbein & Schnarch, 1997, S. 104)

Inhaltsverzeichnis

1 Conceptual Change 1

1.1 Die Theorie des Conceptual Change 3
1.1.1 Überblick 3
1.1.2 Prämisse 5
1.1.3 Die Theorie des Conceptual Change und ihre Erweiterungen 5
1.1.4 Schematische Darstellung 11
1.2 Einordnung von Fehlkonzepten 13
1.2.1 Hinweis 13
1.2.2 Theorien zur Entstehung von Fehlkonzepten 13
1.2.3 Konsequenzen 16
1.3 Förderung des Conceptual Change 18
1.3.1 Vorbemerkung 18
1.3.2 Maßnahmen zur Förderung 18
1.3.3 Ausblick 21
1.4 Übertragen der Theorie des Conceptual Change 21
1.4.1 Allgemeines 21
1.4.2 Übertragen auf das „Lernen und Lehren von Mathematik“ 22

2 Probabilistisches Denken 25

2.1 Probability (engl.) 27
2.1.1 Begriffsbestimmung 27
2.1.2 Repräsentationsformate 27
2.2 Entwicklungsgeschichte probabilistischer Denkweisen 28
2.2.1 Ursprung des Denkens in Wahrscheinlichkeiten 28
2.2.2 Klassische Probleme des Denkens in Wahrscheinlichkeiten 30
2.2.3 Interpretationen von Wahrscheinlichkeit 34
2.2.4 Mathematische Definition der Wahrscheinlichkeit 40

3 Erkenntnisse zum intuitiven probabilistischen Denken 43

3.1 Wissenschaftliche Erforschung 45
3.1.1 Kurzer Überblick zur psychologischen Forschung 45

3.1.2 Weitere Forschungsbeiträge 45
3.1.3 Unterscheidung von Forschungsansätzen 46
3.2 Kognitionspsychologische Sichtweise 46
3.2.1 Der Begriff der Heuristik 46
3.2.2 Elemente des Prozess-Struktur-Modells von Scholz (1987) 46
3.2.3 Einfluss der Problemrahmung 50
3.2.4 Probabilistische Heuristiken 51
3.2.5 „Simple everyday heuristics“ 51
3.2.6 Einhergehende kognitive Verzerrungen 53
3.2.7 „Typische Fehlschlüsse“ 63
3.2.8 „Higher order heuristics“ 64
3.3 Entwicklungspsychologische Sichtweise 65
3.3.1 Intuitionen 65
3.3.2 Schemata 70
3.3.3 Verhältnis von probabilistischen Intuitionen und Schemata 71
3.3.4 Entwicklungsphasen des probabilistischen Denkens 73
3.3.5 Präoperationale Phase 77
3.3.6 Phase der konkreten Operationen 78
3.3.7 Phase der formalen Operationen 81
3.3.8 Folgerungen für Instruktionen 84
3.4 Darstellung von Informationen 86
3.4.1 Einfluss des Formates der Darstellung 86
3.4.2 Darstellung in Form von natürlichen Häufigkeiten 86
3.5 Modell „subjektiver Wahrscheinlichkeiten“ 89
3.5.1 „Outcome Approach“ 89
3.5.2 Hinweis 91

4 Synopse ausgewählter Studien zur Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens 93

4.1 Vorbemerkung 95
4.1.1 Allgemeines zur Konzeption von Studien 95
4.1.2 Ausblick auf die Analyse der Studien 97
4.1.3 Auswahl der Studien 97
4.1.4 Analysekriterien 98
4.2 Die Studie von Green (1982) 101

4.2.1 Allgemeines 101
4.2.2 Aufgaben und Ergebnisse der Auswertung 102
4.2.3 Zusammenfassung der Ergebnisse von Green 115
4.2.4 Folgerungen aus den Befunden von Green 116
4.3 Die Studie von Fischbein und Schnarch (1997) 118
4.3.1 Allgemeines 118
4.3.2 Aufgaben und Ergebnisse der Auswertung 118
4.3.3 Zusammenfassung der Ergebnisse von Fischbein und Schnarch 132
4.3.4 Folgerungen aus den Befunden von Fischbein und Schnarch 133
4.4 Die Studie von Rasfeld (2004) 134
4.4.1 Allgemeines 134
4.4.2 Aufgaben und Ergebnisse der Auswertung 135
4.4.3 Zusammenfassung der Ergebnisse von Rasfeld 145
4.4.4 Folgerungen aus den Befunden von Rasfeld 145
4.5 Die Studie von Engel und Sedlmeier (2005) 146
4.5.1 Allgemeines 146
4.5.2 Aufgaben und Ergebnisse der Auswertung 147
4.5.3 Zusammenfassung der Ergebnisse von Engel und Sedlmeier 162
4.5.4 Folgerungen aus den Befunden von Engel und Sedlmeier 162
4.6 Die Studie von Amir und Williams (1999) 164
4.6.1 Allgemeines 164
4.6.2 Aufgaben und Ergebnisse der Auswertung 167
4.6.3 Zusammenfassung der Ergebnisse von Amir und Williams 173
4.6.4 Folgerungen aus den Befunden von Amir und Williams 175

5 Zusammenfassung 177

5.1 Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens unter der Perspektive des Conceptual Change 179
5.1.1 Generelles 179
5.1.2 Ergebnisse der Studien 185
5.1.3 Forderungen an den Unterricht 188
5.1.4 Bezug zur Theorie des Conceptual Change 190

6 Einordnung in ein Modell der Entwicklungsschritte 201

6.1 Bildungsstandards im Fach Mathematik 203

6.1.1 Der Begriff der Kompetenz 203
6.1.2 Kompetenzen beim probabilistischen Denken 203
6.2 Ein Modell der Entwicklungsschritte zum intuitiven probabilistischen Denken 204
6.2.1 Kompetenz-Strukturen als Leitlinie zu Anforderungen an ein Modell der Entwicklungsschritte 204
6.2.2 Das Ziel der Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens im Sinne der Bildungsstandards 205
6.2.3 Eine Kennzeichnung von drei Schritten der Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens 206
6.2.4 Aufgaben zur Überprüfung 207
6.3 Pilotstudie zur Überprüfung des Modells der Entwicklungsschritte des intuitiven probabilistischen Denkens 215
6.3.1 Vorbemerkung 215
6.3.2 Allgemeines 215
6.3.3 Durchführung 215
6.3.4 Auswertung 216
6.3.5 Fazit aus der Pilotstudie 223
6.4 Empirische Studie zur Überprüfung des Modells der Entwicklungsschritte des intuitiven probabilistischen Denkens (Hauptstudie) 224
6.4.1 Vorbemerkung 224
6.4.2 Allgemeines 225
6.4.3 Durchführung 225
6.4.4 Auswertung 225
6.4.5 Fazit aus der Hauptstudie 231
6.5 Diskussion und Ausblick 235
6.5.1 Optimierungsmöglichkeiten bei der Erhebung 235
6.5.2 Perspektiven 237
6.5.3 Zum Schluss 240

Literaturverzeichnis **241**

Anhang **251**

Vorwort

Den Gegenstand dieser Arbeit, welche im Rahmen der Forschung zur Kompetenzentwicklung der Arbeitsgruppe Reiss entstanden ist (z. B. Reiss & Winkelmann, 2008), bildet die Untersuchung der Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens bei Schülerinnen und Schülern im Bereich der Sekundarstufe I unter dem Aspekt des Conceptual Change.

Von den Schwerpunkten ausgehend lässt sich die Arbeit im Groben in folgende drei Teile gliedern:

- einen Literaturaufschluss zum intuitiven probabilistischen Denken, eingebettet in die Idee des Conceptual Change, auf dieser theoretischen Grundlage aufbauend
- eine detaillierte Neu-Analyse der Befunde verschiedener ausgewählter Studien zur Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens, deren Ergebnisse für drei zentrale Konzepte von Zufall und Wahrscheinlichkeit, das Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit, das Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit und die Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen, in einem neu entwickelten theoretischen Modell dargestellt werden, das auf der Theorie des Conceptual Change basiert und das Elemente des Prozess-Struktur-Modells von Scholz (1987) aufnimmt, sowie daraus abgeleitet
- eine Kennzeichnung von drei Schritten der Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens in der Sekundarstufe I, welche für die drei genannten Konzepte in einer Studie mit 521 Schülerinnen und Schülern anhand von Aufgaben empirisch überprüft und anhand von aufgabenbasierten Tests bestätigt wird.

Dem ersten Teil sind die ersten drei Kapitel der Arbeit zuzuordnen, dem zweiten Teil das vierte und fünfte Kapitel und dem dritten Teil das sechste Kapitel, welches zugleich das letzte Kapitel ist.

Im Folgenden wird zur leichteren Orientierung ein kurzer Überblick über die Inhalte der einzelnen Kapitel gegeben.

Einleitend wird im ersten Kapitel die Theorie des Conceptual Change in einer multidimensionalen Perspektive vorgestellt. Anschließend werden verschiedene Theorien zur Entstehung von Fehlkonzepten und die sich daraus ergebenden Konsequenzen beschrieben sowie Maßnahmen zur Förderung des Conceptual Change aufgeführt. Zum Schluss dieses Kapitels werden Überlegungen zum Übertragen der Theorie des Conceptual Change auf das „Lernen und Lehren von Mathematik“ präsentiert.

Zu Beginn des zweiten Kapitels wird der Begriff „probability“ thematisiert. Im Anschluss daran wird anhand von klassischen Problemen des Denkens in Wahrscheinlichkeiten ein kurzer Abriss zur Entwicklungsgeschichte probabilistischer Denkweisen sowie ein Überblick zu verschiedenen Interpretationen von Wahrscheinlichkeit gegeben.

Im dritten Kapitel wird einleitend ein Überblick zur Forschung zum intuitiven probabilistischen Denken gegeben. Anschließend werden Erkenntnisse zum intuitiven probabilistischen Denken aus dem Bereich der Kognitions- und der Entwicklungspsychologie vorgestellt und unter dem Aspekt des Conceptual Change betrachtet. Ausgehend von Elementen eines Prozess-Struktur-Modells von Scholz (1987) liegt dabei der Schwerpunkt auf einfachen probabilistischen Heuristiken („simple everyday heuristics“) und auf kognitiven Verzerrungen beim Anwenden dieser Heuristiken. Bezogen auf den Begriff der probabilistischen Intuition werden

verschiedene Entwicklungsphasen des probabilistischen Denkens identifiziert. Zum Schluss dieses Kapitels wird auf den Einfluss des Darstellungsformates von Informationen eingegangen sowie ein Modell „subjektiver Wahrscheinlichkeiten“ beschrieben.

Auf dieser theoretischen Basis aufbauend werden im vierten Kapitel die Befunde von fünf ausgewählten Studien zur Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens bei Schülerinnen und Schülern im Bereich der Sekundarstufe I präsentiert und unter dem Aspekt des Conceptual Change neu analysiert. Es handelt sich hierbei um die Studie von Green (1982), in der die Vorstellungen von Wahrscheinlichkeit bei 3000 Schülerinnen und Schülern im Alter von 11 bis 16 Jahren untersucht wurden, die Studie von Fischbein und Schnarch (1997), deren Untersuchungsgegenstand die Entwicklung von probabilistischen, auf Intuitionen basierenden Fehlvorstellungen mit zunehmendem Alter war, die Studie von Rasfeld (2004), in der untersucht wurde, ob sich intuitives stochastisches Denken durch den Stochastikunterricht verbessert, die Studie von Engel und Sedlmeier (2005), deren Untersuchungsgegenstand das Verständnis von Zufall und zufallsbedingter Variabilität in Daten bei Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I war, sowie die Studie von Amir und Williams (1999), in der kulturelle Einflüsse auf das probabilistische Denken von Kindern untersucht wurden.

Im fünften Kapitel werden die Ergebnisse der durchgeführten Analyse sowie die zentralen Befunde der im vierten Kapitel vorgestellten Studien und die sich daraus ergebenden Forderungen an den Unterricht zusammengefasst. Für drei grundlegende Konzepte des intuitiven probabilistischen Denkens, das Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit, das Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit und die Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen, wird der Übergang von der kognitiven Struktur zu Beginn der Sekundarstufe I auf die kognitive Struktur am Ende der Sekundarstufe I in einem vom Autor entwickelten theoretischen Modell dargestellt. Dieses basiert auf der Theorie des Conceptual Change und nimmt Elemente des Prozess-Struktur-Modells von Scholz (1987) auf.

Ausgehend von der Theorie des Conceptual Change und den im vorangegangenen Kapitel zusammengefassten Erkenntnissen zur Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens bei Schülerinnen und Schülern im Bereich der Sekundarstufe I wird vom Autor im sechsten Kapitel unter Bezug auf die Bildungsstandards der KMK im Fach Mathematik ein eigenes Modell mit drei Schritten der Entwicklung zum intuitiven probabilistischen Denken neu konzipiert. Dieses Modell wird für die drei Konzepte Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit, Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit und Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen in einer Studie mit 521 Schülerinnen und Schülern anhand von Aufgaben empirisch überprüft und anhand von aufgabenbasierten Tests bestätigt. Zum Abschluss erfolgt eine zusammenfassende Diskussion und ein Ausblick auf mögliche Anschluss-Forschungsschwerpunkte.

Kapitel 1

Conceptual Change

Einleitend wird die Theorie des Conceptual Change in einer multidimensionalen Perspektive vorgestellt.

Verschiedene Theorien zur Entstehung von Fehlkonzepten und die sich daraus ergebenden Konsequenzen werden im Anschluss daran beschrieben.

Ferner werden Maßnahmen zur Förderung des Conceptual Change aufgeführt.

Abschließend werden Überlegungen zum Übertragen der Theorie des Conceptual Change auf das „Lernen und Lehren von Mathematik“ präsentiert.

1.1 Die Theorie des Conceptual Change

1.1.1 Überblick

Schülerinnen und Schüler kommen nicht wie ein unbeschriebenes Blatt Papier in den Unterricht. Sie bringen bereits Vorstellungen im Sinne von Konzepten mit. Diese können alltagsnah, fachorientiert oder auch schon fachwissenschaftlich sein.

In den *Naturwissenschaften* finden sich verschiedene Ansätze zur Erklärung von Lernprozessen, bei denen bereits vorhandene Vorstellungen des Lernenden die Grundlage bilden. Eine Theorie, welche „eine Reihe von Ansätzen mit unterschiedlichen Schwerpunktsetzungen" (Krüger, 2007, S. 81) umfasst und einen großen Einfluss auf die empirische Forschung hat, ist die *Theorie des Conceptual Change*, deren Ursprung von Duit und Treagust (2003) bei Posner, Strike, Hewson und Gertzog (1982) gesehen wird.

Diese Theorie beruht auf einem epistemologischen Ansatz, der den „Blick auf einen auf Erkenntnisgewinn ausgerichteten Vorstellungswandel" (Krüger, 2007, S. 83) beim Lernenden richtet, und gibt die Bedingungen dafür an, dass mit einem „Wechsel von Alltagsvorstellungen zu fachwissenschaftlich begründeten Vorstellungen" (Krüger, 2007, S. 81) gerechnet werden kann. Dabei werden instruktionspsychologische Aspekte berücksichtigt und Aussagen zum Lehren gemacht.

Die Theorie des Conceptual Change greift unter Verwendung der Begriffe „Assimilation" (französisch für *Angleichung*) und „Akkomodation" (vgl. „accomodation": französisch für *Anpassung*) Elemente der Theorie von Piaget (1950) zur geistigen Entwicklung bei Kindern auf. Nach Piaget bedeutet

- „Assimilation", dass neue Erfahrungen in die bereits vorhandenen Erfahrungen integriert werden, und
- „Akkomodation", dass die vorhandenen Erfahrungen an die neuen Erfahrungen angepasst werden.

In Bezug auf die Theorie des Conceptual Change drücken diese beiden Begriffe aus, dass alte Vorstellungen zum einen zur Erklärung neuer Problemstellungen herangezogen und zum anderen ersetzt oder umorganisiert werden. So verdeutlicht „Assimilation", dass es sich um einen Conceptual Change im kleinen Rahmen, „small-scale", handelt, wogegen „Akkomodation" einen Conceptual Change im großen Rahmen, „large-scale", beschreibt (Strike & Posner, 1982, S. 234).

Von Duit und Treagust (2003) werden in Anlehnung an Hewson (1981) und Hewson und Hewson (1984) auch die Begriffe „conceptual *capture*" für eine Assimilation und „conceptual *exchange*" für eine Akkomodation verwendet. Wird eine zentrale oder grundlegende Vorstellung modifiziert, so findet ein „conceptual *exchange*" statt. Beispielhaft führen Strike und Posner (1982) einen Paradigmenwechsel an.

Durch den Begriff des *change* wurde in der ursprünglichen Fassung der Theorie des Conceptual Change an die Theorie von Kuhn (1970) angeknüpft, dass der Erkenntnisgewinn in der Wissenschaft bei einem Paradigmenwechsel „mit einer plötzlichen, radikalen und generellen, also revolutionären Veränderung von Ansichten, Beurteilungen und Interpretationen einhergeht" (Krüger, 2007, S. 81). Daran angelehnt wurde beim Lernen mit „Akkomodation" ein Vorstellungswechsel bezeichnet, der zwar radikal erfolgt, jedoch nicht abrupt, sondern *graduell*, in Form einer „allmähliche[n] Anpassung an ein Konzept" (Krüger, 2007, S. 81; Vosniadou & Brewer, 1992). In anderen Worten: Die Anpassung findet Schritt für Schritt statt,

wobei ein Schritt der Anpassung die Ausgangsposition für den nächsten Schritt darstellt, bis schließlich der Konzeptwechsel vollzogen ist. Strike und Posner (1982) sprechen von einem „reflektierenden Gleichgewicht zwischen neuen Ideen, Tatsachen und Entdeckungen und dem gegenwärtigen Repertoire an Vorstellungen“.

Die Beschreibung eines radikalen Vorstellungswechsels, welcher von Strike und Posner (1982, S. 232) als „transformation of current knowledge“ bezeichnet wird, wurde von Posner et al. (1982) dahingehend interpretiert, „dass Fehlvorstellungen auszumerzen seien und Lernen sich durch einen Wechsel von falschen zu richtigen Konzepten dokumentiere“ (Krüger, 2007, S. 82).

In neueren, konstruktivistischen Ansätzen wird jedoch von einem radikalen Vorstellungswechsel Abstand genommen. Unter Bezug auf Duit (1999) weist Krüger (2007, S. 82) darauf hin, dass die alten Vorstellungen im Sinne von Alltagskonzepten dementsprechend nicht mehr „normativ-wertend als Fehlvorstellung“, sondern wertneutral „als alternative, vorwissenschaftliche, Alltags- oder [...] Lernervorstellung“ bezeichnet werden, da sich gezeigt hat, dass die alten Vorstellungen durch den Unterricht nicht zwangsläufig verschwinden und dass in Alltagssituationen weiterhin auf diese alten Vorstellungen zurückgegriffen wird, wenn sie „als hilfreich, brauchbar und nützlich“ angesehen werden.

Von Duit (1999), Duit und Treagust (2003), Kattmann (2005), Sander, Jelemenská und Kattmann (2006) und Vosniadou (1999) werden daher in Abhängigkeit von der Perspektive und der Schwerpunktsetzung unterschiedliche Bezeichnungen für den Conceptual Change verwendet (vgl. Krüger, 2007, S. 82 f.):

- Steht die Entwicklung der Vorstellung im Mittelpunkt, wird von „conceptual *development*“ gesprochen.
- Ist der Aspekt des Wachstums der Vorstellung zentral, so lautet die Bezeichnung „conceptual *growth*“.

In beiden Fällen wird davon ausgegangen, dass sich die alte Vorstellung in einzelnen Schritten verändert und letztlich nicht mehr vorhanden ist.

- Liegt die Betonung auf der Reorganisation der Vorstellung, ist von „conceptual *reorganisation*“ die Rede.

Hierbei wird „die Situiertheit und Verknüpfung [der alten Vorstellung] aus neurobiologischer Perspektive“ (Krüger, 2007, S. 82) aufgegriffen.

- Wenn die Rekonstruktion der alten Vorstellung im Vordergrund steht, wird der Terminus „conceptual *reconstruction*“ verwendet.

Dabei steht der „Tätigkeitsaspekt des Lernenden“ (Krüger, 2007, S. 83) im Mittelpunkt.

Durch die Veränderung von einzelnen Konzepten kann es zu einer Veränderung kompletter Wissensstrukturen kommen. Für diese Art des Conceptual Change wird von Schnotz (2006, S. 77) die Bezeichnung „Wissensveränderung“ verwendet.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird vom Autor, in Anlehnung an Krüger (2007, S. 83), der „die Veränderung von Wissensstrukturen als Rekonstruktion“ versteht, und an Vosniadou und Verschaffel (2004, S. 447), die das Übertragen des Ansatzes des Conceptual Change auf das „Lernen und Lehren von Mathematik“ untersucht haben und deren theoretische Position eine konstruktivistische ist, der Terminus des Conceptual Change im Sinne der „conceptual *reconstruction*“ verwendet. Dies erscheint sinnvoll, da bei dieser Perspektive

- erstens berücksichtigt ist, dass das Aufbauen von fachwissenschaftlichen Vorstellungen anhand der Rekonstruktion vorhandener (Alltags-)Vorstellungen der Lernenden im Stochastikunterricht eine zentrale Rolle einnimmt (vgl. beispielsweise

das Entwickeln der Vorstellung von der „stochastischen Unabhängigkeit“ der einzelnen Ergebnisse beim mehrmaligen Werfen eines Spielwürfels), und

- zweitens der Schwerpunkt auf dem Tätigkeitsaspekt des Lernenden liegt – so ist „guter“ Stochastikunterricht für den Arbeitskreis Stochastik der GDM (2003, S. 22) durch *experimentelles und selbstständiges* Arbeiten gekennzeichnet (wie „guter“ Mathematikunterricht generell).

1.1.2 Prämisse

Bei der Theorie des Conceptual Change wird die Veränderung von Konzepten, im Sinne von eigenen Vorstellungen, betrachtet. Dies setzt das Vorhandensein von Konzepten voraus. Krüger (2007, S. 83) verweist diesbezüglich auf die Theorie des erfahrungsbasierten Lernens, welche besagt, „dass der heranwachsende Mensch erste basale Konzepte auf der Ebene von elementaren Erfahrungen gründet“. So wird bei kleinen Kindern bereits im Alter von wenigen Monaten der Erwerb von Wissen in bestimmten Domänen durch epistemologische Strategien unterstützt (Baillargeon, 1994). Epistemologische Strategien bezeichnen hierbei „auf Erkenntnis ausgerichtete Prinzipien“ (Krüger, 2007, S. 83), welche auch die Neugier steuern. Das Wissen wird aktiv konstruiert, sodass der Mensch „auf der Basis von Erfahrungen ein grundlegendes Verständnis von der Umwelt und Wirklichkeit“ (Krüger, 2007, S. 83) aufbaut. Dieses aktiv konstruierte Wissen, das „Vorstellungen über fundamentale Kategorien und Eigenschaften der Welt“ (Krüger & Vogt, 2007, S. 260) beschreibt, wird als „ontologisches Wissen“ bezeichnet und als bestimmend für das weitere Lernen angesehen. Schnotz (2006, S. 77) weist darauf hin, dass Kinder auf diese Weise bis zu ihrem Schuleintritt „anhand von Alltagserfahrungen ein reichhaltiges Wissen über ihre Umwelt erworben haben“.

1.1.3 Die Theorie des Conceptual Change und ihre Erweiterungen

Ausgangspunkt der Theorie des Conceptual Change war die Sichtweise des klassischen Empirismus, in welcher das menschliche Gedächtnis mit einem unbeschriebenen Blatt Papier verglichen wurde (Strike & Posner, 1982). Die Erfahrung, so die Metapher, war dazu da, dieses Blatt zu beschreiben. Das Weltbild würde also aus einzelnen Puzzlestücken entstehen, wobei der Erfahrung die Aufgabe zugeschrieben wurde, diese Puzzlestücke richtig ineinander zu setzen. Lernen sollte direkt aus der Erfahrung erfolgen – Vorerfahrungen und vorhandenes Wissen wurden hierbei nicht berücksichtigt.

Zu dieser Sichtweise wurde von Posner et al. (1982) eine Art Gegenstück geschaffen. Strike und Posner (1982, S. 232) führen aus, dass Conceptual Change im direkten Gegensatz zur klassischen Form des Empirismus zu sehen ist: Jeder Einzelne geht mit einem vorhandenen Repertoire an Vorstellungen auf Erkundung. Die Art dieser Vorstellungen bestimmt im Wesentlichen, was gelernt wird und wie es gelernt wird. Lernen ist nicht nur eine Sache des Hinzufügens von Vorstellungen zum eigenen Vorrat an Vorstellungen. Lernen transformiert die vorhandenen Vorstellungen in gewisser Weise.

Darüber hinaus werden von Strike und Posner (1982, S. 236 f.) gewisse Ähnlichkeiten zwischen der Veränderung wissenschaftlicher Theorien und dem Lernen von wissenschaftlichen Inhalten gesehen. Sowohl der Wissenschaftler als auch der Lernende verfügen über ein Repertoire an vorhandenen Konzepten. Damit der Wissenschaftler ein neues Konzept annehmen beziehungsweise der Lernende aufnehmen kann, ist es in beiden Fällen nötig, dass ein Weg gesehen wird, welcher von den gegenwärtigen zu den neuen Konzepten verläuft. Strike und Posner weisen jedoch darauf hin, dass der Weg, dem der Lernende von alten Vorstellun-

gen zu neuen folgen muss, nicht der gleiche ist wie der Weg von einer historischen wissenschaftlichen Periode zur nächsten. Der Lernende muss also bei der Entwicklung seiner Vorstellungen nicht den geschichtlichen Ablauf rekapitulieren.

Im Folgenden werden die einzelnen Elemente der Theorie des Conceptual Change von Posner et al. (1982) vorgestellt sowie nachfolgende Erweiterungen dieser Theorie, wie sie von Krüger (2007) beschrieben werden. Ein grafischer Überblick zur Theorie des Conceptual Change inklusive der genannten Erweiterungen ist in Abbildung 1.1 dargestellt.

Ausgehend von einer „Lernsituation“ werden von Strike und Posner (1982, S. 235) vier Bedingungen genannt, die beim Lernenden als Voraussetzung für das Auftreten einer „Akkomodation“, im Sinne der Theorie des Conceptual Change von Posner et al. (1982), beziehungsweise einer „conceptual *reconstruction*“, im Sinne der Erweiterungen dieser Theorie, wie sie von Krüger (2007) beschrieben werden, erforderlich sind:

- erstens, dass eine gewisse Unzufriedenheit mit den existierenden Vorstellungen vorhanden ist,
- zweitens, dass die neue Vorstellung verständlich ist,
- drittens, dass die neue Vorstellung auf Anhieb plausibel erscheint, und
- viertens, dass die neue Vorstellung die Möglichkeit weiterer fruchtbarer Untersuchungen nahelegt.

Das Entstehen einer gewissen *Unzufriedenheit* mit den alten Vorstellungen wird als erforderlich angesehen, damit der Lernende das Vertrauen in die alten Vorstellungen verliert und bereit ist, sich für eine neue Vorstellung zu öffnen (Strike & Posner, 1982, S. 235). Dieser Vorgang lässt sich mit dem Anhäufen eines Vorrats an ungelösten Puzzles oder Anomalien und dem abnehmenden Vertrauen in die gegenwärtigen Fähigkeiten, diese Puzzles oder Anomalien lösen zu können, vergleichen. In einer Erweiterung zur Theorie von Posner et al. (1982) wird von Krüger (2007) hinzugefügt, dass die ontologischen Überzeugungen des Lernenden einen Einfluss darauf haben, welche Art von Problem sich durch die bereits vorhandenen Vorstellungen ergibt. Die ontologischen Überzeugungen können hierbei als ein Element eines kognitiven Filters aufgefasst werden. Um Unzufriedenheit beim Lernenden hervorzurufen, bietet sich beispielsweise das Erzeugen eines kognitiven Konflikts an.

Die angebotene neue Vorstellung muss ihre *Verständlichkeit* erkennen lassen. Für den Lernenden muss begreifbar sein, wie die vorhandenen Erfahrungen durch die neue Vorstellung genügend strukturiert werden können, damit er die mit der neuen Vorstellung verbundenen Möglichkeiten erfassen kann. Strike und Posner (1982) weisen hierbei auf die Wichtigkeit des Einsatzes von Analogien und Metaphern durch die Lehrperson hin. Diese erleichtern die Verständlichkeit der neuen Vorstellung und den Zugang dazu. Krüger (2007, S. 84) merkt in einer Erweiterung zur Theorie von Posner et al. (1982) an, dass sich eine neue Vorstellung umso leichter in die vorhandenen Vorstellungen integrieren lässt, „je besser sie zum Wissen in anderen Bereichen passt“. Damit eine neue Vorstellung überhaupt verständlich erscheinen kann, muss zudem eine gewisse Mindestmenge an Wissen beim Lernenden vorhanden sein.

Die *Plausibilität* der neuen Vorstellung ist gegeben, wenn die neue Vorstellung dazu tauglich erscheint, die ungelösten Probleme der vorherigen Vorstellungen lösen zu können. Strike und Posner (1982) weisen darauf hin, dass die Einschätzung der Plausibilität auch davon abhängt, in welchem Maße die neue Vorstellung mit den bereits vorhandenen Vorstellungen übereinstimmt. In einer Erweiterung zur Theorie von Posner et al. (1982) fügt Krüger (2007, S. 84) hinzu, dass die neue Vorstellung „glaubwürdig erscheinen und widerspruchsfrei zu den ontologischen Überzeugungen“ sein muss. Zudem ist es für die Annahme oder Ablehnung der neuen Vorstellung entscheidend, wie stark die neue Vorstellung mit folgenden Einflüssen im Einklang ist:

- mit epistemologischen Überzeugungen, wie den in der Wissenschaft als aussagekräftig anerkannten Erklärungsstrategien,
- mit der Auffassung von der Art wissenschaftlicher Erkenntnis, wie der nicht spontanen Gewinnung von Erklärungen,
- mit metaphysischen Überzeugungen von Natur, wie Ordnung, Symmetrie und Determiniertheit, sowie
- mit „der Auffassung, dass bestimmte wissenschaftliche Konzepte sich nicht durch empirische Gegenargumente widerlegen lassen“ (Krüger, 2007, S. 84).

Die epistemologischen und metaphysischen Überzeugungen stellen hierbei weitere Elemente des kognitiven Filters dar.

Dass die *Fruchtbarkeit* der neuen Vorstellung vom Lernenden als gegeben angesehen wird, setzt voraus, dass die neue Vorstellung mehr leistet als nur die Probleme der bereits vorhandenen Vorstellungen zu lösen (Strike & Posner, 1982). Für den Lernenden müssen Perspektiven zur Erweiterung der neuen Vorstellung erkennbar sein und sich neue Bereiche zur Untersuchung eröffnen. Krüger (2007, S. 84) hebt als Ergänzung zur Theorie von Posner et al. (1982) hervor, dass die geforderte Ausbaufähigkeit der neuen Vorstellung nicht nur fachbezogen oder auf das Wissenschaftliche beschränkt zu betrachten ist, sondern ganz allgemein „andere Bereiche“ mit einschließt.

Bezüglich der Theorie von Posner et al. (1982) weist Krüger (2007) auf folgende Beziehungen zwischen den vier beschriebenen Bedingungen hin: Damit die neue Vorstellung dem Lernenden als plausibel erscheinen kann, muss sie verstanden werden. Ohne Verständlichkeit ist also keine Plausibilität möglich. Wenn der Lernende zu der Überzeugung gekommen ist, dass die neue Vorstellung die beiden Eigenschaften „Verständlichkeit“ und „Plausibilität“ erfüllt, kann er versuchen, bereits vorhandene Erfahrungen durch aktives Konstruieren mithilfe der neuen Vorstellung zu erklären. Kommt er dabei zu neuen Ansichten und Entdeckungen, wird die neue Vorstellung ihm als fruchtbar erscheinen und in der Folge zum Einsatz kommen. *Plausibilität* und *Verständlichkeit* sind also die Voraussetzungen für die *Fruchtbarkeit* einer neuen Vorstellung.

Den Mittelpunkt der Theorie des Conceptual Change von Posner et al. (1982) bildet die „Veränderung von Vorstellungen“ (Krüger, 2007, S. 82). Es erfolgt dabei eine Konzentration auf kognitive Aspekte. In Abbildung 1.1 wird die Veränderung der Vorstellung (im Sinne der „conceptual *reconstruction*“) dadurch symbolisiert, dass die „neue fachorientierte Vorstellung“ und die „neue wissenschaftliche Vorstellung“ *buchstäblich* Elemente der „alten Vorstellung“ und der „gefilterten gelehrten Vorstellung“ beinhalten. Krüger (2007) weist in Erweiterung zur Theorie von Posner et al. (1982) darauf hin, dass die Veränderung von Vorstellungen in Abhängigkeit vom jeweiligen Kontext geschehen kann und somit nicht in jedem Fall beobachtbar sein muss. Zudem ist die Anwendung der veränderten Vorstellung davon abhängig, ob ihr Einsatz als sinnvoll erachtet wird.

Folgendes Beispiel verdeutlicht dies: „Was für ein wunderschöner Sonnenaufgang“ ist auch unter naturwissenschaftlich gebildeten Menschen im Alltag frühmorgens eine weitaus geläufigere Formulierung als „Wie schön sich die Erde aus ihrem Erdschatten dreht.“

Krüger (2007, S. 86) sieht die eingenommene Perspektive in der Theorie von Posner et al. (1982) als charakteristisch für einen überwiegend „epistemologischen Standpunkt“ an, welcher von Duit und Treagust (2003, S. 673) noch detaillierter als radikal konstruktivistisch epistemologisch bezeichnet wird. Ausgehend von konkreten Fachinhalten wird der Wandel der Vorstellung beim Lernenden betrachtet. Krüger (2007) hebt in Erweiterung der Theorie von Posner et al. (1982) hervor, dass die „Lernsituation“ nicht nur von der Lehrperson, sondern insbesondere vom Lernenden dahingehend einzuschätzen ist, dass die vier Bedingungen *Unzufriedenheit*, *Verständlichkeit*, *Plausibilität* und *Fruchtbarkeit* vorliegen.

Unter Bezug auf Pintrich, Marx und Boyle (1993) sowie Sinatra und Pintrich (2003) weisen Duit und Treagust (2003, S. 675) darauf hin, dass beim Lernen neben den rationalen Einflüssen auch affektive Einflüsse zu berücksichtigen sind. Krüger (2007) verweist diesbezüglich zudem auf Pintrich (1999) und Zembylas (2005). Lernen ist „nicht nur ein kognitives Problem“ (Krüger, 2007, S. 86) des Lernenden, sondern hängt aus psychologischer Sicht noch von weiteren Aspekten ab: der Motivation, dem Interesse am Lerngegenstand sowie den Einstellungen und Kontrollüberzeugungen bezüglich der eigenen Lernstrategien (also dem Selbstkonzept). Hinsichtlich der Motivation des Lernenden kann zwischen intrinsischer und extrinsischer Motivation unterschieden werden. Motive für die intrinsische Motivation sind das Streben nach dem Erleben inhaltlicher Kompetenz, der Wunsch nach Autonomie und das Streben nach dem Gefühl der sozialen Eingebundenheit. Ein Motiv für die extrinsische Motivation ist der Leistungsvergleich. In einer Erweiterung zur Theorie von Posner et al. (1982) kann der Einfluss von Motivation, Interesse und Selbstkonzept als emotionaler Filter aufgefasst werden, welcher „die erste Lerndurchgangsstation“ (Krüger, 2007, S. 86) darstellt. Anzumerken ist, dass ein kognitiver Konflikt, der nach einer sachlichen und rein rationalen Analyse zu der in der Theorie von Posner et al. (1982) geforderten Unzufriedenheit führen würde, trotzdem ohne weitere Wirkung bliebe, wenn beim Lernenden „nicht auch Unbehagen“ (Krüger, 2007, S. 86) entstehen würde.

Neben den internalen Variablen der psychologischen Sichtweise sind in einer Erweiterung zur Theorie von Posner et al. (1982) beim Lernen auch externale Variablen der sozialkonstruktivistischen Perspektive zu berücksichtigen. Unter Bezug auf Caravita und Halldén (1994) nennt Krüger (2007, S. 86) diesbezüglich den Aspekt der „adäquaten Kontextualisierung“ und den Aspekt der „Enkulturation“. Ersterer beinhaltet, dass „die Authentizität und Situiertheit des Lernangebots“ in Erwägung gezogen werden muss „und die Sozietät der Klasse beim Lernen“ nicht außer Acht gelassen werden darf. Letzterer beinhaltet, dass zu berücksichtigen ist, dass die Aneignung und die Anwendung von Wissen vor dem Hintergrund „bestimmter Denk- und Handlungsweisen einer sozialen Gemeinschaft“ erfolgen. Hierzu verweist Krüger (2007) auf Vygotsky (1962). Die „Lernsituation“ in der Theorie von Posner et al. (1982) wird durch die Einbeziehung der adäquaten Kontextualisierung zur „Lehr-Lern-Situation“ erweitert. Die Sozietät der Klasse beim Lernen wird in Form des „Lernklimas“ berücksichtigt, die „Enkulturation“ steht stellvertretend für den kulturellen Rahmen. „Enkulturation“, „Lehr-Lern-Situation“ und „Lernklima“ bilden in einer Erweiterung zur Theorie von Posner et al. (1982) die externalen Variablen. Unter dem Verweis auf Caravita und Halldén (1994) wird von Krüger (2007, S. 86) angemerkt, dass das Ziel des Conceptual Change darin gesehen werden kann, in einem Prozess der Enkulturation eine Veränderung der Situiertheit des Wissens zu erreichen. Der Lernende soll erkennen, „welche Vorstellungen in welchen Kontexten angemessen angewandt werden“ können.

In der Theorie von Posner et al. (1982) wird der Prozess, in dem das naturwissenschaftliche Wissen anwächst, dargestellt. Die Veränderung der Vorstellungen wird nur auf der Ebene der Fachinhalte untersucht – dabei wird außer Acht gelassen, „dass sich bei jedem Menschen ein allgemeines Gerüst an Vorstellungen und Wissen über das Wesen von Naturwissenschaft im Allgemeinen ausgebildet hat“ (Krüger, 2007, S. 87), sodass ein einzelner inhaltlicher Aspekt nicht unbeeinflusst davon ausgewechselt werden kann. Krüger (2007) verweist hierzu auf Vosniadou (1994). Unter Bezug auf Chinn und Brewer (1993) führt Krüger (2007, S. 87) das Vorhandensein eines allgemeinen Gerüsts als eine mögliche Erklärung dafür an, dass „alte Vorstellungen und Annahmen nicht aufgegeben, sondern bestenfalls leicht verändert werden“.

Von Vosniadou (1999, S. 8) werden unter Verweis auf Vosniadou und Brewer (1992) diesbezüglich zwei „fundamentally contradictory systems“ unterschieden: „beliefs and presuppositions“. Erstere basieren auf oberflächlichen Beobachtungen und lassen sich vergleichsweise

leicht verändern, wohingegen Letztere tiefgehende theoretische Konstrukte darstellen (im Sinne von Vorstellungen) und schwieriger zu verändern sind.

Diese tiefgehenden theoretischen Konstrukte, die auch als allgemeine „Rahmentheorien“ (Krüger, 2007, S. 87) bezeichnet werden, setzen sich aus ontologischen und epistemologischen Überzeugungen zusammen und wirken beim Prozess der Wissensaneignung auf die inhaltliche Erkenntnisgewinnung mit ein (Vosniadou, 1999). Bezüglich der ontologischen und epistemologischen Überzeugungen wird von Krüger (2007, S. 87) angemerkt, dass diese „in früher Kindheit erworben und häufig bestätigt wurden und zudem meist nicht bewusst sind“. Der Einfluss der ontologischen und epistemologischen Überzeugungen findet in einer Erweiterung zur Theorie von Posner et al. (1982) in Form von Elementen des kognitiven Filters Berücksichtigung. Damit ein Conceptual Change bezüglich einer bestimmten inhaltlichen Vorstellung erfolgen kann, ist es oftmals nötig, dass die entsprechende Rahmentheorie mit verändert wird – dies bedeutet jedoch „tief verwurzelte Erfahrungen zu erschüttern“ (Krüger, 2007, S. 87). Für den Fall, dass sich die Rahmentheorie ändert, müssen alle inhaltlichen Vorstellungen, die sich auf die Rahmentheorie stützen, ebenfalls angepasst werden. Es handelt sich hierbei um einen Prozess, der beim Lernenden eine nicht unerhebliche Verunsicherung erzeugt.

Lernen findet im Bereich „einer persönlichen Vorstellungswelt“ (Krüger, 2007, S. 87) statt. Strike und Posner (1982, S. 235 f.) verwenden hierfür in Anlehnung an Toulmin (1972) den Begriff der „conceptual ecology“. Folgende Merkmale einer „conceptual ecology“ werden als geeignet angesehen, einen Conceptual Change zu ermöglichen:

- erstens „Anomalien“,
- zweitens „Analogien und Metaphern“,
- drittens „epistemologische Verpflichtungen“,
- viertens „metaphysische Überzeugungen und Konzepte“ und
- fünftens „andere Erkenntnisse“.

Was Anomalien betrifft, so ist die Art der Unzulänglichkeit bei einer vorhandenen Vorstellung von entscheidender Bedeutung dafür, welche Vorstellung als Ersatz ausgewählt wird. Analogien und Metaphern können dazu dienen, dass sich neue Vorstellungen als annehmbar anbieten und verständlich erscheinen. An epistemologischen Verpflichtungen sind mustergültige Erklärungen und allgemeine Ansichten über den Charakter wissenschaftlicher Erkenntnis zu nennen. Bezüglich der mustergültigen Erklärungen ist zu berücksichtigen, dass es für die meisten Bereiche fachspezifische Auffassungen darüber gibt, was als erfolgreiche Erklärung in einem Bereich zählt.

Hinsichtlich der allgemeinen Ansichten über den Charakter wissenschaftlicher Erkenntnis weisen Strike und Posner (1982) unter Bezug auf Lakatos (1970) und Elkana (1977) darauf hin, dass Eleganz, Beschränkung auf das Wesentliche und nicht vorschnell zu sein ein fachübergreifender Standard zu sein scheint. Metaphysische Überzeugungen sind oftmals wichtig bei der naturwissenschaftlichen Arbeit und resultieren in epistemologischen Überzeugungen, die wiederum dazu führen können, dass eine bestimmte Art von Erklärung ausgewählt oder zurückgewiesen wird. Beispielhaft für metaphysische Überzeugungen in der Naturwissenschaft lassen sich Überzeugungen bezüglich des Grades der Ordnung, der Symmetrie oder der Nichtzufälligkeit des Universums anführen.

Unter Bezug auf Burtt (1932) verweisen Strike und Posner (1982) auch auf die Bedeutung des Verhältnisses zwischen naturwissenschaftlicher Erfahrung und Alltagserfahrung. Hinsichtlich metaphysischen Konzepten in der Naturwissenschaft ist anzumerken, dass bestimmte naturwissenschaftliche Konzepte oftmals eine metaphysische Qualität aufweisen, indem sie Überzeugungen von der endgültigen Natur des Universums darstellen und immun sind gegenüber einer direkten empirischen Widerlegung. Genannt wird dabei beispielhaft die Überzeu-

gung von der Existenz des absoluten Raumes und der absoluten Zeit. Als „andere Erkenntnisse“ sind Erkenntnisse auf anderen Gebieten zu nennen, wobei auf die Bedeutung konkurrierender Vorstellungen hingewiesen wird: Eine Bedingung dafür, dass eine Vorstellung als neue Vorstellung ausgewählt wird, ist, dass diese Vorstellung dem Anschein nach mehr verspricht als ihre Mitbewerber (Strike & Posner, 1982).

Zu berücksichtigen ist, dass den beschriebenen Merkmalen einer „conceptual ecology“ die Funktion zugeschrieben wird, die Auswahl einer neuen Vorstellung *einzuleiten*. Der Einfluss auf die *endgültige Rechtfertigung* dieser Vorstellung wird dagegen nur noch als gering angesehen. Darüber hinaus darf nicht außer Acht gelassen werden, dass die Relevanz der einzelnen Merkmale für einen Conceptual Change in Abhängigkeit von der konkreten Problemstellung variiert. Krüger (2007, S. 87) fasst die Bedeutung der persönlichen Vorstellungswelt wie folgt zusammen: Die Einschätzung der bereits vorhandenen Vorstellungen und der neuen, alternativen Vorstellungen erfolgt vor dem Hintergrund der existierenden Konzepte und hinsichtlich „einer Gesamtperspektive zur Erhaltung einer persönlichen Ordnung mit der Welt“, also einer metaphysischen Überzeugung. In einer Erweiterung zur Theorie von Posner et al. (1982) wird die metaphysische Überzeugung von Krüger (2007, S. 87) neben den ontologischen und epistemologischen Überzeugungen als ein weiteres Element des kognitiven Filters angesehen, wobei diese drei Elemente als entscheidend „für die Persistenz alter Vorstellungen“, das heißt für die Beharrlichkeit der vorhandenen Vorstellungen, anzusehen sind.

Aus Sicht der Kognitionspsychologie sollte zudem berücksichtigt werden, dass Lernende „mit erwartungswidrigen Beobachtungen oder ungewöhnlichen Daten sehr unterschiedlich umgehen“ (Krüger, 2007, S. 87; Chinn & Brewer, 1993). So werden die betreffenden Daten zum einen grundsätzlich nicht akzeptiert und für ungültig gehalten. Dies umfasst neben dem Ignorieren der Daten und dem Zurückweisen der Daten auch die Unfähigkeit zur Entscheidung aufgrund einer Unsicherheit über den Wahrheitsgehalt der Daten. Zum anderen wird kein Standpunkt zu den betreffenden Daten eingenommen. Die Daten werden hinsichtlich theoretischer Annahmen als irrelevant eingestuft. Krüger (2007, S. 88) weist darauf hin, dass die betreffenden Daten „nur in den seltensten Fällen“ grundsätzlich akzeptiert werden, wobei dies aber trotzdem noch nicht dazu führen muss, dass die alten theoretischen Annahmen geändert werden: Eventuell lösen die Daten einen Widerspruch aus, welcher als „zurzeit nicht erklärlich“ eingestuft wird. Erst bei einer neuen Interpretation der Daten kommt es zu einer Einschränkung oder Abänderung der theoretischen Annahmen (die sonst als haltbar angesehen werden) und die alten Vorstellungen werden überdacht.

Ein kognitiver Konflikt ist also nur dann von Nutzen, wenn der Lernende zu einer Koordination von empirischen Daten und theoretischen Annahmen imstande ist. Unter Bezug auf Chan, Burtis und Bereiter (1997) sowie Mason (2001) hebt Krüger (2007, S. 88) hervor, dass es bisher weder gelungen ist, die „besondere Effektivität“ eines kognitiven Konflikts zu belegen, noch seine besondere Effektivität zu widerlegen.

Damit eine Reflexion über die gewonnene Erkenntnis erfolgen kann, „ist ein gewisses Maß an Metakognition notwendig“ (Krüger, 2007, S. 88). Dem Lernenden muss bewusst sein, dass sein Wissen unter Umständen nur begrenzt haltbar und falsifizierbar ist und darüber hinaus den Charakter einer Hypothese besitzt. Unter Bezug auf di Sessa (1988) merkt Krüger (2007, S. 88) an, dass Defizite in der Metakognition verantwortlich sind für die geringe Kohärenz des Alltagswissens, welches sich „aus isolierten Bruchstücken“ zusammensetzt und beim Lernen in komplexere Konzepte eingebunden wird. Da das Wissen in einer Domäne nicht auf einen Zusammenhang hin überprüft wird, ist dem Lernenden die Bruchstückhaftigkeit und teilweise Widersprüchlichkeit dieses Wissens nicht bewusst. Die Metakognition ist in einer Erweiterung zur Theorie von Posner et al. (1982) zusätzlich zu den ontologischen, epistemologischen und metaphysischen Überzeugungen in Form eines Elementes des kognitiven Filters zu berücksichtigen.

Mit den beschriebenen Erweiterungen liegt die Theorie des Conceptual Change von Posner et al. (1982) nunmehr in einer „multidimensionalen Perspektive“ (Krüger, 2007, S. 90) vor. Der Ansicht von Caravita (2001, S. 429) folgend, dass das Festhalten an der Theorie des Conceptual Change nur gerechtfertigt werden kann, indem dieser breitere theoretische Rahmen akzeptiert wird, und von Rowlands, Graham, Berry und McWilliam (2007, S. 39), dass eine Theorie des Conceptual Change den Fokus auf das Rationale richten muss, dabei aber Unterrichtsmethoden, Dynamik im Klassenzimmer, Motivation usw. nicht außer Acht lassen darf, bildet diese multidimensionale Perspektive die Grundlage für die weiteren Betrachtungen des Autors im Rahmen dieser Arbeit.

1.1.4 Schematische Darstellung

In Abbildung 1.1 ist die Theorie des Conceptual Change mit ihren Erweiterungen schematisch dargestellt.

An externalen Variablen des Lernprozesses sind die Enkulturation (also der kulturelle Rahmen), die Lehr-Lern-Situation (das heißt der Kontext, in dem der Lernprozess stattfindet, sowie ob beispielsweise Instruktion oder Konstruktion vorliegt) und das Lernklima berücksichtigt.

Der Ausgangspunkt für die Betrachtung des Einflusses der verschiedenen internalen Variablen ist die „gelehrte Vorstellung“, im Sinne eines Inputs. Diese wird mit der vorhandenen Vorstellung, welche als „alte Vorstellung“ bezeichnet ist, verglichen. Der Vergleich der beiden Vorstellungen ergibt eine Anomalie und führt beim Lernenden zu einem kognitiven Konflikt: Es entsteht Unzufriedenheit. Wie der weitere Lernprozess verläuft, wird durch emotionale und kognitive Faktoren beeinflusst, die „gelehrte Vorstellung“ wird dadurch sinnbildlich gefiltert.

Neben den emotionalen Aspekten der Motivation, des Interesses und des Selbstkonzeptes des Lernenden sind folgende kognitive Aspekte zu berücksichtigen:

- erstens die ontologischen Überzeugungen des Lernenden (also das grundlegende Verständnis des Lernenden von der Umwelt und der Wirklichkeit),
- zweitens die epistemologischen Überzeugungen des Lernenden (beispielsweise diejenigen wissenschaftlichen Erklärungsstrategien, die vom Lernenden als aussagekräftig anerkannt werden),
- drittens die metaphysische Überzeugung des Lernenden (zum Beispiel vom Vorhandensein einer natürlichen Ordnung, Symmetrie und Determiniertheit) und
- viertens die Metakognition des Lernenden (also das Bewusstsein des Lernenden, dass das eigene Wissen unter Umständen nur begrenzt haltbar und falsifizierbar ist und lediglich den Charakter einer Hypothese besitzt).

Unter dem Einfluss der beiden Filter wird die „gelehrte Vorstellung“ hinsichtlich ihrer Plausibilität und Verständlichkeit geprüft, wobei für die Verständlichkeit insbesondere Analogien und Metaphern von Bedeutung sind. Die „alte Vorstellung“ bleibt bei diesem Vorgang im Sinne einer „alten (Alltags-)Vorstellung“ erhalten und führt in einem individuellen Konstruktionsprozess, dem *Conceptual Change*, in Abhängigkeit vom Lerninhalt zu einer „neuen fachorientierten Vorstellung“ beziehungsweise „neuen wissenschaftlichen Vorstellung“. Dabei werden die „alte (Alltags-)Vorstellung“ und die „neue fachorientierte Vorstellung“ beziehungsweise „neue wissenschaftliche Vorstellung“ auf ihre Fruchtbarkeit geprüft, unter anderem im Hinblick auf die Anwendbarkeit auf andere Bereiche und die Ausbaufähigkeit.

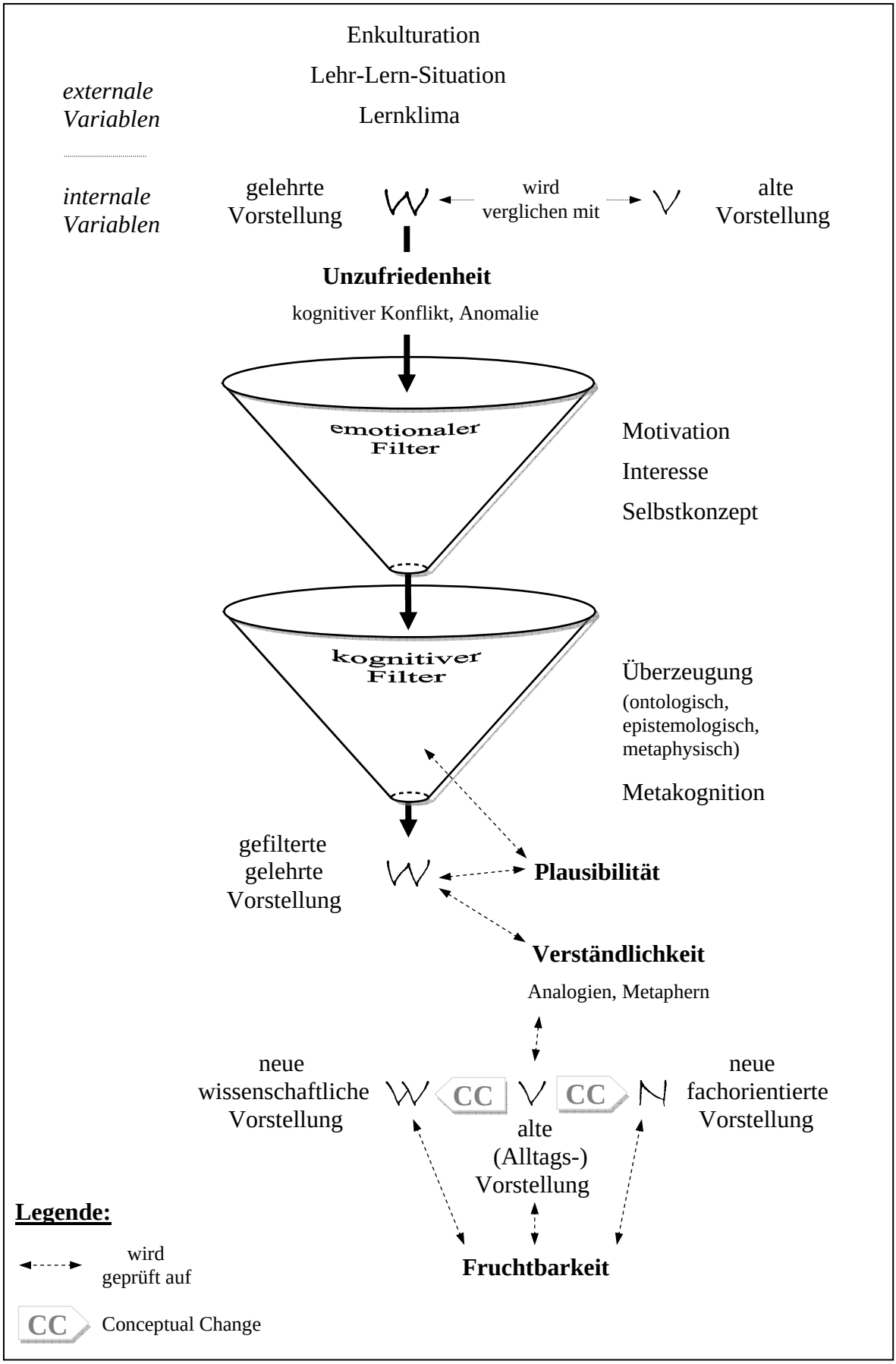


Abb. 1.1. Theorie des Conceptual Change mit Erweiterungen (vgl. Krüger, 2007)

1.2 Einordnung von Fehlkonzepten

1.2.1 Hinweis

In Anlehnung an die bisherige synonyme Verwendung des Begriffes der Vorstellung und des Begriffes des Konzeptes im Zusammenhang mit der Theorie der Conceptual Change wird im weiteren Verlauf auch der Begriff des Fehlkonzeptes (vgl. beispielsweise Schnotz, 2006) und der Begriff der Fehlvorstellung (vgl. beispielsweise Krüger, 2007) synonym verwendet. Im Englischen ist hierfür der Terminus „misconception“ (vgl. beispielsweise Strike & Posner, 1992) gebräuchlich. Soweit nichts anderes angegeben ist, werden „Fehlkonzept“ und „Fehlvorstellung“, welche relative Begriffe sind, die sich auf eine normative Setzung beziehungsweise einen Bewertungsrahmen beziehen, in dieser Arbeit vom Autor *wertneutral* verwendet, da in gewissem Sinne bei jeglicher Art von Vorstellung eine Optimierungsoffenheit zu berücksichtigen ist. Nachfolgend wird, bezogen auf die Theorie des Conceptual Change, ein kurzer Überblick zu unterschiedlichen Theorien zur Entstehung von Fehlkonzepten allgemeiner Art und die sich daraus ergebenden Konsequenzen gegeben, ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.

1.2.2 Theorien zur Entstehung von Fehlkonzepten

Rowlands et al. (2007, S. 23) stellen die Frage, ob ein Fehlkonzept eher ein Missverständnis oder ein alternatives Verständnis, eine alternative Vorstellung, ein anderer Standpunkt ist. Als Antwort wird festgehalten: Von Ersterem möglicherweise einmal abgesehen, scheint es eine „theorieartige“ Betrachtungsweise der Welt und eine andere Art des logischen Denkens zu sein.

Bezüglich der Entstehung von Fehlkonzepten verweisen Rowlands et al. (2007) auf Strike und Posner (1992, S. 158), welche es für sehr unwahrscheinlich halten, dass Fehlkonzepte immer in einer ausgeprägten oder klaren Form während des naturwissenschaftlichen Unterrichts vorhanden sind. Es kann genauso gut der Fall sein, dass Fehlkonzepte vor dem naturwissenschaftlichen Unterricht nur sehr schwach ausgeprägt oder noch gar nicht vorhanden sind und das Resultat von irreführenden Metaphern darstellen, die in der „conceptual ecology“ des Lernenden gebildet werden. Fehlkonzepte können auch als Konstrukt eines spontanen Denkprozesses entstehen (Rowlands et al., 2007). Der betreffende Denkprozess ist dadurch charakterisiert, dass er in einem nicht vertrauten Kontext stattfindet, durch die zu beantwortende Frage beeinflusst werden kann und den erstbesten Gedanken zum Inhalt hat. Rowlands et al. (2007) verweisen auf die Feststellung von Viennot (1979) aus dem Bereich der Physik, dass sowohl Lehrpersonen als auch Experten zu ganz ähnlichen Fehlern tendieren, wenn sie unter Zeitdruck antworten müssen oder zu wenig Zeit zum Nachdenken bekommen. Allerdings ist zu berücksichtigen, dass spontan entstandene Fehlkonzepte auch Elemente enthalten können, die bereits vor dem betreffenden Denkprozess geformt wurden (Rowlands et al., 2007, S. 25). Diese Elemente kommen unter Umständen in der Argumentation des Lernenden zum Vorschein, wenn versucht wird, die eigene Antwort zu verteidigen.

In Bezug auf das spontane Entstehen von Fehlkonzepten wird von Rowlands et al. (2007, S. 27) die Schema-Theorie als die zur Erklärung wahrscheinlich am besten geeignete Theorie angesehen. Unter Verweis auf Howard (1987) beschreiben Rowlands et al. (2007) ein Schema als ein Cluster von zusammenhängenden Konzepten, die dabei helfen, dass die Welt einen Sinn ergibt. Beispielhaft wird das Konzept „Gesicht“ (als Teil des menschlichen Körpers) an-

geführt, welches zugleich ein Schema darstellt, da es dabei hilft, die Konzepte „Auge“, „Nase“, „Mund“ und „Ohr“ einzuordnen: So würde beim Betreten eines dunklen Raumes, wenn gerade noch ein Augenpaar im Raum erkennbar wäre, das (eigene) Gesichtsschema instantiiert (im Sinne von „spontan hervorgerufen“) werden. Allgemein lässt sich festhalten, dass ein Schema aus „Slots“ oder „Variablen“ besteht, die mit Konzepten gefüllt und in einer bestimmten Art und Weise eingeordnet sind. Somit besitzt ein Schema auch eine Art Filterfunktion, indem es die Welt in einer bestimmten Ordnung erscheinen lässt. Diese Funktion ist ein Grund dafür, dass ein vorhandenes Schema oftmals nur sehr ungern aufgegeben wird. Daten, die nicht in ein Schema passen, werden entweder ignoriert, oder das betreffende Schema wird „in eigenartiger Art und Weise“ verändert.

Das Entstehen eines Fehlkonzeptes wird von Rowlands et al. (2007, S. 27 f.) am Beispiel der „Kraft“ aus dem Bereich der Physik illustriert: Ist eine Bewegung mit dem Begriff der Kraft zu erklären, so wird „Kraft“ in das zur Erklärung instantiierte Schema der betreffenden Bewegung eingeordnet. Entscheidend dafür, wie „Kraft“ eingeordnet wird, ist die Vorstellung von der Bewegung. Beispielsweise wird bei einem senkrecht nach oben geworfenen Ball davon ausgegangen, dass eine Kraft vorhanden sein muss, die den Ball gegen die Schwerkraft nach oben „schiebt“. Das Fehlkonzept entsteht also, indem „Kraft“ vom Lernenden als Metapher zur Beschreibung der Bewegung eingesetzt wird – spontanes logisches Denken kann diesbezüglich als das Instantiieren vager Vorstellungen, die geordnet, umgeordnet und modifiziert werden, um ein Phänomen erstmalig zu erklären, angesehen werden. Eine korrekte Erklärung der Bewegung eines senkrecht nach oben geworfenen (nicht rotierenden) Balles beinhaltet beispielsweise, dass unmittelbar vom Abwurf des Balles an (bei Vernachlässigung sonstiger Kräfte) lediglich die Luftreibungskraft und die Schwerkraft auf den Ball wirken: Die Luftreibungskraft ist stets entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung des Balles gerichtet, die Schwerkraft stets zum Erdmittelpunkt hin, sodass beide Kräfte entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung des sich senkrecht nach oben bewegenden Balles gerichtet sind. Aufgrund der Wirkung von Luftreibungskraft und Schwerkraft verringert sich die Geschwindigkeit des Balles. Ist diese Null, so befindet sich der Ball im „Umkehrpunkt“ – es wirkt auf ihn nur die Schwerkraft, seine Bewegungsrichtung kehrt sich um. Der Ball fällt nun senkrecht nach unten.

Darüber hinaus wird von Rowlands et al. (2007, S. 28) angemerkt, dass beim situationsspezifischen Argumentieren die Tendenz zur Fokussierung auf Merkmale besteht, die als dominant empfunden werden. Für das Beispiel „Kraft“ sind dies unter anderem die Merkmale „nach oben“, „bewegt sich horizontal“ und „großer Körper“. Fehlkonzepte ergeben sich, indem das Konzept „Kraft“ auf unterschiedliche Art und Weise in die „Slots“ oder „Variablen“ der verschiedenen Bewegungsschemata eingeordnet werden kann.

In der Entwicklungspsychologie wird der Begriff des Fehlkonzeptes „normativ-wertend“ für eine Alltagsvorstellung verwendet, die „nicht mit dem in der Schule vermittelten Wissen kompatibel“ ist (Schnotz, 2006, S. 77). Schnotz (2006) weist auf die Annahme von Chi, Slotta und de Leeuw (1994) hin, dass die kognitive Entwicklung den Erwerb bestimmter ontologischer Kategorien umfasst, wobei unterschieden wird zwischen „Stoffen“, „Prozessen“ und „mentalen Zuständen“. Ein Fehlkonzept entsteht dann, wenn die Zuordnung eines Konzeptes zu einer falschen ontologischen Kategorie erfolgt.

Beispielhaft lässt sich die Zuordnung des Konzeptes „Wärme“ aus der Physik zur ontologischen Kategorie „Stoffe“ anstelle zur Kategorie „Prozesse“ anführen.

Jedoch stellen die als Fehlkonzept bezeichneten „naiven theoretischen Annahmen“ oftmals eine Hilfe in Alltagssituationen dar und werden deswegen bei der Aneignung von wissenschaftlichem Wissen nicht „ohne weiteres“ aufgegeben, sondern koexistieren neben dem wissenschaftlichen Wissen (Schnotz, 2006, S. 80). Caravita (2001, S. 422) weist darauf hin, dass Wiser und Amin (2001) die Vorstellungen des Lernenden als naive oder wissenschaftliche Interpretationen von Phänomenen, die stark beeinflusst durch die Sprache sind, ansehen. So wird im Vorhandensein zweier Sprachen, einer alltäglichen und einer wissenschaftlichen, eine Ursache für Ambiguitäten im unterrichtlichen Dialog gesehen, wann immer Sprache Bedeutungen verbirgt, zwischen denen differenziert werden sollte. Zuordnungen zu einer falschen

ontologischen Kategorie können also unter Umständen auf das Vorhandensein dieser beiden Sprachen zurückzuführen sein.

Bei der kognitiven Entwicklung wird von Vygotsky (1987) unter einem entwicklungspsychologischen Aspekt unterschieden zwischen dem „Denken in Konzepten“ und dem „Denken in Komplexen“. Ersteres wird durch Konzepte in einem System aus Konzepten unterstützt, wohingegen Letzteres durch Merkmale der Wahrnehmung beeinflusst wird (Rowlands et al., 2007, S. 27).

Beispielhaft für das Denken in Konzepten, also das Denken an ein Konzept in einem System aus Konzepten, lässt sich anführen, dass ein konzeptuelles Verständnis von „Vogel“ beinhaltet, dass das Konzept „Rotkehlchen“ untergeordnet zum Konzept „Vogel“ und das Konzept „Tier“ übergeordnet zu den Konzepten „Rotkehlchen“ und „Vogel“ ist.

Unter Bezug auf die Unterscheidung zwischen dem „Denken in Konzepten“ und dem „Denken in Komplexen“ von Vygotsky (1987) weisen Rowlands et al. (2007) darauf hin, dass Fehlkonzepte unter Umständen gar keine Konzepte im eigentlichen Sinne sind, sondern Komplexe, die in keine hierarchische Ordnung aufgenommen werden und deren Bedeutungen in Kontext dazu gesetzt werden, was der Lernende als hervorstechende Merkmale erachtet.

Aus Sicht der Kognitionspsychologie erfolgt beim Erwerb von Wissen die „Konstruktion propositionaler Repräsentationen und mentaler Modelle“, welche in fortlaufender Interaktion stehen – „propositionale Repräsentationen“ setzen sich „aus komplexen internen Symbolen“ zusammen, die ihrerseits „aus einfacheren Symbolen zusammengesetzt sind und zum Ausdruck bringen, dass zwischen bestimmten Sachverhalten bestimmte Relationen bestehen“ (Schnotz, 2006, S. 79). „Mentale Modelle“ sind als eine Art von internen hypothetischen Objekten aufzufassen, die dadurch gekennzeichnet sind, dass sie einen Gegenstand repräsentieren, indem sie hinsichtlich seiner Struktur oder Funktion eine Analogie aufweisen. So werden zum einen von kognitiven Schemata ausgehend mentale Modelle anhand von propositionalen Repräsentationen aufgebaut oder verändert und zum anderen aus vorhandenen mentalen Modellen Informationen entnommen und den propositionalen Repräsentationen hinzugefügt.

Alltagserfahrungen führen bei Kindern zur Konstruktion von mentalen Initialmodellen, welche dann durch die Integration von alltäglichen und kulturell vermittelten Erfahrungen in einem graduellen Prozess zu synthetischen Modellen umgeformt und letztendlich in wissenschaftlich korrekte Modelle überführt werden. Schnotz (2006) verweist hierzu auf Vosniadou und Brewer (1992). Von dieser Vorstellung ausgehend, entstehen Fehlkonzepte „durch aktive, kreative und durchaus erfolgreiche Versuche der mentalen Kohärenzbildung, indem sowohl der neu aufgenommenen Information als auch dem bisherigen Wissen so weit wie möglich Rechnung getragen wird“ (Schnotz, 2006, S. 79).

Folgendes Beispiel von Vosniadou (1994) illustriert, dass ein kindliches synthetisches Modell in sich konsistent sein kann, obwohl es aus wissenschaftlicher Sicht falsch ist (vgl. Schnotz & Preuß, 1999, S. 201; Schnotz, 2006, S. 79): Im mentalen Initialmodell ist die Erde aus kindlicher Sicht meist flach und wird als eine Art Scheibe aufgefasst. Die Information, dass die Erde die Gestalt einer Kugel hat, führt zur Umformung des mentalen Initialmodells in ein synthetisches Modell. Sollen Kinder ihre Vorstellung von der Erde beschreiben, so wird zum einen gesagt, dass die Erde rund ist, dass Menschen nicht von der Erde herunterfallen und dass man nie an das Ende der Erde kommt, wenn man immer geradeaus läuft. Zum anderen wird aber von denselben Kindern auch gesagt, dass die Erde ein Ende hat und dass man von der Erde herunterfallen kann, wenn man ganz unten steht. Aus den genannten Aussagen könnte geschlossen werden, dass das alte Wissen und das neue Wissen unabhängig voneinander und nebeneinander existieren. Das muss jedoch nicht so sein – das kindlich konstruierte Wissen kann durchaus völlig konsistent sein, wie das in Abbildung 1.2 dargestellte synthetische Modell der Erde belegt. Von dieser Darstellung ausgehend, lassen sich die genannten Aussagen wie folgt interpretieren: Die Erde hat die Gestalt einer Kugel, ist also rund. Menschen können von der Erde nicht herunterfallen, da sie im Inneren einer Hohlkugel mit flachem Boden leben. Wenn man immer geradeaus läuft, kommt man nie an das Ende der Erde, weil Ozeane und Berge im Weg sind. Nichtsdestotrotz hat die Erde ein Ende, da sie eine oben offene Hohlkugel ist. Mit einer Rakete könnte man zum Beispiel aus dem Inneren der Hohlkugel nach außen ge-

langen und wenn man dann, wie bildlich dargestellt, versuchen würde, sich auf dem Äußeren der Hohlkugel aufzuhalten, würde man natürlich herunterfallen.

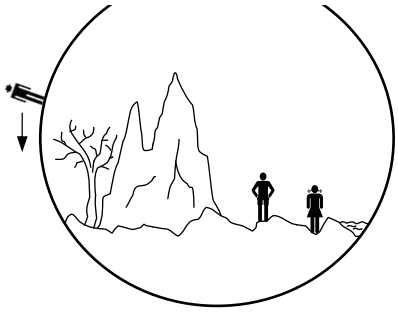


Abb. 1.2. Synthetisches Modell der Erde (vgl. Schnotz & Preuß, 1999, S. 201)

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass Fehlkonzepte allgemeiner Art als theorieartige Betrachtungsweisen oder Vorstellungen aufgefasst werden können, die nicht im Einklang mit wissenschaftlich anerkannten Konzepten sind. Bei der Entstehung von Fehlkonzepten werden aktive kognitive Prozesse im Inneren des Lernenden, die unter Umständen spontan ablaufen, als zentral angesehen. Die Ursache von Fehlkonzepten kann in Abhängigkeit von der Perspektive unter anderem in irreführenden Metaphern (vgl. die Ausführungen zur „conceptual ecology“), in einer Fokussierung auf einzelne Merkmale, im Vorhandensein zweier Sprachen, einer alltäglichen und einer wissenschaftlichen, in Konstrukten spontaner Denkprozesse und in Versuchen der mentalen Kohärenzbildung, welche im Allgemeinen erfolglos verlaufen, unter Umständen jedoch durchaus auch erfolgreich sein können, gesehen werden.

1.2.3 Konsequenzen

Aus instruktionspsychologischer Sicht sind „*Fehlkonzepte* durch *wissenschaftliche Konzepte* [, im Sinne von Konzepten, die in der Schule vermittelt werden,] zu ersetzen“ (Schnotz, 2006, S. 78). Insbesondere ist es beim Vorliegen eines Fehlkonzeptes wichtig, dass dieses Konzept durch die Konfrontation mit neuen Erfahrungen in Frage gestellt und so ein kognitiver Konflikt herbeigeführt wird (Schnotz, 2006).

Rowlands et al. (2007, S. 38) merken an, dass aus der entwicklungspsychologischen Perspektive von Chi et al. (1994) ein Conceptual Change keinen Theoriewechsel, sondern einen Wechsel des ontologischen Konzeptes, das heißt eine Veränderung der Zuordnung zu einer ontologischen Kategorie, darstellt. Beim Vorliegen eines Fehlkonzeptes ist also ein Wechsel des ontologischen Konzeptes nötig.

Beispielhaft lässt sich anführen, dass ein Laie die Aussage „Der Ball ist rot“ dahingehend interpretieren könnte, dass „rot“ eine stoffliche Eigenschaft des Balles darstellt. Ein Wissenschaftler könnte die Aussage dagegen so auffassen, dass es sich um eine kurz gefasste Umschreibung des Umstandes handelt, dass der Ball bei Beleuchtung mit weißem Licht nur den roten Anteil reflektiert. Vom Laien wird „rot“ also als stoffliche Eigenschaft des Balles angesehen, vom Wissenschaftler als Prozess (Rowlands et al., 2007, S. 38 f.).

Das Bewusstsein bezüglich des Unterschieds zwischen der alltäglichen und der wissenschaftlichen Sprache ist eine Grundvoraussetzung dafür, dass mit einem Wechsel des ontologischen Konzeptes gerechnet werden kann und die Möglichkeit einer Integration der Alltagsvorstellung in die wissenschaftliche Vorstellung gegeben ist (Caravita, 2001, S. 422). Bei-

spielhaft kann das bereits genannte Konzept „Wärme“ aus der Physik angeführt werden. Der Wechsel des ontologischen Konzeptes ist dabei als gradueller Prozess des Wissenserwerbs zu verstehen. Zur Begründung lässt sich anführen, dass der Konzeptwechsel beim Lernenden aufgrund von Informationen erfolgt, die zuvor nicht bewusst wahrgenommen wurden, die aber akzeptiert werden und denen vertraut wird. Als revolutionär werden von Caravita (2001, S. 425) dagegen die Konsequenzen angesehen, die sich aus dieser Akzeptanz ergeben. Das neue Wissen eröffnet dem Lernenden eine neue Perspektive auf Tatsachen, welche potenziell neue Wege der Aufnahme von Daten oder der Verarbeitung von Daten ermöglicht. Caravita (2001, S. 424) weist darauf hin, dass es von Wiser und Amin (2001) als zentral angesehen wird, dass die Kompatibilität zwischen der alltäglichen und der wissenschaftlichen Sichtweise hergestellt wird, um dem Lernenden die Erkenntnis zu ermöglichen, dass die Letztere eine Erklärung der eigenen intuitiven Interpretationen liefert, die nicht notwendigerweise ersetzt werden müssen. So sollten die naiven Vorstellungen des Lernenden nicht als Theorien zur Erklärung aufgefasst werden, sondern als Metaphern, die auf Muster oder Beziehungen hinweisen, die intuitiv erraten, aber noch nicht richtig artikuliert werden.

Bezogen auf die Konstruktion propositionaler Repräsentationen und mentaler Modelle ergibt sich beim Vorhandensein eines Fehlkonzeptes die Notwendigkeit, dass die betreffende inadäquate Rahmentheorie beeinflusst wird. Das mental konstruierte Modell lässt sich nur verändern, „indem die betreffenden ontologischen und epistemologischen Annahmen revidiert werden“ (Schnotz, 2006, S. 81). Dabei ist zu berücksichtigen, dass die vorhandenen Erfahrungen des Lernenden vor dem Hintergrund des geänderten theoretischen Konzeptes neu interpretiert werden müssen. Von Rowlands et al. (2007, S. 23) wird unter Verweis auf White (1994) sowie Tynjälä, Merenluoto und Murtonen (2002) angemerkt, dass es angebracht erscheint, in diesem Fall von einem „*conceptional* (mental structure) change“ anstelle eines Conceptual Change zu sprechen.

> Für das Beispiel des synthetischen Modells der Erde bedeutet dies, dass den betreffenden Kindern geholfen werden muss, ihre Erfahrung einer flach aussehenden Erde mit der neuen Vorstellung einer kugelrunden Gestalt der Erde in Einklang zu bringen (Schnotz & Preuß, 1999; Vosniadou, 1994). So muss neben dem Verständnis, dass runde Gegenstände unter bestimmten Bedingungen durchaus flach erscheinen können, auch das Verständnis erwachsen, dass die Schwerkraft zwar immer von oben nach unten wirkt, aber „von oben nach unten“ an verschiedenen Stellen auf der Erde verschiedene Richtungen bezeichnet.

Jedoch weisen Schnotz und Preuß (1999, S. 202) darauf hin, dass die Tatsache, dass Kinder sich so verhalten, *als ob* ihr Denken epistemologischen und ontologischen Überzeugungen folgt, nicht implizieren muss, dass sie wirklich über die entsprechenden theoretischen Annahmen *verfügen* und damit als Teil ihres impliziten oder expliziten Wissens *operieren*.

> Die kindliche Fehlinterpretation der neuen Information im Beispiel kann genauso gut auf ein mangelhaftes Differenzieren zwischen dem Aussehen eines Objekts und seinem Wesen oder zwischen den verschiedenen Arten des Raumbezuges zurückzuführen sein, weil eine solche Unterscheidung bis zu dem betreffenden Beispiel noch nicht von Belang war.

Die Bedeutung des Beispiels des synthetischen Modells der Erde wird von Schnotz und Preuß (1999) darin gesehen, dass es eindrucksvoll veranschaulicht, dass Fehlkonzepte auch entstehen können, wenn altes und neues Wissen konsistent sind und keine Defizite im Bereich der Metakognition bezüglich der Konsistenzprüfung des Wissens vorliegen. Das Fehlkonzept ergibt sich aus der aktiven und (aus der Perspektive des Lernenden) erfolgreichen Konstruktion kohärenten Wissens.

Vosniadou, Ioannides, Dimitrakopoulou und Papademetriou (2001) weisen darauf hin, dass Fehlkonzepte unter Umständen über Jahre hinweg durch die Erfahrung bestätigt werden, wodurch auch die betreffenden allgemeinen Rahmentheorien tief verwurzelt sind, sodass ein Conceptual Change in diesem Fall nur graduell erfolgen wird.

1.3 Förderung des Conceptual Change

1.3.1 Vorbemerkung

Wie im Abschnitt 1.1.3 erwähnt, weist die erweiterte Theorie des Conceptual Change eine multidimensionale Perspektive aus. In Abhängigkeit von der jeweiligen Perspektive ergeben sich somit unterschiedliche Ansätze, wie eine „conceptual *reconstruction*“ gefördert werden kann. Mögliche Maßnahmen und Hinweise zur Einschätzung, ob ein Conceptual Change stattgefunden hat, werden im folgenden Abschnitt beschrieben. Ein Anspruch auf Vollständigkeit wird hierbei nicht erhoben.

1.3.2 Maßnahmen zur Förderung

Aus der epistemologischen Perspektive der Theorie von Posner et al. (1982) sind zwei Maßnahmen zur Förderung eines Conceptual Change zentral:

- zum einen der Einsatz von Anomalien und
- zum anderen die Berücksichtigung der epistemologischen und metaphysischen Überzeugungen des Lernenden.

In Bezug auf den Einsatz von Anomalien weisen Strike und Posner (1982, S. 239) darauf hin, dass die ausgewählten oder konstruierten Anomalien für den Lernenden einfach zu begreifen sein und im Widerspruch zu den bisherigen Erfahrungen stehen müssen. Zu beachten ist, dass Anomalien, die historisch bedeutsam sind, diese Anforderung nicht zwangsläufig erfüllen. Neben Anomalien sollten auch sorgfältig ausgewählte Modelle, prototypische Beispiele und Analogien eingesetzt werden, um die Verständlichkeit und Plausibilität einer neuen Vorstellung zu erhöhen.

Hinsichtlich der in der Theorie von Posner et al. (1982) beschriebenen externalen Variable der „Lernsituation“ werden von Strike und Posner (1982) sowohl Vorträge durch die Lehrkraft als auch vom Lernenden zu bearbeitende Aufgaben und durchzuführende Versuche als geeignet dafür angesehen, dass sich Anomalien ergeben und beim Lernenden zu einem kognitiven Konflikt führen. Der Lehrperson kommt in Bezug auf das Präsentieren von Informationen, die Klärung der Vorstellungen des Lernenden sowie die Vorbildfunktion für wissenschaftliche Denkweisen eine besondere Rolle zu. Außerdem wird es als förderlich angesehen, wenn sich die Lehrperson im Sinne eines sokratischen Widersachers verhält, was die Konzepte des Lernenden, Inkonsistenzen in der Vorstellung und zu voreilige Verallgemeinerungen durch den Lernenden betrifft.

Die kognitive Entwicklung wird von Vygotsky (1964) unter einem entwicklungspsychologischen Aspekt „als ein Hineinwachsen in eine bestimmte Kultur gesehen“ (Schnotz, 2006, S. 77). Vygotsky (1964) unterscheidet dabei zwischen Konzepten, die im Alltag erworben werden und sich auf die konkrete Erfahrungswelt beziehen, sogenannten „naiven Konzepten“, und Konzepten, die in der Schule vermittelt werden, sogenannten „wissenschaftlichen Konzepten“. Schnotz (2006, S. 77) weist darauf hin, dass diese beiden Arten von Konzepten zu „qualitativ unterschiedlichen Begriffssystemen“ gehören. So sind die naiven Konzepte des Lernenden „nicht in ein kohärentes System eingebunden“, wohingegen die wissenschaftlichen Konzepte zwar Systeme bilden, die kohärent sind, jedoch keinen hinreichenden Bezug zur Erfahrungswelt des Lernenden aufweisen. Demzufolge ist es wichtig, das Zusammenwachsen der beiden unterschiedlichen Begriffssysteme zu fördern, indem der Lernende dazu angeregt

wird, zum einen die „spontan gebildeten Alltagskonzepte in ein kohärentes System von Relationen“ einzubinden und zum anderen „die in der Schule vermittelten Konzepte auf seine Alltagserfahrungen“ zu beziehen (Schnotz, 2006, S. 78).

Di Sessa (1988) geht unter einem kognitionspsychologischen Aspekt davon aus, dass sich Alltagswissen aus isolierten Bruchstücken zusammensetzt (vgl. Abschnitt 1.1.3). Die Bruchstücke, aus denen dieses intuitive Wissen besteht, werden „als phänomenologische Prinzipien“, kurz „p-prims“, bezeichnet (Schnotz, 2006, S. 78). Beschreiben lassen sich die „p-prims“ als kognitive Schemata, welche dazu dienen, Beobachtungen „oberflächlich“ zu interpretieren. Diese kognitiven Schemata sind nur sehr schlecht eingebunden „in komplexere konzeptuelle Strukturen“ (Schnotz, 2006, S. 78). Zur Unterstützung der Rekonstruktion von Vorstellungen ist es also nötig, „die mentale Kohärenzbildung“ (Krüger, 2007, S. 88) anzuregen, sodass die „p-prims“ eine kohärente Theorie bilden. Als geeignete Maßnahme wird das Erzeugen eines kognitiven Konflikts angesehen. Allerdings ist zu beachten, dass der Lernende nur dann einen Widerspruch erlebt, wenn er „zwischen Beobachtungen und theoretischen Annahmen differenzieren kann“ (Krüger, 2007, S. 88). Ist dies nicht der Fall, so besteht die Gefahr, dass zusätzliches inkohärentes Wissen aufgebaut wird. Werden, wie von di Sessa (1988), Defizite in der Metakognition für die geringe Kohärenz des Alltagswissens verantwortlich gemacht, dann muss der Lernende dazu angeregt werden, „zwischen theoretischen Annahmen und empirischen Beobachtungen zu differenzieren“ (Krüger, 2007, S. 89). Gleiches gilt, wenn beim Lernenden keine ausreichende „Einsicht in den epistemologischen Status des bisherigen Wissens besteht“, also das Bewusstsein dafür fehlt, dass das eigene Wissen auf hypothesenartigen Vorannahmen beruht, welche sich als falsch herausstellen können (Krüger, 2007, S. 88 f.; Chinn & Brewer, 1993).

Von Vosniadou und Brewer (1992) wird, wie bereits beschrieben, ebenfalls unter einem kognitionspsychologischen Aspekt zwischen zwei „fundamentally contradictory systems“ unterschieden: „beliefs and presuppositions“. Wird davon ausgegangen, dass nicht zutreffende „presuppositions“, also inadäquate Rahmentheorien, das Lernen beeinflussen, so ist es empfehlenswert, dem Lernenden die betreffenden ontologischen und epistemologischen Überzeugungen, aus denen sich die inadäquaten Rahmentheorien zusammensetzen, bewusst zu machen (Krüger, 2007).

Caravita und Halldén (1994) heben unter einem sozialkonstruktivistischen Aspekt die adäquate Kontextualisierung von Wissensstrukturen hervor, wobei das Ziel des Conceptual Change darin gesehen wird, in einem Prozess der Enkulturation die Veränderung der Situiertheit des Wissens zu erreichen (vgl. Abschnitt 1.1.3). In diesem Fall muss der Lernende erstens dazu angeregt werden, zwischen verschiedenen Zusammenhängen, beispielsweise fachlichen und alltäglichen, zu unterscheiden, und zweitens darin unterstützt werden, „zu erkennen, in welchen Kontexten welches Wissen sinnvoll angewandt werden kann“ (Krüger, 2007, S. 89). Schnotz (2006, S. 80) betont, dass vorhandenes Wissen „träge“ bleibt, wenn es nicht kontextuell eingebunden wird, und vergleicht dieses Wissen unter Bezug auf Collins, Brown und Newman (1989) mit einem „Werkzeug, das man zwar besitzt, mit dem man jedoch nicht umgehen kann“.

Hinsichtlich der externalen Variable der Lehr-Lern-Situation wird es von Caravita (2001) als förderlich angesehen, dass bedeutungsvolle Situationen gewählt werden, in denen metakognitive Fähigkeiten des Lernenden leichter zum Vorschein kommen und auch in die Tat umgesetzt werden können. Caravita (2001, S. 427) weist zudem darauf hin, dass es wichtig ist, dass der Lernende von der Lehrperson nicht unter Zeitdruck gesetzt wird, da sonst die Gefahr besteht, dass vom Lernenden verzweifelt versucht wird, die alten Vorstellungen aufrecht zu erhalten, oder vorschnell Konzepte entwickelt werden, an die nicht wirklich geglaubt wird. Als unterstützende Maßnahme zum Einsatz von Analogien können sich externale Repräsentationen und Computersimulationen anbieten. Durch diese lässt sich unter Umständen

visualisieren, was sich sonst nur in Gedanken abspielen kann. Caravita merkt jedoch an, dass, wie im Fall von Analogien, Vorsicht angebracht ist. So besteht beim Einsatz von externalen Repräsentationen die Gefahr der Vergegenständlichung, wohingegen beim Einsatz von Computersimulationen die durch das Programmdesign vorgegebene Beschränkung auf bestimmte Arten von Ereignissen und Alternativen zu berücksichtigen ist.

Bezüglich der Rolle der Lehrperson wird es als förderlich angesehen, wenn dem Lernenden einerseits Selbstkontrolle und Autonomie überlassen, andererseits aber auch Unterstützung gegeben wird, indem beispielsweise im Diskurs mit anderen Lernenden auftretende Wörter und Definitionen als zutreffend bestätigt werden.

Die soziale Aktivität spielt in zweierlei Hinsicht eine wichtige Rolle: Zum einen dient der Diskurs dem Austausch von Vorstellungen und Gedankengängen und zum anderen wird durch die Teilnahme am Diskurs das Vertrauen dafür geschaffen, eigene Vorstellungen auszudrücken und zu artikulieren und auf die Vorstellungen anderer einzugehen (Caravita, 2001, S. 426).

Unter einem motivationspsychologischen Aspekt ist auch der Einfluss von affektiven Widerständen zu berücksichtigen (Schnotz, 2006, S. 80). Die Aufgabe von vorhandenem Wissen, welches erfolgreich zur Orientierung verwendet werden konnte, ist „mit einem Verlust an subjektiver Sicherheit verbunden“. Schnotz (2006, S. 80 f.) hebt daher unter Verweis auf Pintrich et al. (1993) folgende Maßnahmen zur Förderung der Wissensveränderung hervor:

- erstens das Schaffen einer motivationalen Zielorientierung, bei der nicht die Konkurrenz mit anderen Lernenden vordergründig ist, sondern der Erwerb von Kompetenzen,
- zweitens das Erwecken eines hohen Interesses am Lerngegenstand beim Lernenden,
- drittens das Überzeugen des Lernenden von der Wirksamkeit der eigenen Lernstrategien,
- viertens das Schaffen eines kooperativen und ermutigenden Lernklimas und
- fünftens den Einsatz eines Lernkontextes, der dem Lernenden als herausfordernd, authentisch und persönlich bedeutsam erscheint.

Von Schnotz (2006, S. 81) und Krüger (2007, S. 89 f.) wird *zusammengefasst*, welche Faktoren als besonders förderlich für einen Conceptual Change beim Lernenden angesehen werden können. Dies sind:

- erstens, in Bezug auf die externalen Variablen und den emotionalen Filter: die *Situierung des Wissenserwerbs in einer Lernkultur*, die ermutigend wirkt, den kooperativen Kompetenzerwerb in den Vordergrund stellt und die „Überzeugung von der Kontrollierbarkeit des eigenen Wissenserwerbs bestärkt“ (Schnotz, 2006, S. 81).
- Zweitens, hinsichtlich der externalen Variablen und des kognitiven Filters: *konstruktivistische Lernbedingungen* und die Konfrontation mit unterschiedlichen Anforderungen in Kontexten, die eine hinreichende Variabilität, Authentizität und persönliche Bedeutsamkeit aufweisen.
- Drittens, bezogen auf „Unzufriedenheit“ und „Verständlichkeit“ als Bedingungen für einen Conceptual Change: die *richtige Dosierung des Einsatzes kognitiver Konflikte* sowie die Abstimmung auf die vorliegenden Lernvoraussetzungen.
- Viertens, den kognitiven Filter und „Plausibilität“ als Bedingung für einen Conceptual Change betreffend: die *explizite Thematisierung der bisherigen Sichtweisen* durch die Reflexion und gegebenenfalls neue Interpretation der dazugehörigen Erfahrungsgrundlage, sodass Wissensstrukturen ohne die Einschränkung durch inadäquate Rahmentheorien konstruiert werden können.

- Und fünftens, im Hinblick auf „Fruchtbarkeit“ als Bedingung für einen Conceptual Change: die *Betrachtung des erworbenen Wissens als Werkzeug*, dessen Anwendung sich in Bezug auf den jeweiligen Kontext bewähren muss.

Bei der Einschätzung, ob ein Conceptual Change stattgefunden hat, ist insbesondere zu unterscheiden, ob zutreffende sprachliche Redewendungen des Lernenden nur auf eine Imitation der Formulierungen anderer zurückzuführen sind, oder ob es sich um verbale Konstruktionen handelt, die auf einer zunehmend größeren Konsistenz des Denkens und einer besseren Organisation der Vorstellungen beruhen (Caravita, 2001). Darüber hinaus ist Vorsicht geboten, wenn aus verbalen Äußerungen Rückschlüsse auf die Vorstellungen oder die Veränderung von Vorstellungen des Lernenden gezogen werden. Es besteht die Gefahr, dass einzelne Formulierungen überbewertet oder Argumente überinterpretiert werden. Zudem wird von Caravita (2001, S. 426) angemerkt, dass sprachliche Redewendungen oft irreführend sind, wenn sie entweder sehr schlecht oder sehr gut artikuliert sind, da sie in beiden Fällen den Grad des tatsächlich erlangten Verständnisses leicht verschleiern. Duit und Treagust (2003, S. 678) weisen auf die Möglichkeit hin, dass ein scheinbarer Conceptual Change unter Umständen einfach nur ein anderer Weg der Beschreibung einer Vorstellung auf der Grundlage eines gegebenen Kontextes ist. Von Duit und Treagust wird hierfür der Begriff der „context-driven choices“ verwendet.

1.3.3 Ausblick

Das Hauptaugenmerk der Theorie des Conceptual Change wird von Caravita (2001, S. 428) darin gesehen, den Vorgang des Konzeptwechsels einzufangen und zu modellieren. Für Caravita liegt dem Anschein nach ein Wechselspiel zwischen evolutionären und revolutionären Aspekten vor, die nahezu untrennbar miteinander verbunden und vom Inhalt und Kontext abhängig sind. Der kognitive Konflikt, welcher als eine der zentralen Bedingungen für einen Conceptual Change angesehen wird, ist abhängig von vielen psychologischen und personalen Einflüssen, die durch den Eingriff der Instruktion im Klassenzimmer nur zum Teil angegangen und kontrolliert werden können. Caravita weist darauf hin, dass die Unterrichtsforschung keine Patentrezepte zur Förderung der Wissensveränderung geben kann, sondern nur Hilfestellungen, die das Erkennen einer Art Muster in bestimmten Situationen und die Auswahl geeigneter Werkzeuge für zumindest einen Teil der Lernenden ermöglichen.

1.4 Übertragen der Theorie des Conceptual Change

1.4.1 Allgemeines

Für Schnotz (2006, S. 82) ist die Untersuchung „der Veränderung vorhandenen Wissens [...] sowohl unter praktischem wie unter theoretischem Gesichtspunkt von hoher Bedeutung“. Dies betrifft neben den Prozessen der kognitiven Entwicklung auch die Beschreibung des Lehr-Lern-Prozesses. Schnotz (2006, S. 82) betont in diesem Zusammenhang die Bedeutung „einer interdisziplinären Zusammenarbeit [...], bei der Kognitionsforschung, Entwicklungspsychologie, Instruktionspsychologie und die verschiedenen Fachdidaktiken miteinander kooperieren“. Rowlands et al. (2007, S. 21) heben hervor, dass sich die Domäne des Conceptual

Change gegenwärtig von den Naturwissenschaften auf andere Fachgebiete ausdehnt, wie die Religionslehre – allerdings weniger auf die Mathematik. Ein möglicher Grund kann sein, dass ein Übertragen auf eine Wissenschaft mit größtenteils „konservativen Revolutionen“ (vorhandene Vorstellungen gehen in neuen Vorstellungen auf) als nicht genügend Erfolg versprechend angesehen wird. Beispielhaft für das Ausdehnen der Domäne des Conceptual Change auf das „Lernen und Lehren von Mathematik“ lässt sich auf Vamvakoussi und Vosniadou (2002) verweisen.

1.4.2 Übertragen auf das „Lernen und Lehren von Mathematik“

Von Tirosh und Tsamir (2004) wird die Frage gestellt, inwiefern die Theorie des Conceptual Change auf das „Lernen und Lehren von Mathematik“ übertragbar ist. Zur Beantwortung dieser Frage sollten insbesondere zwei Kriterien zur Evaluation von Modellen und Theorien in der mathematischen Ausbildung überprüft werden (vgl. Tirosh & Tsamir, 2004, S. 535; Schoenfeld, 2002):

- zum einen die Erklärungsleistung und
- zum anderen die Vorhersageleistung.

Bezüglich der Erklärungsleistung wird von Tirosh und Tsamir (2004, S. 536) festgestellt, dass die Theorie des Conceptual Change eine Erklärung für die Entwicklung des Verständnisses der Schülerinnen und Schüler von mathematischen Konzepten und der geläufigen Schwierigkeiten, denen sie beim Lernen begegnen, geben könnte. So ist unter anderem durch Vlassis (2004), Merenluoto und Lehtinen (2004) sowie van Dooren, de Bock, Hessels, Janssens und Verschaffel (2004) belegt, dass das Vorwissen von Schülerinnen und Schülern oftmals nicht kompatibel ist mit anzueignenden zentralen mathematischen Notationen (im Sinne von Symbolen, Begriffen und Verfahren), dass sich diese „presuppositions“ auf das Verständnis der betreffenden Notationen negativ auswirken, dass sich das Verständnis dieser Notationen zumeist nur langsam und in Form eines graduellen Prozesses entwickelt und dass die Aneignung der Notationen einhergeht mit der Erschaffung von synthetischen Modellen, welche sich aus den Versuchen der Assimilation der neuen Informationen auf der Grundlage des bereits vorhandenen Wissens entwickeln.

Was die Vorhersageleistung anbelangt, so sehen es Tirosh und Tsamir (2004, S. 537) als möglich an, viele Erkenntnisse in der mathematischen Ausbildung im Licht der Theorie des Conceptual Change zu analysieren, in dem Versuch, verschiedene synthetische Modelle und unterschiedliche Stufen der kognitiven Anpassung (beispielsweise Bereicherung im Gegensatz zum radikalen Wechsel) zu definieren. Vom Ansatz der Theorie des Conceptual Change ausgehend, erscheinen folgende Vorhersagen als denkbar: zum einen die Vorhersage von Fällen, in denen bereits vorhandenes Wissen wahrscheinlich die Entwicklung des Verständnisses einer mathematischen Notation einschränkt, und zum anderen die Vorhersage, dass wahrscheinlich eine radikale Reorganisation existierender Wissensstrukturen erforderlich ist und dass dabei synthetische Modelle gegenwärtig sein werden. Dies trifft auf Domänen der Mathematik zu, in denen eine Art des logischen Denkens erforderlich ist, die sich qualitativ von den in der Mathematik gemeinhin verwendeten Arten des logischen Denkens unterscheidet. Von Tirosh und Tsamir (2004) wird diesbezüglich das Stichwort „Wahrscheinlichkeit“ genannt. Es lässt sich vermuten, dass der Bereich der Stochastik nicht nur aufgrund der dort vorherrschenden nicht-deterministischen Betrachtungsweisen aufgeführt wird, sondern auch deswegen, da dort das Aufbauen von fachwissenschaftlichen Vorstellungen anhand der Rekonstruktion vorhandener (Alltags-)Vorstellungen der Lernenden eine zentrale Rolle einnimmt (vgl. Abschnitt 1.1.1). Zudem ist in diesem Bereich der Mathematik oftmals ein Zugang über Experimente oder Simulationen möglich.

Für Vosniadou und Verschaffel (2004, S. 445) stellt der Ansatz des Conceptual Change eine fruchtbare Komponente einer Theorie des mathematischen Lernens und Lehrens dar. Hinzugefügt wird, dass sich das Lernen in Form des Conceptual Change ganz allgemein von anderen Arten des Lernens unterscheidet, indem ein Conceptual Change nicht allein durch das additive Hinzufügen von Wissen erreicht werden kann, sondern dass dazu unterschiedliche Mechanismen beherrscht und unterschiedliche instruktive Eingriffe gelehrt werden müssen. Im Bereich der Mathematik kann die Berücksichtigung des Aspekts des Conceptual Change dazu dienen, Lernenden, die über metakognitive Strategien verfügen und lernwillig sind, dabei zu helfen, die durch das bereits vorhandene Wissen auferlegten Barrieren zu überwinden. Zudem kann der Ansatz des Conceptual Change dabei behilflich sein, mathematische Konzepte zu identifizieren, die Lernenden im Allgemeinen große Schwierigkeiten bereiten, und systematische Fehler und Fehlkonzepte von Lernenden vorherzusagen und zu erklären (Vosniadou & Verschaffel, 2004).

Tirosh und Tsamir (2004, S. 539) weisen darauf hin, dass bei der Anwendung der Theorie des Conceptual Change in der Mathematik Unterschiede zu den Naturwissenschaften berücksichtigt werden sollten. So ist es in der Mathematik im Gegensatz zu den Naturwissenschaften üblich, dass niedere Hierarchiestufen im Konstruktionsprozess nicht aufgegeben und ersetzt werden, sondern, um ein Ganzes zu formen, integriert werden zu größeren Begriffsbildungen. Zudem ist die dabei erforderliche „conceptual *reorganisation*“ besonders anspruchsvoll. Diesbezüglich wird von Tirosh und Tsamir (2004) auf Merenluoto und Lehtinen (2004) verwiesen.

Unter Bezug auf van Dooren et al. (2004) fügen Tirosh und Tsamir (2004) hinzu, dass die bei den Schülerinnen und Schülern im mathematischen Bereich bereits vorhandene Wissensgrundlage nicht nur durch vorschulische und außerschulische Erfahrungen bestimmt wird, sondern dass zum Teil auch in früheren Schuljahren formell erworbene Elemente des mathematischen Wissens in späteren Schuljahren eine wesentliche Veränderung erfahren.

Tirosh und Tsamir (2004, S. 539) merken unter Verweis auf Vlassis (2004) zudem an, dass eine mögliche Ursache für Unterschiede beim Conceptual Change in der Mathematik und in den Naturwissenschaften in der immateriellen Natur mathematischer Objekte begründet liegt. So ist in der Mathematik neben dem Einfluss von Alltagsvorstellungen auch eine mechanische Verwendung von Symbolen, welche aus der fehlenden Verallgemeinerung dieser Symbole resultiert, ein möglicher Grund dafür, dass der Aufbau wissenschaftlicher Vorstellungen behindert wird. Zusammenfassend wird festgehalten, dass das Übertragen der Theorie des Conceptual Change auf das „Lernen und Lehren von Mathematik“ zu einer einflussreichen Elaboration der Theorie des Conceptual Change führen kann.

Im weiteren Verlauf wird die Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens bei Schülerinnen und Schülern im Bereich der Sekundarstufe I unter dem Aspekt des Conceptual Change, so wie er in Abbildung 1.1 theoretisch dargestellt ist, untersucht, wobei zunächst das probabilistische Denken an sich im Mittelpunkt der Betrachtung steht.

Kapitel 2

Probabilistisches Denken

Einleitend wird der Begriff „probability“ thematisiert.

Im Anschluss daran wird anhand von klassischen Problemen des Denkens in Wahrscheinlichkeiten ein kurzer Abriss zur Entwicklungsgeschichte probabilistischer Denkweisen sowie ein Überblick zu verschiedenen Interpretationen von Wahrscheinlichkeit gegeben.

2.1 Probability (engl.)

2.1.1 Begriffsbestimmung

Auf der Suche nach der ursprünglichen Bedeutung des englischen Begriffs „probability“ lassen sich die beiden nachfolgend aufgeführten Erklärungen finden. Das zum Substantiv „probability“ gehörende Adjektiv „probable“ kommt laut Jeffrey (1992, S. 54 f.) aus dem Lateinischen, von *probabilis*, und bedeutete bis zur Mitte des 17. Jahrhunderts *genehmigungsfähig* und wurde in diesem Sinne unmissverständlich für Meinung und Tat verwendet. Eine genehmigungsfähige Tat oder eine genehmigungsfähige Meinung war eine solche, wie vernünftige Leute sie unter allen Umständen begehen oder vertreten würden. Der Begriff „probability“ selbst leitet sich gemäß Gigerenzer (2004, S. 11) vom lateinischen „probabilitas“ ab, dessen ursprüngliche Bedeutung „eine durch Autorität gesicherte Meinung“ war. Die deutsche Übersetzung des englischen Begriffs „probability“ wird von Langenscheidt Collins mit „Wahrscheinlichkeit“ angegeben. „Probabilistisches Denken“ bezeichnet also das Denken in Wahrscheinlichkeiten. Scholz (1986, S. 69) weist darauf hin, „dass es nicht den Wahrscheinlichkeitsbegriff gibt, sondern bekanntlich eine Vielzahl von Facetten, Komponenten oder Präkonzepten dieses Begriffs“.

2.1.2 Repräsentationsformate

Rasfeld (2004, S. 34) führt folgende Umschreibungen von Wahrscheinlichkeiten im Alltag auf, welche den Grad der Unsicherheit im Denken bezüglich Meinungsbildungen und Entscheidungen ausdrücken: „auf gut Glück, (kein) Glück haben, auf Nummer sicher gehen, aufs Geratewohl, aufs Spiel setzen, Chance, chancenlos, durchaus möglich, höchst (un)wahrscheinlich, Schicksal, so gut wie sicher, wie der Zufall so will“. Diese und andere verbale Umschreibungen von Wahrscheinlichkeiten werden von Krauss (2003, S. 4) als „nicht-numerische Repräsentationsformate“ bezeichnet.

An „numerischen Repräsentationsformaten“ für die Darstellung von Wahrscheinlichkeiten unterscheidet Krauss (2003, S. 4)

- Prozente (z. B. 30%),
- Dezimalzahlen (z. B. 0,3),
- Brüche bzw. relative Häufigkeiten (z. B. 3/10),
- absolute Häufigkeiten (z. B. 3 von 10) und
- Chancen-Verhältnisse (z. B. 3 : 7).

Büchter und Henn (2007, S. 167) beschreiben den Zusammenhang zwischen numerischen und nicht-numerischen Repräsentationsformaten wie folgt: „Im Alltagsgebrauch sagt man ‚ich bin hundertprozentig sicher‘, wenn man keine Zweifel hat. Ist man sich dagegen sicher, dass etwas *nicht* eintritt, dann beziffert man die zugehörige Chance mit Null Prozent. Sprechweisen wie ‚ich bin tausendprozentig sicher‘ sind als rhetorische Übertreibung zu verstehen.“

Eng verknüpft mit dem Begriff der Wahrscheinlichkeit ist der Begriff des Zufalls. Ausgehend vom alltäglichen Sprachgebrauch könnte sich dieser Begriff auf „das, was einem zuteil wird“ (im Sinne von „es *fällt* einem *zu*“), oder auf ein „unerwartetes gleichzeitiges Auftreten von Dingen“ (im Sinne des „nicht-kausalen *Zu*sammen*fall*ens“) zurückführen lassen. Für Engel und Sedlmeier (2005, S. 176) bedeutet „Zufall“, dass es in einer gegebenen Situation mehr als nur ein mögliches Ergebnis gibt, dass das tatsächlich eintretende Ergebnis nicht sicher vor-

hersagbar ist, dass – zumindest in der Vorstellung – die Möglichkeit besteht, den Vorgang mehrfach zu wiederholen, und dass die Folge der durch Wiederholung erhaltenen Resultate keine Muster besitzt, die sich kontrollieren oder vorhersagen lassen.

In den folgenden Abschnitten wird, ausgehend von der Entstehung der Wahrscheinlichkeitstheorie und unter Bezug auf sogenannte klassische Probleme, ein kurzer Überblick zur Entwicklungsgeschichte probabilistischer Denkweisen – also zur historischen Entwicklung von Betrachtungsweisen, die für das Denken in Wahrscheinlichkeiten charakteristisch sind – gegeben. Ein Anspruch auf Vollständigkeit wird hierbei nicht erhoben.

Die Grundlage für die folgenden Betrachtungen bildet die Annahme von Strike und Posner (1982, S. 236 f.), dass der Lernende und der Wissenschaftler ein gemeinsames „Problem“ haben. Beide verfügen über ein Repertoire an Vorstellungen. Wenn der Lernende ein neues Konzept aufnehmen oder der Wissenschaftler annehmen soll, dann ist es nötig, dass ein rationaler Weg gesehen wird, der von den gegenwärtigen zu den neuen Vorstellungen führt. Der Lernende und der Wissenschaftler müssen erkennen, dass ein Wechsel einer Vorstellung oder mehrerer Vorstellungen erforderlich ist und dass dieser Wechsel unter der Evidenz und dem verbleibenden Vorrat an Vorstellungen gerechtfertigt ist. Für Strike und Posner können aus der historischen Entwicklung von charakteristischen fachwissenschaftlichen Betrachtungsweisen Hypothesen bezüglich der Vorstellungen, die in den Conceptual Change eines Lernenden involviert sind, abgeleitet werden.

2.2 Entwicklungsgeschichte probabilistischer Denkweisen

2.2.1 Ursprung des Denkens in Wahrscheinlichkeiten

Die Geburt der „mathematischen Theorie der Wahrscheinlichkeit“ wird von Gigerenzer (2004, S. 2) auf das Jahr 1654 datiert und geht auf einen Briefwechsel zwischen den beiden bedeutenden französischen Mathematikern Pierre de Fermat (1601-1665) und Blaise Pascal (1623-1662) zurück.

Gegenstand der Betrachtung waren neben einer Reihe ähnlicher Probleme die sogenannten Würfelprobleme[1] des französischen Adligen Antoine Gombault Chevalier de Méré (1607-1684). Dieser gilt wie viele Adlige zu seiner Zeit als ein begeisterter Glücksspieler. Gigerenzer (2004, S. 2) beschreibt das erste der beiden Würfelspiele, die der Chevalier de Méré seinen Mitspielern anbot, wie folgt:

> „Wir werfen einen Würfel viermal. Wenn dabei eine oder mehrere Sechsen sind, gewinne ich. Wenn keine Sechs dabei ist, gewinnen Sie.“

Nach der Erfahrung des Chevalier de Méré konnte man darauf erfolgreich wetten. Das zweite der beiden Würfelspiele, die der Chevalier de Méré seinen Mitspielern anbot, war eine Wei-

[1] Erwähnenswert ist, dass Spielwürfel in der Alltagssprache zumeist einfach als „Würfel“ bezeichnet werden; die am weitesten verbreitete Art ist (idealisiert) ein Hexaeder. Ausgehend vom Begriff für den stochastischen Körper wurde die Bezeichnung „Würfel“ für den geometrischen Körper Hexaeder im Deutschen übernommen – im Englischen ist für den stochastischen Körper „dice“ oder „die“ gebräuchlich, für den geometrischen Körper hingegen „cube“. Im Deutschen ergibt sich dadurch die Problematik, dass bei Spielen verwendete „Würfel“ (im stochastischen Sinne) geometrisch gesehen oftmals gar keine „Würfel“ sind, beispielsweise aufgrund von abgerundeten Ecken.

terentwicklung des ersten Würfelspiels und wird von Gigerenzer (2004, S. 2) wie folgt beschrieben:

> „Wir werfen ein Paar von Würfeln 24 Mal. Wenn dabei eine Doppel-Sechs oder mehrere sind, gewinne ich. Wenn keine Doppel-Sechs dabei ist, gewinnen Sie."

Wie bereits erwähnt, wusste der Chevalier de Méré aus seiner Erfahrung, dass das erste der beiden Würfelspiele, also darauf zu wetten, dass in einer Serie von vier Würfen mindestens eine Sechs auftritt, für ihn von Vorteil war. Bei seinen theoretischen Überlegungen bezüglich seiner „Chance" ging der Chevalier de Méré von der Regel „günstige Ausgänge/mögliche Ausgänge" aus. Beim ersten der beiden Würfelspiele kam der Chevalier de Méré aufgrund seiner Regel zu der Überzeugung[2]: „Es ist von Vorteil, auf das Eintreten mindestens einer ‚Sechs' in vier Würfen zu setzen: Günstige = 4, mögliche = 6, daher beträgt die ‚Chance' 4/6" (Bentz & Borovcnik, 1991, S. 2). Gigerenzer (2004, S. 2) beschreibt, wie die sich daran anschließenden Überlegungen des Chevalier de Méré ausgesehen haben könnten: „Eine Doppel-Sechs ist aber 6-mal so selten wie eine einfache Sechs. Daraus schloss er [Anmerkung: der Chevalier de Méré], dass es von Vorteil ist, darauf zu wetten, dass er mindestens eine Doppel-Sechs in 24 (also 6 mal 4) Würfen erhält." Der Chevalier de Méré machte jedoch (empirisch) die Erfahrung, dass er hierauf nicht erfolgreich wetten konnte. Der kognitive Konflikt, in dem sich der Chevalier de Méré befand, wird von Gigerenzer (2004, S. 2) umschrieben mit: „War er glücklos, obgleich er richtig dachte, oder war er glücklos, weil er falsch dachte?"

Die Erfahrung des Chevalier de Méré widersprach also seiner Intuition, sodass er sich an die beiden berühmten Mathematiker Pierre de Fermat und Blaise Pascal wandte. Die von ihnen durchgeführte Analyse ergab in heutiger Terminologie dargestellt folgende Erklärungen für die Würfelspielbeobachtungen des Chevalier de Méré (vgl. Gigerenzer, 2004, S. 2 f.):

> Bei einem fairen Würfel ist die Wahrscheinlichkeit für jede der sechs Augenzahlen bei jedem Wurf gleich groß. Die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs bei einem Wurf ist daher 1/6 und für keine Sechs folglich 5/6. In einer Serie von vier Würfen ist die Wahrscheinlichkeit für keine Sechs $(5/6)\cdot(5/6)\cdot(5/6)\cdot(5/6)$, also ungefähr 48,2%, womit sich für die Wahrscheinlichkeit für mindestens eine Sechs beim viermaligen Werfen eines Würfels 51,8% ergibt. Die Wahrscheinlichkeit für eine Doppel-Sechs bei einem Wurf mit einem Paar von Würfeln ist 1/36 und für keine Doppel-Sechs folglich 35/36. In einer Serie von 24 Würfen ist die Wahrscheinlichkeit für keine Doppel-Sechs $(35/36)^{24}$, also ungefähr 50,9%, womit sich für die Wahrscheinlichkeit für mindestens eine Doppel-Sechs in einer Serie von 24 Würfen 49,1% ergibt.

Seine Erfahrung hatte den Chevalier de Méré also bei keinem der beiden Würfelspiele getäuscht. Falsch war das direkt proportionale Denken. Trotzdem war der Chevalier de Méré „unzufrieden mit den Lösungen; aber nicht deshalb, weil sie zu anspruchsvolle Mathematik beinhalteten, sondern einfach, weil sie seiner Intuition widersprachen" (Krauss, 2003, S. 2) und er, bezogen auf die Theorie des Conceptual Change, noch nicht von der Plausibilität der neuen Erklärung überzeugt war. Gemäß Krauss (2003, S. 2) wurden „Aufgaben, deren richtige Lösungen sich dem gesunden Menschenverstand entgegenzusetzen schienen, [...] in der Folgezeit *Paradoxa* genannt".

Pierre de Fermat und Blaise Pascal waren dagegen, so Gigerenzer (2004, S. 3), vom „Widerspruch zwischen genauer Erfahrung und falscher Intuition" inspiriert, „die Gesetze der Wahrscheinlichkeit zu suchen und zu finden". Für Bentz und Borovcnik (1991, S. 2) haben Pierre de Fermat und Blaise Pascal „eine gute Vorstellung von der Menge aller möglichen Ausgänge eines Zufallsexperimentes entwickelt, auch wenn sie nicht eine explizite Definition von Wahrscheinlichkeit" angegeben haben. Die aus drei Gesetzen bestehende mathematische Theorie der Wahrscheinlichkeit von Pierre de Fermat und Blaise Pascal lässt sich in heutiger Terminologie dargestellt wie folgt formulieren (vgl. Gigerenzer, 2004, S. 3):

---

[2]Gewürfelt werden kann eine Eins, eine Zwei, eine Drei, eine Vier, eine Fünf oder eine Sechs, womit sich für den Chevalier de Méré ergibt: mögliche Ausgänge = 6. Aus Sicht des Chevalier de Méré kann eine Sechs beim ersten, zweiten, dritten oder vierten Wurf gewürfelt werden, woraus für ihn folgt: günstige Ausgänge = 4.

- Erstens: Die Wahrscheinlichkeit eines unmöglichen Ereignisses ist 0, jene eines sicheren Ereignisses ist 1.
- Zweitens: Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Ereignisse ist 1.
- Drittens: Wenn die Ereignisse *A* und *B* unabhängig sind, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass *A* und *B* eintreten, gleich dem Produkt der individuellen Wahrscheinlichkeiten.

Gigerenzer (2004, S. 3) bezeichnet die Entwicklung des Denkens in Wahrscheinlichkeiten als „Teil einer großen intellektuellen Revolution: die Aufgabe des Ideals des sicheren Wissens und die Entwicklung von Formen des rationalen Umgangs mit einer unsicheren Welt“. Das Konzept der mathematischen Wahrscheinlichkeit ist somit, „anders als die meisten großen Ideen, die bereits in der griechischen Antike entwickelt worden sind, [...] eine ungewöhnlich späte Entdeckung“ (Gigerenzer, 2004, S. 2), auch wenn es bereits „von der griechischen Antike bis zur Renaissance gelegentliche Auseinandersetzungen unter Gelehrten über Zufall und Wahrscheinlichkeit, insbesondere zu Fragen des Glücksspiels“ (Büchter & Henn, 2007, S. 8), gegeben hatte.

2.2.2 Klassische Probleme des Denkens in Wahrscheinlichkeiten

Neben den beiden im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen Würfelproblemen wird von Büchter und Henn (2007, S. 6) noch ein drittes Würfelproblem des französischen Adligen Antoine Gombault Chevalier de Méré als klassisches Problem des Denkens in Wahrscheinlichkeiten aufgeführt:

> „Warum kommt die Augensumme 11 beim Würfeln mit drei Würfeln häufiger vor als die Augensumme 12?“

Nach der Auffassung des Chevalier de Méré sollte es für beide Augensummen genau sechs Möglichkeiten geben, womit die beiden Augensummen beim Würfeln mit drei Würfeln gleich häufig vorkommen müssten. Die Annahme von jeweils sechs Möglichkeiten für die Augensumme 11 und die Augensumme 12 beim Werfen von drei Würfeln deutet darauf hin, dass der Chevalier de Méré in seinen Überlegungen von 56 möglichen Ergebnissen ausging, die er als gleich wahrscheinlich einschätzte: 20 mögliche Ergebnisse, bei denen alle drei Würfel verschiedene Augenzahlen zeigen, 30 mögliche Ergebnisse, bei denen genau zwei der drei Würfel die gleiche Augenzahl zeigen, und 6 mögliche Ergebnisse, bei denen alle drei Würfel die gleiche Augenzahl zeigen. Die (empirische) Erfahrung des Chevalier de Méré stand auch bei diesem Würfelproblem im Widerspruch zu seiner Intuition, sodass er sich wiederum in einem kognitiven Konflikt befand.

Seine Erfahrung war richtig, falsch war die Annahme der gleichen Wahrscheinlichkeit für jedes der von ihm betrachteten 56 möglichen Ergebnisse. Die richtige Betrachtungsweise dieses Würfelproblems wurde von Pierre de Fermat und Blaise Pascal in heutiger Terminologie dargestellt wie folgt formuliert:

> Die Annahme, dass jedes mögliche Ergebnis beim Werfen von drei Würfeln gleich wahrscheinlich ist, ist nur sinnvoll, wenn von $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ möglichen Ergebnissen ausgegangen wird. Hierbei gibt es 27 Möglichkeiten für die Augensumme 11 und 25 Möglichkeiten für die Augensumme 12.

Dies erklärt die Erfahrung des Chevalier de Méré.

Die mathematische Theorie der Wahrscheinlichkeit von Pierre de Fermat und Blaise Pascal lieferte Erklärungen für Erfahrungen mit Glücksspielen. Von Blaise Pascal wurde das Denken in Wahrscheinlichkeiten auf eine religiöse Frage, die Existenz Gottes, übertragen. Hierbei geht es „nicht mehr um die Wahrheit, sondern um die Erwartung“ (Gigerenzer, 2004,

S. 3), welche mit einer Wette verglichen werden kann. Das unter der Bezeichnung „Pascals Wette“ veröffentlichte Problem des Denkens in Wahrscheinlichkeiten wird von Gigerenzer (2004, S. 3) wie folgt formuliert:

> „Ich weiß nicht, ob Gott existiert. Aber ich weiß, wenn ich an ihn glaube und er nicht existiert, dann werde ich einige Momente weltlicher Lust und Laster versäumen. Wenn ich aber nicht an ihn glaube und er dennoch existiert, dann werde ich mit ewiger Verdammung und ewigem Elend dafür bezahlen. Worauf soll ich wetten?“

Die Antwort von Blaise Pascal auf diese Problemstellung lautete:

> „Auch wenn man die Chance, dass Gott existiert, für beliebig gering hält, werden doch, falls er existiert, die Folgen unabsehbar hoch sein: unendlich die Seligkeit der Erlösten, aber auch unendlich das Elend der Verdammten.“

Für Gigerenzer (2004, S. 4) illustriert Pascals Wette „eine radikal neue Denkweise, die mit der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie einhergeht“ und, bezogen auf die Theorie des Conceptual Change, einen „conceptual *exchange*“ im Sinne von Duit und Treagust (2003) darstellt: Religiöse Überzeugungen basieren nicht mehr rein auf dem Glauben, sondern auf einer Erwartung, welche als unsicher im Sinne der Gesetze der Wahrscheinlichkeit angesehen wird. Blaise Pascal nimmt nicht mehr die Wahrscheinlichkeit als Grundbegriff, sondern, in heutiger Terminologie, den *Erwartungswert*. Rationales Handeln wird diesbezüglich „als Maximierung der Erwartung“ (Gigerenzer, 2004, S. 4) definiert.

Hinsichtlich der Theorie und dem gesunden Menschenverstand wurde jedoch ein Widerspruch entdeckt, das sogenannte St. Petersburger Paradoxon. Dieses Problem des Denkens in Wahrscheinlichkeiten geht auf den italienischen Mathematiker Girolamo Cardano (1501-1576) „zurück und wurde insbesondere von Mitgliedern der berühmten *Bernoulli*-Familie diskutiert“ (Büchter & Henn, 2007, S. 288). Das St. Petersburger Paradoxon wird von Büchter und Henn (2007, S. 7) wie folgt formuliert:

> „Jemand bietet Ihnen das folgende Spiel an: Er wirft eine Münze solange, bis zum ersten Mal ‚Zahl‘ oben liegt. Wenn dies beim ersten Wurf geschieht, erhalten Sie einen Euro. Geschieht dies beim zweiten Wurf, erhalten Sie zwei Euro, beim dritten Wurf vier Euro, beim vierten Wurf acht Euro usw. Welchen Einsatz wären Sie bereit zu zahlen? Welcher Einsatz wäre ‚fair‘?“

Dieses Problem führte zum „ersten großen Konflikt zwischen dem Konzept der rationalen Erwartung und dem gesunden Menschenverstand“ (Gigerenzer, 2004, S. 4). Nach der Theorie des rationalen Handelns ergibt sich der faire Einsatz aus dem Erwartungswert, welcher sich wie folgt berechnet:

Erwartungswert in Euro: $(1/2)\cdot 1 + (1/4)\cdot 2 + (1/8)\cdot 4 + (1/16)\cdot 8 + ... = 1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + ... = \infty$

Der Erwartungswert ist also unendlich groß. Somit müsste man nach der rationalen Theorie sein ganzes Vermögen einsetzen, was sogar noch von Vorteil wäre, da jedes Vermögen nur endlich groß ist. Der gesunde Menschenverstand rät davon jedoch ab.

Der schweizerische Mathematiker Daniel Bernoulli (1700-1782) „veröffentlichte im Jahre 1738 eine mögliche Lösung in den Jahrbüchern der Petersburger Akademie“ (Gigerenzer, 2004, S. 4), woraus sich die Bezeichnung St. Petersburger Paradoxon ableiten lässt. Daniel Bernoulli betrachtete anstelle des mathematischen Erwartungswerts die sogenannte moralische Erwartung, welche „er als das Produkt aus der Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses und dem, was später sein Nutzen genannt wurde“ (Gigerenzer, 2004, S. 5), definierte. Übertragen auf die heutige Zeit lässt sich die Argumentation von Daniel Bernoulli wie folgt beschreiben:

> Es muss berücksichtigt werden, „dass ein Gewinn von 200 € (in moderner Währung) nicht notwendigerweise doppelt soviel wert ist wie ein Gewinn von 100 €, und dass ein Spieler umso mehr Geld gewinnen muss, um glücklich zu werden, je reicher er schon ist“ (Gigerenzer, 2004, S. 5).

Unter der Annahme, dass die Beziehung zwischen dem Vermögen in Euro und dem Nutzen des Vermögens natürlich logarithmisch ist, berechnet sich der erwartete Nutzen einer Teilnahme an dem im St. Petersburger Paradoxon beschriebenen Spiel bei einem Ausgangsvermögen von x Euro wie folgt:

Erwarteter Nutzen in Euro: $(1/2)\cdot\ln(x + 1) + (1/4)\cdot\ln(x + 2) + (1/8)\cdot\ln(x + 3) + (1/16)\cdot\ln(x + 4) + ...$

Für ein beispielhaftes Ausgangsvermögen von 50 000 € ergibt die Berechnung „einen Wert von etwa 9 €“ (Gigerenzer, 2004, S. 5). Dieser Wert liegt für Gigerenzer (2004, S. 5) „im Bereich dessen, was jemand mit einem gesunden Menschenverstand bereit ist, für das Spiel zu zahlen“.

Daniel Bernoulli transformierte also das Konzept des Erwartungswerts in das Konzept des erwarteten Nutzens, ein Konzept, welches „auch heute noch die Wirtschaftswissenschaften dominiert“ (Gigerenzer, 2004, S. 5). Zum St. Petersburger Paradoxon wird von Gigerenzer (2004, S. 4) angemerkt, dass aus heutiger Sicht gar kein Paradoxon vorliegt: „Es gibt keinen Widerspruch zwischen Resultaten, die sich aus gleich validen Annahmen ableiten lassen. Nach dem klassischen Verständnis war die Theorie der Wahrscheinlichkeit jedoch keine reine, inhaltsfreie Theorie, sondern untrennbar von ihrem Gegenstand. Und dieser Gegenstand war die menschliche Vernunft“, welche des Öfteren mit kognitiven Konflikten zu kämpfen hatte.

Der französische Mathematiker Pierre Simon Marquis de Laplace (1749-1827) systematisierte das stochastische Wissen seiner Zeit und trug maßgeblich zum Ausbau der Wahrscheinlichkeitstheorie bei. In seiner im Jahre 1812 veröffentlichten «Théorie Analytique des Probabilités» gab der Marquis de Laplace „die erste ‚explizite‘ Definition von Wahrscheinlichkeit“ (Bentz & Borovcnik, 1991, S. 2), welche in heutiger Terminologie dargestellt wie folgt lautet (vgl. Büchter & Henn, 2007, S. 167 f.):

> Wenn bei einem Zufallsexperiment mit endlicher Ergebnismenge alle möglichen Ergebnisse gleichberechtigt sind, dann ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich dem Verhältnis der Anzahl der günstigen Ergebnisse zur Anzahl der möglichen Ergebnisse.

Die vom Marquis de Laplace gegebene „Definition“ von Wahrscheinlichkeit ist also „durch eine enge Vermischung von Grundraum [...] auf der mathematischen Seite und der Idee von Symmetrie auf der intuitiven Seite gekennzeichnet: Wahrscheinlichkeit [...] wurde als Gleichwahrscheinlichkeit auf der Menge aller möglichen Versuchsergebnisse festgelegt“ (Bentz & Borovcnik, 1991, S. 2). Büchter und Henn (2007, S. 168) betonen, dass es sich hierbei im mathematischen Sinne um „keine *Definition* des Begriffs Wahrscheinlichkeit“, sondern um einen „Modell-Ansatz, Wahrscheinlichkeiten zu berechnen“, handelt, da „unklar [ist], wie man in Situationen vorzugehen hat, bei denen *nicht* alle Ergebnisse gleichwahrscheinlich sind“. Die Idee von Grundraum und Symmetrie lässt sich bereits in Überlieferungen aus dem Mittelalter erkennen, beim sogenannten Gottesurteil. War bei einem Rechtsstreit zwischen zwei Parteien die Wahrheit nicht auszumachen, so wurden zwei in etwa ebenbürtige Kämpfer ausgesucht, für jede Partei einer, deren Duell (welches als eine Art „Zufallsexperiment“ aufgefasst werden kann) über Sieg oder Niederlage der ganzen Partei entschied.

Vom Marquis de Laplace wurde auch eine Antwort auf ein klassisches Problem des Denkens in Wahrscheinlichkeiten gegeben, welches Gigerenzer (2004, S. 7) wie folgt beschreibt:

„Der erste Tag im Paradies geht zu Ende. Adam und Eva legen sich zur Ruhe. Sie hatten am Tag die Sonne aufgehen sehen und sie bewundert, wie sie am Himmel ihre Bahn zog und all die herrlichen Bäume,

Blumen und Vögel beschien. Irgendwann wurde es aber kühler, während die Sonne unter dem Horizont verschwand. Würde es jetzt auf ewig dunkel bleiben? Adam und Eva fragten sich sorgenvoll, welche Chance sie wohl haben, dass die Sonne wieder aufgeht?“

Gemäß dem Marquis de Laplace ist für den Fall, dass Adam und Eva die Sonne noch nie hätten aufgehen sehen, für die beiden möglichen Ereignisse „Die Sonne geht (wieder) auf“ und „Es bleibt auf ewig dunkel“[3] die gleiche Wahrscheinlichkeit 1/2 anzunehmen. Bildlich gesprochen, so Gigerenzer (2004, S. 7), würden Adam und Eva dafür, dass die Sonne (wieder) aufgeht, „einen weißen Stein in einen Beutel stecken, außerdem einen schwarzen Stein für das Dunkel-Bleiben“. Da Adam und Eva jedoch schon einmal gesehen hatten, wie die Sonne aufging, legten sie „einen weiteren weißen Stein in den Beutel“. Ihr Überzeugungsgrad für das Ereignis „Die Sonne geht (wieder) auf“ war also auf 2/3 gestiegen, ihr Überzeugungsgrad für das Ereignis „Es bleibt auf ewig dunkel“ auf 1/3 gesunken. Am „folgenden Tag – also nach dem zweiten Sonnenaufgang, den sie erlebten – gaben sie einen dritten weißen Stein hinzu“. Somit war der Überzeugungsgrad von Adam und Eva für das Ereignis „Die Sonne geht (wieder) auf“ auf 3/4 gestiegen, ihr Überzeugungsgrad für das Ereignis „Es bleibt auf ewig dunkel“ auf 1/4 gesunken. Dieser Zusammenhang wird durch die sogenannte Sukzessionsregel des Marquis de Laplace ausgedrückt. Sie gibt „allgemein die Wahrscheinlichkeit [...] an, dass ein Ereignis [...] wieder auftritt, nachdem es *n* mal [in Folge] eingetreten ist“ (Gigerenzer, 2004, S. 7). Berechnen lässt sich diese Wahrscheinlichkeit, welche im klassischen Problem den Überzeugungsgrad von Adam und Eva ausdrückt, in heutiger Terminologie dargestellt wie folgt:

$$\frac{(n+1)}{(n+2)}$$

Der Sukzessionsregel des Marquis de Laplace liegt die Annahme des sogenannten Indifferenzprinzips zugrunde. Dieses besagt: „Wenn man keine Informationen zum Abschätzen der Wahrscheinlichkeiten hat, kann man den möglichen Ereignissen oder Ergebnissen gleich hohe Wahrscheinlichkeiten zuschreiben“ (Gigerenzer, 2004, S. 8). Beim vorliegenden klassischen Problem der ersten Nacht im Paradies wird das Indifferenzprinzip vom Marquis de Laplace an zwei Stellen angewendet: zum einen, indem für die beiden Ereignisse „Die Sonne geht (wieder) auf“ und „Es bleibt auf ewig dunkel“ die gleiche Wahrscheinlichkeit 1/2 angenommen wird, und zum anderen, indem für das Ereignis „Adam und Eva haben einen Sonnenaufgang beobachtet unter der Bedingung, dass es auf ewig dunkel bleibt“ ebenfalls die Wahrscheinlichkeit 1/2 angenommen wird. Gemäß Gigerenzer (2004, S. 8) spielt „das Indifferenzprinzip, so umstritten es ist, [...] auch heute eine Rolle, beispielsweise in Vaterschaftsprozessen“. Umstritten deshalb, weil dabei vorausgesetzt wird, „dass der Angeklagte genauso wahrscheinlich der Vater ist wie alle anderen Männer zusammen“.

Vom Marquis de Laplace ist auch die Aussage „Wahrscheinlichkeitstheorie ist im Grunde nichts anderes als gesunder Menschenverstand, zusammengefasst in einem Kalkül“ (Gigerenzer & Hoffrage, 1995, S. 684; zitiert aus Krauss, 2003, S. 2) überliefert. Aus dieser Aussage geht für Gigerenzer (2004, S. 8) hervor, wie stark die Wahrscheinlichkeitstheorie von dem „Streben nach absoluter Gewissheit mit einer epistemischen Interpretation von Wahrscheinlichkeit“ geprägt war. Die Welt wurde als determiniert angesehen, wobei „die Ursache der Ungewissheit in der Unkenntnis des Menschen, nicht aber in der Natur selbst gesehen wurde“. Eine Betrachtungsweise, die „auch noch Albert Einsteins Sicht [war]: Gott würfelt nicht“ (Gigerenzer, 2004, S. 8).

[3] Diese Formulierung der beiden Ereignisse erscheint für den Blickwinkel von Adam und Eva angemessener als die von Gigerenzer (2004, S. 8) verwendete Formulierung „Die Sonne geht jeden Morgen auf“ beziehungsweise „Die Sonne geht nicht jeden Morgen auf“, da sich, anschaulich betrachtet, für Adam und Eva ein „Morgen“ erst mit dem Aufgehen der Sonne ergibt – kurz gefasst: kein Sonnenaufgang, kein „Morgen“.

2.2.3 Interpretationen von Wahrscheinlichkeit

Ausgehend von den im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen klassischen Problemen des Denkens in Wahrscheinlichkeiten lassen sich drei Interpretationen von Wahrscheinlichkeit unterscheiden, die inhaltlich realitätsbezogen und „noch heute oft miteinander in Konflikt“ (Gigerenzer, 2004, S. 11) sind: die Interpretation von Wahrscheinlichkeit

- als „Propensität“,
- als „frequentistische Wahrscheinlichkeit“ und
- als „subjektive Wahrscheinlichkeit“.

Als Quelle der Interpretation von Wahrscheinlichkeit als Propensität wird von Gigerenzer (2004) das Glücksspiel angesehen, aus dem auch die im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen Würfelprobleme des Chevalier de Méré hervorgegangen sind. „Propensität“ bezeichnet diesbezüglich „das Design eines Würfels oder eines Roulettrades [...], das die Wahrscheinlichkeit bestimmt“ (Gigerenzer, 2004, S. 5).

Der Anwendungsbereich der Interpretation von Wahrscheinlichkeit als Propensität wird als sehr begrenzt eingestuft, beschränkt auf „Gegenstände, deren Bauplan oder kausale Struktur wir kennen“ (Gigerenzer, 2004, S. 11).

Gemäß Hájek (2007, S. 20) wird die Wahrscheinlichkeit bei der Interpretation als Propensität ganz allgemein als Disposition oder als Tendenz eines gegebenen Typs von physikalischer Situation, eine bestimmte Sorte von Ergebnis oder auf Dauer die relative Häufigkeit eines solchen Ergebnisses zu ergeben, aufgefasst. Es ist also zwischen zwei Theorien zu unterscheiden:

- „single-case“-Propensität und
- „long-run“-Propensität.

Bei Ersterer ist die Propensität der Wert der Wahrscheinlichkeit, bei Letzterer wird die Propensität als Tendenz angesehen, eine relative Häufigkeit mit einem bestimmten Wert zu ergeben, wobei die Propensität selbst nicht der Wert der Wahrscheinlichkeit ist.

> Beispielhaft lässt sich anführen, dass ein fairer Spielwürfel „single-case“ eine *schwache* Tendenz hat, die Augenzahl Sechs anzuzeigen, wobei der Wert von 1/6 diese Tendenz *misst*. „Long-run“ hat dieser Würfel dagegen eine *extrem starke* Tendenz mit relativer Häufigkeit 1/6 die Augenzahl Sechs anzuzeigen, wobei der „kleine“ Wert von 1/6 diese Tendenz *nicht* misst.

Ein Kritikpunkt an der Interpretation von Wahrscheinlichkeit als Propensität ist, dass nicht erklärt werden kann, was „Propensität“ *genau* sein soll. Hitchcock (2001) weist darauf hin, dass es nicht ausreicht, eine Eigenschaft als „Propensität einer gewissen Stärke“ zu bezeichnen, ohne zu erklären, was genau diese Eigenschaft ist (vgl. Hájek, 2007, S. 21 f.).

Die Interpretation von Wahrscheinlichkeit als frequentistische Wahrscheinlichkeit geht auf statistische Tabellen zurück. Frequentistische Wahrscheinlichkeiten werden daher auch als „statistische Wahrscheinlichkeiten“ (vgl. Büchter & Henn, 2007, S. 179) oder als aleatorische (das heißt vom Zufall abhängige) Wahrscheinlichkeiten bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit wird hierbei „als relative Häufigkeit auf lange Sicht“ (Gigerenzer, 2004, S. 5) interpretiert – die Formulierung „auf lange Sicht“ steht stellvertretend für die Aussage des sogenannten empirischen Gesetzes der großen Zahlen, welches „eine Stabilisierung der relativen Häufigkeiten für große Versuchszahlen“ (Büchter & Henn, 2007, S. 348) vorhersagt. Büchter und Henn (2007, S. 174) betonen, dass die Beobachtung der Stabilisierung der relativen Häufigkeiten „eine Erfahrungstatsache [ist] und [...] den Rang eines Naturgesetzes [hat,] im Sinne einer Modellannahme zur Beschreibung der Natur, die sich bis heute hervorragend bewährt hat, aber nicht beweisbar ist“.

Geburten- und Sterblichkeitstafeln werden von Gigerenzer (2004, S. 5) als die „ersten systematischen Datenbanken, die in der westlichen Welt angelegt wurden“ und somit statistische Informationen zur Berechnung relativer Häufigkeiten lieferten, aufgeführt. Der schottische Mathematiker John Arbuthnot (1667-1735) hatte, so Gigerenzer (2004, S. 5), im Jahre 1710 die revolutionäre „Idee, eine Behauptung gegen statistische Daten zu testen“. John Arbuthnot „beobachtete, dass Männer gefährlicher leben als Frauen und dass mehr junge Männer als Frauen durch Unfälle sterben“. Die Hypothese von John Arbuthnot war: „Wenn es einen aktiven Gott gibt und dieser Monogamie vorsieht, [...] wird er mehr Jungen als Mädchen erzeugen, um diesen Verlust zu kompensieren.“ Um die „Hypothese göttlicher Vorsehung gegen die Nullhypothese von blindem Zufall“ zu testen, wertete John Arbuthnot „die Geburtenstatistiken, die damals seit 82 Jahren in London geführt wurden“, aus. Nachdem John Arbuthnot festgestellt hatte, „dass in jedem der 82 Jahre mehr Jungen als Mädchen geboren wurden“, berechnete er die Wahrscheinlichkeit für dieses Ergebnis unter seiner Nullhypothese des blinden Zufalls, wobei diese Wahrscheinlichkeit so gering war, dass er den „Effekt der göttlichen Vorsehung“ als bewiesen ansah. Auch wenn aus heutiger Sicht „der Mangel an präzisen Forschungs- und Alternativhypothesen [...] das größte Problem in Arbuthnots Test“ darstellt, lässt sich die Bedeutung dieses Vorgehens „in der bahnbrechenden Idee [sehen], Fragen durch Heranziehen empirischer Daten zu entscheiden“ (Gigerenzer, 2004, S. 6).

Bezüglich der im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen klassischen Probleme des Denkens in Wahrscheinlichkeiten können die Erkenntnisse des Antoine Gombault Chevalier de Méré aus „empirischer Erfahrung“ (Bentz & Borovcnik, 1991, S. 2) als Interpretation von Wahrscheinlichkeit als frequentistische Wahrscheinlichkeit aufgefasst werden.

Die Anwendung dieser Interpretation von Wahrscheinlichkeit beschränkt sich „auf Aussagen über Elemente einer Referenzklasse, die als untereinander gleich angesehen werden können und für die hinreichend viel statistische Information vorliegt“ (Gigerenzer, 2004, S. 11). In Bezug auf das klassische Problem der ersten Nacht im Paradies wäre eine Interpretation von Wahrscheinlichkeit als frequentistische Wahrscheinlichkeit also nicht anwendbar. Hájek (2007, S. 16) bezeichnet die Interpretation von Wahrscheinlichkeit in einer finiten Referenzklasse genauer als *finiten Frequentismus*. Diese Interpretation weist gewisse strukturelle Ähnlichkeiten zur klassischen Interpretation (der Interpretation des Marquis de Laplace, aus der der Begriff der Laplace-Wahrscheinlichkeit hervorgeht) auf, da jedes einzelne Ergebnis in einer Abfolge von Ergebnissen gleich gewichtet wird, indem die Anzahl der Ergebnisse einer Sorte gezählt und durch die Anzahl der Ergebnisse insgesamt geteilt wird. Zu beachten ist, dass eine finite Referenzklasse der Größe n, egal wie groß n ist, nur relative Häufigkeiten zu einem gewissen Grad der „Körnung“, nämlich $1/n$, ergeben kann, sodass beispielsweise irrationale Werte für Wahrscheinlichkeiten ausgeschlossen sind und sich beim tausendundeinfachen Münzwurf für die beiden Ergebnisse „Kopf“ und „Zahl“ nie genau die Wahrscheinlichkeit 0,5 ergeben kann. Außerdem wird von Hájek angemerkt, dass in gewisser Hinsicht jedes Problem in das „Problem des Einzelfalls“, wie das der ersten Nacht im Paradies, transformiert werden kann.

> Beispielhaft lässt sich der tausendfache Wurf einer Münze anführen, welcher auch als einmaliger Wurf von tausend Münzen interpretiert werden kann.

Neben der gängigen Interpretation, dem finiten Frequentismus, werden von einigen Frequentisten auch *infinite* Referenzklassen betrachtet. Die Wahrscheinlichkeit wird hierbei aus einer nicht mehr empirischen Sichtweise als *hypothetischer* oder *kontrafaktischer* Grenzwert der relativen Häufigkeit angesehen (Hájek, 2007, S. 17).

Ein Kritikpunkt an der Interpretation von Wahrscheinlichkeit als frequentistische Wahrscheinlichkeit ist, dass sich bei einer endlich großen Anzahl an Versuchsdurchführungen in verschiedenen Versuchsserien unterschiedliche relative Häufigkeiten und somit unterschied-

liche Werte für die zu definierende Wahrscheinlichkeit ergeben und dass eine unendlich große Anzahl an Versuchsdurchführungen praktisch nicht möglich ist.

Eine Gemeinsamkeit der Interpretation von Wahrscheinlichkeit als Propensität beziehungsweise als frequentistische Wahrscheinlichkeit ist, dass in beiden Fällen „von der Existenz einer ‚innewohnenden' objektiven Wahrscheinlichkeit ausgegangen" (Büchter & Henn, 2007, S. 182) wird, welche durch die jeweilige Interpretation möglichst genau bestimmt werden soll.

Die Interpretation von Wahrscheinlichkeit als subjektive Wahrscheinlichkeit hat ihren Ursprung im Gerichtshof. Gigerenzer (2004, S. 5) weist diesbezüglich auf die rechtliche Frage hin, „wie hoch ein Richter die Glaubwürdigkeit von Zeugen einschätzen soll, zum Beispiel wenn diese mit dem Angeklagten verwandt oder nicht verwandt sind". Als typisch für subjektive Einschätzungen von Wahrscheinlichkeiten werden von Büchter und Henn (2007, S. 180) qualitative „Bewertungen mit ‚mehr' oder ‚weniger wahrscheinlich'" angeführt.

Der englische Mathematiker Thomas Bayes (1702-1761) entwickelte eine im Jahre 1763 publizierte Regel, die für Büchter und Henn (2007, S. 222) „das mathematische Analogon des Zusammenhangs zwischen der Wahrscheinlichkeit, die [...] einem Ereignis subjektiv [...] [zugebilligt wird], und dem Lernen aus Erfahrung" darstellt. Die Regel von Thomas Bayes „ermöglicht die Berechnung von a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten [...] aufgrund der subjektiven Einschätzung der a-priori-Wahrscheinlichkeiten [...] und der Beobachtung" (Büchter & Henn, 2007, S. 479), also das Überprüfen von Hypothesen aufgrund neuer Indizien, wobei Gigerenzer (2004, S. 8) auf „die Problematik [hinweist], die Regel von Bayes in Situationen anzuwenden, in denen keine oder unzureichende empirische Daten vorliegen". Dies trifft beispielsweise für das im vorangegangenen Abschnitt beschriebene Problem der ersten Nacht im Paradies zu.

Mithilfe der berechneten a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten können die ursprünglichen a-priori-Wahrscheinlichkeiten neu eingeschätzt werden, sodass aus den a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten des ersten Schritts die neuen a-priori-Wahrscheinlichkeiten im zweiten Schritt werden und somit „das *Lernen aus Erfahrung* rechnerisch vollzogen wird" (Büchter & Henn, 2007, S. 479). Die Regel von Thomas Bayes, die auch als „Satz von Bayes" oder als „Formel von Bayes" bezeichnet wird, lässt sich „für den einfachsten Fall mit binären Hypothesen, H_1 und H_2, und einem Datum (Evidenz) D" (Gigerenzer, 2004, S. 6) in heutiger Terminologie dargestellt wie folgt formulieren – angegeben ist die Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass H_1 die Ursache für das Eintreten von D war:

$$\mathrm{P}(H_1|D) = \frac{\mathrm{P}(H_1)\cdot\mathrm{P}(D|H_1)}{\mathrm{P}(H_1)\cdot\mathrm{P}(D|H_1) + \mathrm{P}(H_2)\cdot\mathrm{P}(D|H_2)}$$

Gigerenzer (2004, S. 6) weist darauf hin, dass diese Regel „vom Testen von Nullhypothesen zu unterscheiden" ist. In Bezug auf den Gerichtshof, welcher den Ursprung der Interpretation von Wahrscheinlichkeit als subjektive Wahrscheinlichkeit darstellt, ist anzumerken: „Richter lassen heute die Regel von Bayes in Strafprozessen nur zu, wenn empirische Informationen vorhanden sind, und dann auch nicht immer" (Gigerenzer, 2004, S. 10). Büchter und Henn (2007, S. 222) fügen hinzu, dass der in der Regel von Thomas Bayes vollzogene „Rückschluss von der Wirkung auf die Ursache" von den Juristen als „Beweiswürdigung" bezeichnet wird.

Für die Interpretation von Wahrscheinlichkeit als subjektive Wahrscheinlichkeit ist der Anwendungsbereich „unbegrenzt; alles in der Welt, wozu Menschen Überzeugungen haben, die den Gesetzen der Theorie folgen, ist möglicher Gegenstand. Dies schließt Wahrscheinlichkei-

ten für Einzelfälle mit ein, selbst für Ereignisse, die noch nie beobachtet wurden“ (Gigerenzer, 2004, S. 11).

Hájek (2007, S. 23) bezeichnet die Interpretation von Wahrscheinlichkeit, bei der Wahrscheinlichkeiten mit dem Grad des Vertrauens oder dem Glauben oder „partiellen“ Überzeugungen gleichgesetzt werden, als *Subjektivismus* – weitere Bezeichnungen sind *Personalismus* und *subjektiver Bayesianismus*. Beim Subjektivismus sind zwei Arten zu unterscheiden (vgl. Hájek, 2007, S. 24):

- „ungezwungener Subjektivismus“ und
- eine Form des Subjektivismus, welche als „rational“ bezeichnet werden kann.

Der ungezwungene Subjektivismus ist dadurch gekennzeichnet, dass es für die zuweisbaren Wahrscheinlichkeiten keine Beschränkung gibt. Bei der rationalen Form des Subjektivismus muss die Zuweisung der Wahrscheinlichkeiten dagegen „logisch konsistent“ sein.

Die Quantifizierung subjektiver Wahrscheinlichkeiten erfolgt „traditionell“ über Wettquoten, oder reziprok dazu über Chancenverhältnisse, und kann gemäß Henn (2002, S. 38) wie folgt dargestellt werden – wobei aus rationaler Sicht die Wettquoten, beziehungsweise die Chancenverhältnisse, nicht beliebig festgesetzt werden dürfen, sondern für ein Ereignis E sinnvollerweise $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$ gelten muss, sodass in Bezug auf die eigene Wettquote von $b : a$ für E eine Wettquote von $a : b$ für $\bar{E}$ angenommen werden muss):

> Für ein Ereignis $E \subseteq \Omega$ (Ω ist die Ergebnismenge) sind folgende Aussagen gleichwertig (mit $a, b \in \mathbb{N}$):
>
> (I) Die Wettquote beim Wetten auf E beträgt $b : a$.
>
> (II) Das Chancenverhältnis ist $P(E) : P(\bar{E}) = a : b$.
>
> (III) Es ist $P(E) = a : (a + b)$.

Hájek (2007, S. 24) weist darauf hin, dass hierbei von der Existenz einer *fairen Quote* für die Wette auf E ausgegangen wird. Jedoch gibt es Fälle, in denen diese Annahme als nicht zutreffend angesehen werden kann.

> So wurde während der Sonnenfinsternis am 11. August 1999 in Großbritannien von einem Mann eine Wette eingegangen, die ihm eine Million Pfund eingebracht hätte, wenn die Welt untergegangen wäre. Gegenstand der Wette war also ein Ereignis, dessen Eintreten den subjektiven Wert des Gewinns beeinflusst.

Diese Problematik ist mit der im vorangegangenen Abschnitt beim St. Petersburger Paradoxon beschriebenen Problematik des Konzepts des Erwartungswerts, das in das Konzept des erwarteten Nutzens transformiert wurde, vergleichbar.

Im Gegensatz zu der vom Marquis de Laplace vorgeschlagenen Quantifizierung von Wahrscheinlichkeiten, bei der die Anzahl der günstigen Ergebnisse und die Anzahl der *möglichen* Ergebnisse ins Verhältnis gesetzt werden, werden bei der Quantifizierung von Wahrscheinlichkeiten über Wettquoten bzw. Chancenverhältnisse die Anzahl der günstigen Ergebnisse und die Anzahl der *ungünstigen* Ergebnisse ins Verhältnis gesetzt. Im Englischen ist für diese Art von Verhältnis der Begriff „odds“ gebräuchlich.

Bezüglich der Interpretation von Wahrscheinlichkeit als subjektive Wahrscheinlichkeit ist zu berücksichtigen, dass oftmals die Meinungen von Experten als Richtlinie dienen. So kann das bloße Wissen von der Einschätzung der Wahrscheinlichkeit durch einen Experten dazu

führen, dass dessen Einschätzung als subjektive Wahrscheinlichkeit übernommen wird (Gaifman, 1988; vgl. Hájek, 2007, S. 30).

Dies lässt sich beispielsweise in Bezug auf Wettervorhersagen beobachten.

Anzumerken ist, dass die Gesetze der Wahrscheinlichkeit als Beschränkungen für die subjektive Einschätzung der Wahrscheinlichkeit angesehen werden können, um „Verluste im weiten Sinn“ – sowohl finanzieller Art als auch am Abstand von den Einschätzungen eines Experten gemessen – zu minimieren (Hájek, 2007, S. 31).

Ein Kritikpunkt an der Interpretation von Wahrscheinlichkeit als subjektive Wahrscheinlichkeit ist, dass unterschiedliche Vertreterinnen und Vertreter dieser Interpretation von Wahrscheinlichkeit zu unterschiedlichen Einschätzungen derselben Wahrscheinlichkeit kommen.

Für Gigerenzer (2004, S. 11) ist „mit der Entwicklung der Theorie der Wahrscheinlichkeit [...] die Vielfalt von Konzepten, die im begrifflichen Umfeld von Zufall und Erwartung stand, auf einige ganz wenige eingeengt“ worden: Weder die „nahe liegenden“ Konzepte Glück und Schicksal, noch das Konzept einer durch Autorität gesicherten Meinung, sondern „Propensität“, „frequentistische Wahrscheinlichkeit“ und „subjektive Wahrscheinlichkeit“ sind die „verschiedenen Auslegungen des Begriffs Wahrscheinlichkeit“, mit denen die Wahrscheinlichkeitstheorie begonnen hat.

In Abbildung 2.1 sind die verschiedenen Interpretationen von Wahrscheinlichkeit im grafischen Überblick dargestellt.

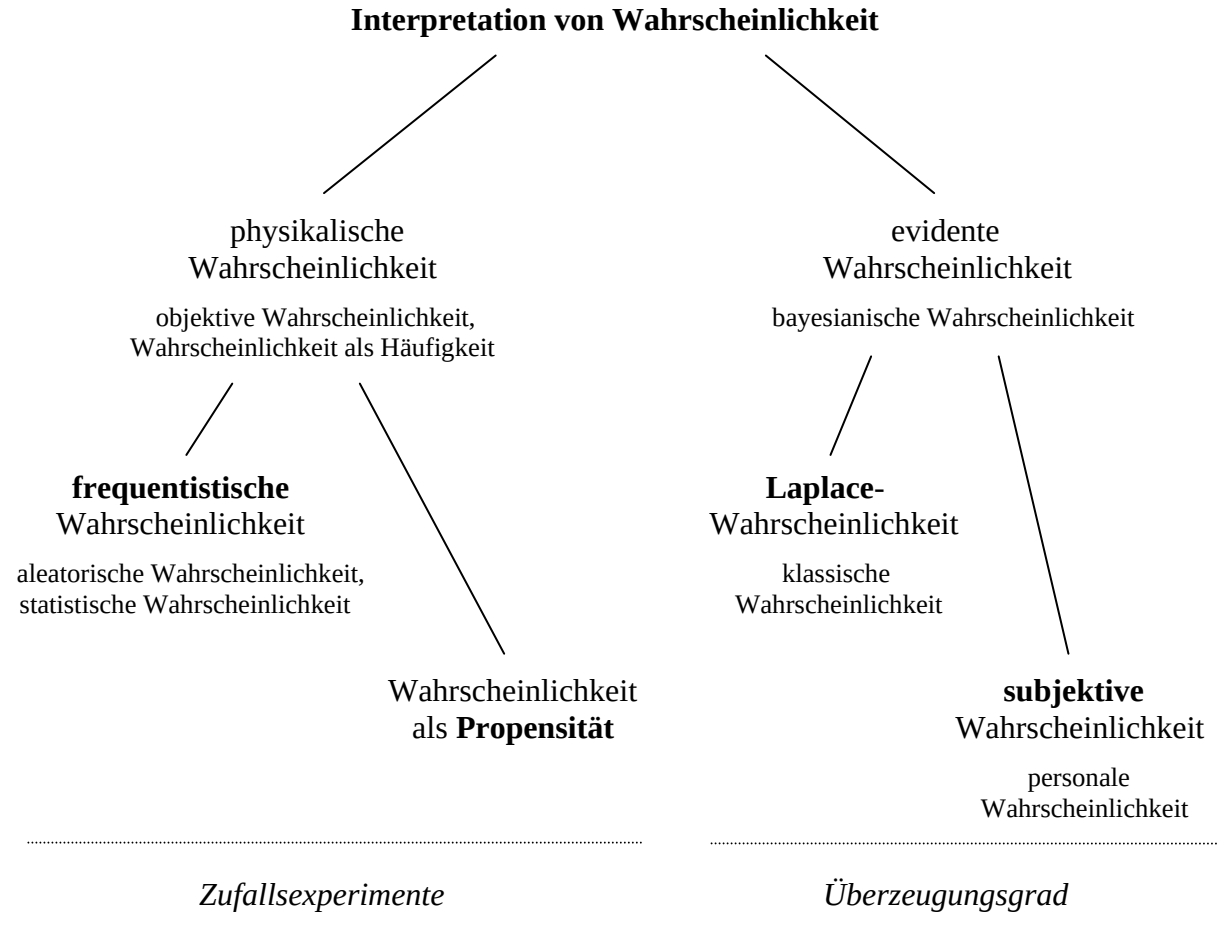


Abb. 2.1. Interpretationen von Wahrscheinlichkeit

Bezüglich der Interpretation von Wahrscheinlichkeit lassen sich also zwei grobe Kategorien unterscheiden:

- die Interpretation von Wahrscheinlichkeit als *physikalische* Wahrscheinlichkeit, welche auch als *objektive* Wahrscheinlichkeit bezeichnet wird und Wahrscheinlichkeit als Häufigkeit interpretiert, und
- die Interpretation von Wahrscheinlichkeit als *evidente* Wahrscheinlichkeit, welche auch als *bayesianische* Wahrscheinlichkeit bezeichnet wird.

Von physikalischen Wahrscheinlichkeiten wird sinnvollerweise im Zusammenhang mit Zufallsexperimenten gesprochen, also zufälligen physikalischen Abläufen, die dadurch charakterisiert sind, dass der Ausgang nicht vorhersehbar und „kein kausaler Zusammenhang" (Henn, 2002, S. 29) feststellbar ist. Evidente Wahrscheinlichkeiten drücken ganz allgemein einen Überzeugungsgrad aus, sodass sich die Anwendbarkeit dieser Interpretation nicht auf Zufallsexperimente beschränkt.

Bei der Interpretation von Wahrscheinlichkeit als physikalische Wahrscheinlichkeit wird unterschieden zwischen

- der Interpretation von Wahrscheinlichkeit als *frequentistische* Wahrscheinlichkeit, welche, wie bereits erwähnt, auch als *aleatorische* oder *statistische* Wahrscheinlichkeit bezeichnet wird (im Sinne einer a-posteriori-Wahrscheinlichkeit), und
- der Interpretation von Wahrscheinlichkeit als *Propensität*.

Bei der Interpretation von Wahrscheinlichkeit als evidente Wahrscheinlichkeit wird unterschieden zwischen

- der Interpretation als *Laplace*-Wahrscheinlichkeit, der *klassischen* Interpretation (im Sinne einer a-priori-Wahrscheinlichkeit), und
- der Interpretation von Wahrscheinlichkeit als *subjektive* Wahrscheinlichkeit, welche auch als *personale* Wahrscheinlichkeit bezeichnet wird.

Anzumerken ist, dass neben den im grafischen Überblick dargestellten Interpretationen von Wahrscheinlichkeit noch weitere inhaltlich realitätsbezogene Interpretationen existieren. Dies sind beispielsweise

- die Interpretation von Wahrscheinlichkeit als *geometrische* Wahrscheinlichkeit, welche „eine Verallgemeinerung der Laplace-Wahrscheinlichkeit" (Henn, 2002, S. 36) darstellt (ein Beispiel für diese Interpretation ist der Vergleich der Bogenlängen beziehungsweise der Flächeninhalte von Kreissektoren zur Ermittlung der Wahrscheinlichkeit, bei einem Glücksrad zu gewinnen),
- die Interpretation von Wahrscheinlichkeit als *logische* Wahrscheinlichkeit, welche ebenfalls auf der Idee der klassischen Interpretation aufbaut (Hájek, 2007, S. 11) und diese verallgemeinert (die möglichen Ergebnisse müssen hierbei nicht mehr als gleich wahrscheinlich angesehen werden und Wahrscheinlichkeiten können unabhängig davon, ob die Evidenz symmetrisch ausgeglichen ist oder nicht, berechnet werden), sowie
- die Interpretation von Wahrscheinlichkeit als *epistemische* Wahrscheinlichkeit, welche auch als *induktive* Wahrscheinlichkeit bezeichnet wird und eng verwandt ist mit der Interpretation von Wahrscheinlichkeit als logische Wahrscheinlichkeit.

Alle genannten Interpretationen haben die Gemeinsamkeit, dass es sich um inhaltlich realitätsbezogene Auslegungen des Begriffs der Wahrscheinlichkeit, im Sinne von „Vorstellungen von Wahrscheinlichkeit" (Hájek, 2007, S. 1), handelt und nicht um Definitionen des Begriffs der Wahrscheinlichkeit im mathematischen Sinne.

Ergänzend zu diesen Vorstellungen von Wahrscheinlichkeit werden von Wollring (1994a) sogenannte *animistische* Vorstellungen aufgeführt, welche unter anderem bereits von Jean Piaget beschrieben wurden. Diese können mit anderen Vorstellungen von Wahrscheinlichkeit koexistieren und insbesondere bei Kindergarten- und Grundschulkindern handlungsbestimmend sein. Der Begriff der animistischen Vorstellung in einer stochastischen Situation bezeichnet „die subjektive Auffassung, dass sich im Entstehen der Versuchsergebnisse eines Zufallsexperimentes ein Wesen mit Bewusstsein autonom äußert“ (Wollring, 1994a, S. 30).

> Beispielhaft für eine animistische Vorstellung lässt sich der Glaube anführen, dass das Ergebnis beim Werfen eines Spielwürfels beeinflusst werden kann, wenn der Würfel fest genug um das gewünschte Ergebnis gebeten wird.

Festgestellt wurde, dass animistische Vorstellungen das Wahrscheinlichkeitsverständnis insbesondere in Situationen beeinflussen, die (subjektiv) als Risikosituationen empfunden werden (Wollring, 1994a). Bezogen auf die Theorie des Conceptual Change lassen sich animistische Vorstellungen als „kindgemäße Bausteine ‚aktiver individueller Sinnkonstruktion‘“ (Wollring, 1994a, S. 32) charakterisieren – Kognitives und Emotionales sind dabei untrennbar miteinander verschränkt.

2.2.4 Mathematische Definition der Wahrscheinlichkeit

Eine, wie Büchter und Henn (2007, S. 9) es formulieren, „mathematisch befriedigende Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffs“ wurde erst im Jahre 1933 vom russischen Mathematiker Andrej Nikolajewitsch Kolmogorov (1903-1987) in seinem Werk „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ gegeben.

Bis zu diesem Zeitpunkt beschränkte sich die Theorie der Wahrscheinlichkeit darauf, Wege aufzuzeigen, um „Wahrscheinlichkeiten zu gewinnen und mit ihnen zu rechnen“ (Büchter & Henn, 2007, S. 183), wobei die betreffenden Interpretationen von Wahrscheinlichkeit durch die Nichtnegativität der Wahrscheinlichkeiten, ihre Normiertheit (die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse ist 1) und ihre Additivität (die Wahrscheinlichkeit für zwei disjunkte Ereignisse entspricht der Summe der Wahrscheinlichkeiten der beiden Ereignisse) gekennzeichnet waren. Was „Wahrscheinlichkeit“ im mathematischen Sinne ist, war noch nicht geklärt.

Der Ansatz von Andrej Nikolajewitsch Kolmogorov ist dadurch gekennzeichnet, dass „nicht mehr an die Anschauung appelliert und von einer objektiven Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ausgegangen“ wird, sondern „allgemein gültige Festlegungen [...] getroffen werden [...] [, die] nicht mit irgendwelchen konkreten Situationen verknüpft“ sind (Büchter & Henn, 2007, S. 183). Die „ontologische Bindung“ (Henn, 2002, S. 38) an die Realität wird dabei also aufgegeben. Für den Fall einer endlichen Ergebnismenge wird die Wahrscheinlichkeit von Andrej Nikolajewitsch Kolmogorov durch ein System aus drei Axiomen definiert, welches wie folgt lautet (vgl. Büchter & Henn, 2007, S. 184 f.):

> Ein Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) ist ein Paar bestehend aus einer nichtleeren endlichen Menge Ω, der Ergebnismenge, und einer Funktion P, der Wahrscheinlichkeitsfunktion, welche jedem Ereignis E aus der Ereignismenge $\mathcal{P}(\Omega)$ eine reelle Zahl zuordnet und folgende Eigenschaften hat:

(I)	$\mathrm{P}(E) \geqq 0$ für alle Teilmengen E von Ω	(Nichtnegativität)
(II)	$\mathrm{P}(\Omega) = 1$	(Normiertheit)

(III) $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$
für alle Teilmengen E_1, E_2 von Ω mit $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ (Additivität)

Die drei Axiome sind, wie Büchter und Henn (2007, S. 184) anmerken, „genau den wesentlichen gemeinsamen Eigenschaften der [...] [zuvor beschriebenen] Ansätze nachempfunden". Wahrscheinlichkeit wird dabei als normiertes *Maß* definiert. Für den Fall einer unendlichen Ergebnismenge wird von Andrej Nikolajewitsch Kolmogorov noch ein weiteres Axiom eingeführt, das er als „Stetigkeitsaxiom" bezeichnet (und das, wenn Ω endlich ist, automatisch gilt).

Im Kontext der Axiome von Andrej Nikolajewitsch Kolmogorov wird auch der Zusammenhang von relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit beschrieben – dies geschieht durch die sogenannten Gesetze der großen Zahlen, zu denen beispielsweise das bernoullische Gesetz der großen Zahlen gehört, welches die durch das empirische Gesetz der großen Zahlen ausgedrückte Erfahrungstatsache belegt, dass sich die relative Häufigkeit eines beobachteten Ergebnisses der theoretischen Wahrscheinlichkeit annähert, wenn die Anzahl der Versuchsdurchführungen zunimmt. Zu beachten ist, dass der dabei verwendete „stochastische Konvergenzbegriff" nicht identisch ist mit dem in der Analysis verwendeten Konvergenzbegriff (vgl. die Ausführungen zur Interpretation von Wahrscheinlichkeit als „frequentistische Wahrscheinlichkeit" im vorangegangenen Abschnitt).

Der Begriff der Wahrscheinlichkeit ist somit im mathematischen Sinne *definiert*. Zum Aufbau grundlegender Vorstellungen von Wahrscheinlichkeit erscheint der axiomatische Ansatz jedoch aufgrund des fehlenden inhaltlichen Realitätsbezuges als nicht geeignet.

Im folgenden Kapitel werden Erkenntnisse zum intuitiven probabilistischen Denken vorgestellt, schwerpunktmäßig aus dem Bereich der Psychologie. Dabei wird insbesondere auf die Rolle, die einfache probabilistische Heuristiken („simple everyday heuristics") und kognitive Verzerrungen beim Anwenden dieser Heuristiken spielen, eingegangen.

Kapitel 3

Erkenntnisse zum intuitiven probabilistischen Denken

Einleitend wird ein Überblick zur Forschung zum intuitiven probabilistischen Denken gegeben.

Im Anschluss daran werden Erkenntnisse zum intuitiven probabilistischen Denken aus dem Bereich der Kognitions- und der Entwicklungspsychologie vorgestellt und unter dem Aspekt des Conceptual Change betrachtet.

Abschließend wird auf den Einfluss des Darstellungsformates von Informationen eingegangen sowie ein Modell „subjektiver Wahrscheinlichkeiten“ beschrieben.

3.1 Wissenschaftliche Erforschung

3.1.1 Kurzer Überblick zur psychologischen Forschung

Aus der Betrachtung von klassischen Problemen des Denkens in Wahrscheinlichkeiten, insbesondere der Paradoxa (vgl. Abschnitt 2.2.2), stellten sich „bereits deutlich genuin *psychologische* Fragestellungen heraus: Es ging um ‚Intuition', um ‚Naturinstinkt' und um ‚gesunden Menschenverstand'" (Krauss, 2003, S. 2). Der Beginn der empirischen Erforschung des menschlichen Denkens in der Psychologie wird von Krauss (2003) auf die Mitte des 19. Jahrhunderts datiert. Die Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Gesetze der Logik, vor allem die Gesetze der Aussagenlogik, welche eine Beschränkung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf die beiden Werte 0 und 1 darstellt, wurden hierbei als „die Gesetze des menschlichen Denkens" betrachtet, wie beispielsweise der Titel "An Investigation of the Laws of Thought" einer Arbeit von George Boole aus dem Jahre 1854 belegt.

In Bezug auf die Logik werden von Krauss (2003) die Forschungen von Jean Piaget und Bärbel Inhelder hervorgehoben, welche im Abschnitt 3.3.4 im Zusammenhang mit einem Modell zu Entwicklungsphasen des probabilistischen Denkens vorgestellt werden. Im Jahre 1955 wurde von Jean Piaget und Bärbel Inhelder in ihrer Arbeit mit dem Titel «De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent» zum Ausdruck gebracht, dass „schließendes Denken nichts anderes ist als die mathematische Logik selbst".

Eine neue Perspektive entstand durch die Ergebnisse der Forschungen von Daniel Kahneman und Amos Tversky, welche im Abschnitt 3.2.4 beschrieben werden. Das Forschungscredo von Daniel Kahneman und Amos Tversky aus dem Jahre 1973 lautete: „Wenn Menschen Voraussagen und Urteile unter Unsicherheit treffen, dann scheinen sie nicht den Kalkülen der Wahrscheinlichkeitsrechnung oder statistischen Theorien der Vorhersage zu folgen. Stattdessen verlassen sie sich auf [...] Heuristiken, die manchmal akzeptable Urteile hervorbringen, manchmal aber zu schweren und systematischen Fehlern führen" (Kahneman & Tversky, 1973, S. 237). Diese Überzeugung dominierte in der Forschung zum „Urteilen unter Unsicherheit" in den folgenden Jahrzehnten.

Neu reflektiert wurde sie in den 1990ern durch Gerd Gigerenzer und Ulrich Hoffrage. Bezüglich des in der Forschung zum probabilistischen Denken verwendeten Repräsentationsformates von Wahrscheinlichkeiten in Form von Dezimalbrüchen in Prozentschreibweise wurde festgestellt, dass „aus dem menschlichen Unvermögen, solche Wahrscheinlichkeitsaufgaben zu lösen" (Krauss, 2003, S. 3), nicht geschlossen werden darf, „dass Menschen grundsätzlich keine mentalen Algorithmen für das Urteilen unter Unsicherheit haben" (Krauss, 2003, S. 3). So wird der Widerspruch zwischen Intuition und Mathematik in gewisser Weise „repariert", wenn eine Übersetzung der probabilistischen Information in ein „natürliches Informationsformat" stattfindet. Die Erkenntnisse von Gerd Gigerenzer und Ulrich Hoffrage werden im Abschnitt 3.4.1 in Kurzform beschrieben.

3.1.2 Weitere Forschungsbeiträge

Von Bentz und Borovcnik (1991, S. 1) werden in Bezug auf die „*Erforschung* der *intuitiven Vorstellungswelt*" unter anderem die Beiträge von Roland W. Scholz hervorgehoben. Das Prozess-Struktur-Modell des stochastischen Denkens von Roland W. Scholz wird in Auszügen im Abschnitt 3.2.2 vorgestellt. Der Begriff des „stochastischen Denkens" bezeichnet dort „die kognitive Aktivität des Menschen in der Auseinandersetzung mit stochastischen Situa-

tionen bzw. Problemen und/oder Prozesse des Verstehens, Denkens oder der Informationsverarbeitung, in denen auf den Wahrscheinlichkeitsbegriff Bezug genommen wird oder stochastische Modelle angewendet werden“ (Scholz, 1986, S. 69), und schließt somit das „probabilistische Denken“ mit ein. Im engen Zusammenhang mit den Elementen dieses Prozess-Struktur-Modells steht auch die Theorie von probabilistischen Intuitionen und Schemata von Efraim Fischbein, welche im Abschnitt 3.3.1 beschrieben wird.

3.1.3 Unterscheidung von Forschungsansätzen

Die im Folgenden in diesem Kapitel aufgeführten Forschungsansätze lassen sich nach dem jeweiligen Schwerpunkt der Betrachtung unterscheiden: Beim Prozess-Struktur-Modell von Roland W. Scholz nehmen (der Bezeichnung entsprechend) kognitive Prozesse und Strukturen des probabilistischen Denkens eine zentrale Rolle ein. Daniel Kahneman und Amos Tversky stellen die Betrachtung von Heuristiken, die beim Urteilen unter Unsicherheit zur Anwendung kommen, in den Vordergrund. Somit können die Ansätze von Daniel Kahneman und Amos Tversky aus den 1970ern und von Roland W. Scholz aus den 1980ern einer kognitionspsychologischen Sichtweise zugeordnet werden. Beim Ansatz von Jean Piaget und Bärbel Inhelder aus den 1950ern steht die kognitive Entwicklung im Vordergrund, beim Ansatz von Efraim Fischbein aus den 1970ern die Entwicklung des Lernens. Diese beiden Ansätze lassen sich daher einer entwicklungspsychologischen Sichtweise zuordnen.

Im weiteren Verlauf werden die verschiedenen Ansätze vorgestellt, zuerst die beiden kognitionspsychologischen und im Anschluss daran die beiden entwicklungspsychologischen, wobei versucht wird, sowohl zwischen den einzelnen Ansätzen Verknüpfungen herzustellen (was die Reihenfolge erklärt, in der die Ansätze präsentiert werden) als auch Entsprechungen bezüglich der Elemente der Theorie des Conceptual Change aufzuzeigen.

3.2 Kognitionspsychologische Sichtweise

3.2.1 Der Begriff der Heuristik

Im vorliegenden Zusammenhang, dem probabilistischen Denken, werden unter dem Begriff der Heuristik in Anlehnung an Nothbaum und Scholz (1995, S. 97) „Daumenregeln verstanden, welche es erlauben, ohne aufwendige Berechnungen zu Wahrscheinlichkeitsschätzungen und Urteilen in Situationen probabilistischer Natur zu gelangen“.

3.2.2 Elemente des Prozess-Struktur-Modells von Scholz (1987)

Um die verschiedenen Arten von Wissen und Schlussfolgerungen, die beim Problemlösen und beim stochastischen Denken involviert sind, zu spezifizieren (Scholz, 1991, S. 227), wurde von Roland W. Scholz ein Prozess-Struktur-Modell entwickelt. Aus diesem Prozess-Struktur-Modell werden nachfolgend die Elemente beschrieben, die für das Verständnis des intuitiven probabilistischen Denkens von Bedeutung erscheinen. Im Prozess-Struktur-Modell wird von

Scholz (1987) zwischen zwei Denkmodi unterschieden: einem analytischen Denkmodus und einem intuitiven Denkmodus.

Gemäß Nothbaum und Scholz (1995, S. 98) ist „der intuitive Denkmodus durch eine ganzheitliche und vom individuellen Erfahrungswissen geprägte Problemsicht, eine unbewusste Informationssuche und -verarbeitung, emotionale Beteiligung und eine plötzliche, parallele Informationsverarbeitung gekennzeichnet“. Hervorzuheben ist, dass Wahrscheinlichkeitsaussagen, die intuitiv gewonnen werden, im Vergleich zu analytisch gewonnenen Wahrscheinlichkeitsaussagen weder als grundsätzlich über- noch als grundsätzlich unterlegen einzustufen sind – jedoch sind bei der Einschätzung von Wahrscheinlichkeiten „unterschiedliche Fehler bzw. Abweichungen vom normativen Wert zu erwarten“ (Nothbaum & Scholz, 1995, S. 98).

Der intuitive Denkmodus ist im Einzelnen durch folgende Attribute beziehungsweise Eigenschaften gekennzeichnet (vgl. Scholz, 1986, S. 76):

(A) unbewusste Informationsaufnahme und -verarbeitung

(B) gefühlsmäßiges Verstehen und instinktive Empathie

(C) plötzliches, synthetisierendes, paralleles Verarbeiten von Informationen aus einem großen Bereich des Wissens

(D) das Problem wird „Gestalt erkennend“ als ein Ganzes behandelt

(E) von persönlicher Erfahrung abhängig

(F) bildliche Vorstellungen und Metaphern

(G) geringe kognitive Kontrolle

(H) emotionale Beteiligung

(I) Gefühl der Sicherheit gegenüber dem Ergebnis des Denkprozesses

Bezogen auf die unterschiedlichen Repräsentationsformate von Wahrscheinlichkeit (vgl. Abschnitt 2.1.2) wird von Nothbaum und Scholz (1995, S. 98) unter Bezug auf Beyth-Marom (1982) angemerkt, dass Probanden einerseits fordern, selbst quantitative Informationen zu erhalten, andererseits aber gegenüber dem eigenen aktiven Formulieren von numerischen Wahrscheinlichkeitsurteilen eine gewisse Reserviertheit zeigen. Neben den numerischen und den nicht-numerischen verbalen Repräsentationsformaten von Wahrscheinlichkeit wird von Nothbaum und Scholz (1995, S. 99) als dritte Art der Repräsentation „die graphische Aufarbeitung von Risikoinformationen in Schaubildern und Diagrammen“ aufgeführt.

Aus einer kognitionspsychologischen Perspektive wird von Scholz (1988) bei der Organisation des langzeitlich verfügbaren Wissens zwischen vier verschiedenen Typen von Wissen unterschieden (vgl. Scholz, 1988, S. 58): zwischen der „Wissensbasis“, der „heuristischen Struktur“, dem „Zielsystem“ und der „evaluativen Struktur“. Dabei sind die beiden erstgenannten Typen von Wissen unmittelbar für die Problembearbeitung maßgeblich, wohingegen die beiden letztgenannten Typen von Wissen den Denkprozess organisieren und steuern. Jedoch lässt sich keine vollkommen scharfe Trennung zwischen diesen beiden Dimensionen durchführen.

Bei der „Wissensbasis“, welche das langzeitlich gespeicherte Fakten- und Begriffswissen enthält, wird von Scholz (1988, S. 52) zwischen dem „direct accessible knowledge“ und dem „higher order knowledge“ unterschieden:

- Mit „direct accessible knowledge“ wird das Wissen bezeichnet, welches direkt zugänglich, weniger abstrakt und leicht verfügbar ist und sich vornehmlich aus Begriffen zusammensetzt, die konkret gegenständlich und bildhaft fassbar sind.
- Das als „higher order knowledge“ bezeichnete Wissen wird durch eine Reihe von zwischengeordneten und konstruktiven Schritten aktiviert. Es entwickelt sich in der Regel „durch gesellschaftliche und schulische Vermittlungsprozesse“ (Scholz, 1988, S. 52).

Die „heuristische Struktur“, welche das Operationswissen beinhaltet, lässt sich in „zwei Typen von Heuristiken bzw. kognitiven Operationen“ (Scholz, 1988, S. 58) unterteilen, in „simple everyday heuristics“ und in „higher order heuristics“:

- Als „simple everyday heuristics“ werden in der Alltagserfahrung erworbene Mittel der Informationsverarbeitung, welche einfach und schnell sind und bei der Anwendung im Arbeitsgedächtnis nur eine geringe Kapazität benötigen, bezeichnet.
- Die „higher order heuristics“ stellen dagegen „in der Regel nicht spontan, sondern durch formale Erziehung“ (Scholz, 1988, S. 58) vermittelte und erworbene Mittel der Informationsverarbeitung dar.

In der nachfolgenden Abbildung sind die „Wissensbasis“ und die „heuristische Struktur“ im Überblick dargestellt.

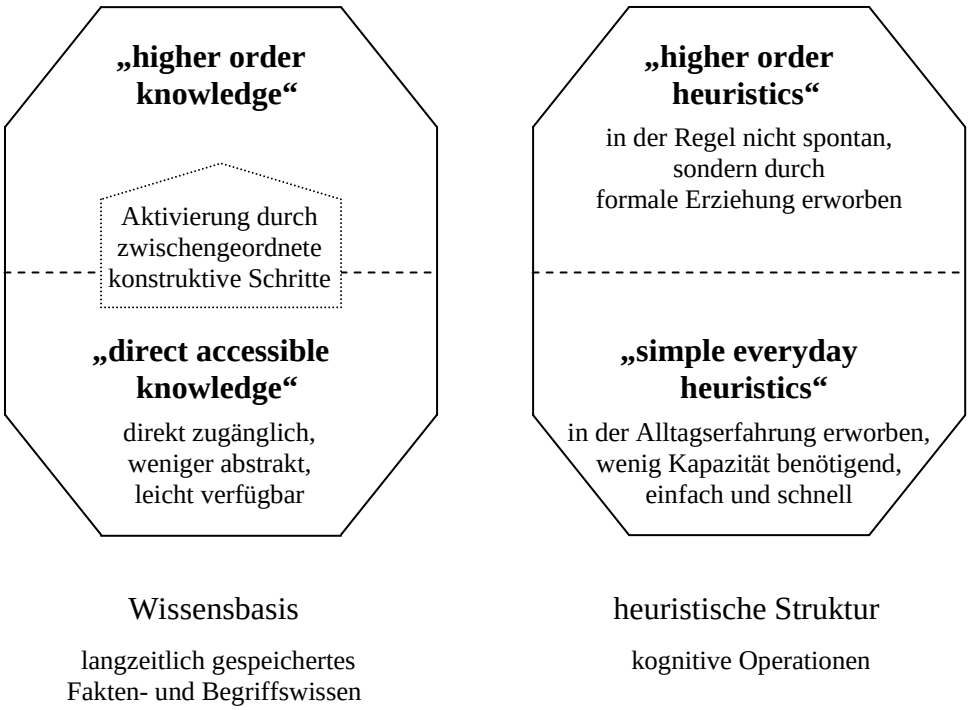


Abb. 3.1. Wissensbasis und heuristische Struktur (vgl. Scholz, 1988, S. 57 f.)

Für Scholz (1988, S. 58) sind sowohl das „higher order knowledge“ als auch die „higher order heuristics“, welche gemeinsam als „higher order domains“ bezeichnet werden, „durch den mathematischen Unterricht primär“ herauszubilden. In Bezug auf die Theorie des Conceptual Change kann also Wissen, das dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist, als „gelehrte Vorstellung“ aufgefasst werden. Diese „gelehrte Vorstellung“ wird mit der vorhande-

nen Vorstellung, welche dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden kann, verglichen und führt (wenn die im Abschnitt 1.1.3 beschriebenen Bedingungen erfüllt sind) im Prozess des Conceptual Change zu einer „neuen fachorientierten Vorstellung“ beziehungsweise „neuen wissenschaftlichen Vorstellung“, welche wiederum dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden kann. So weist Scholz (1988, S. 58) darauf hin, „dass auch entwicklungsmäßig Umstrukturierungen stattfinden können“. Beispielsweise können aus Elementen des „higher order knowledge“ Elemente des „direct accessible knowledge“ werden.

Neben der „Wissensbasis“ und der „heuristischen Struktur“ muss ein „Zielsystem“, welches auch als „Zielwissen“ bezeichnet wird, berücksichtigt werden. Dieses kann als eine Art normatives System aufgefasst werden, welches Wissensaneignung formt beziehungsweise Problembearbeitungsprozesse steuert. Zu beachten ist, dass das Zielsystem „intersituativ und intersubjektiv unterschiedlich organisiert ist und aktiviert werden kann“ (Scholz, 1988, S. 58). In der Theorie des Conceptual Change findet die Berücksichtigung des Zielsystems in Form von Elementen des kognitiven und des emotionalen Filters statt. Darüber hinaus ist eine „evaluative Struktur“ zu berücksichtigen, deren Elemente einen zweiten Typ von Heuristiken darstellen. Dieser Typ von Heuristik wird „nicht in der ‚vorwärtsgerichteten Problembearbeitung‘ eingesetzt, sondern [...] [dient] dazu, die Glaubwürdigkeit, die Plausibilität oder die Qualität von auf bestimmte Ziele hin bezogenen Produkten des Arbeitsgedächtnisses zu bewerten“ (Scholz, 1988, S. 58). In Bezug auf die Theorie des Conceptual Change können die Elemente der evaluativen Struktur als Elemente des kognitiven Filters aufgefasst werden, welche ebenfalls zur Bewertung der Plausibilität eingesetzt werden.

Unter Berücksichtigung dieser vier verschiedenen Typen von Wissen lässt sich der *intuitive Denkmodus* wie folgt kennzeichnen (vgl. Scholz, 1991, S. 231 f.): Aktiviert ist das „direct accessible knowledge“; es erfolgt keine systematische Suche, weder in der Wissensbasis noch in der heuristischen Struktur; angewendet werden hauptsächlich „simple everyday heuristics“; durch das Zielsystem und die evaluative Struktur ist lediglich eine schwache Steuerung des kognitiven Prozesses gegeben. Dies ist in der nachfolgenden Abbildung im grafischen Überblick dargestellt.

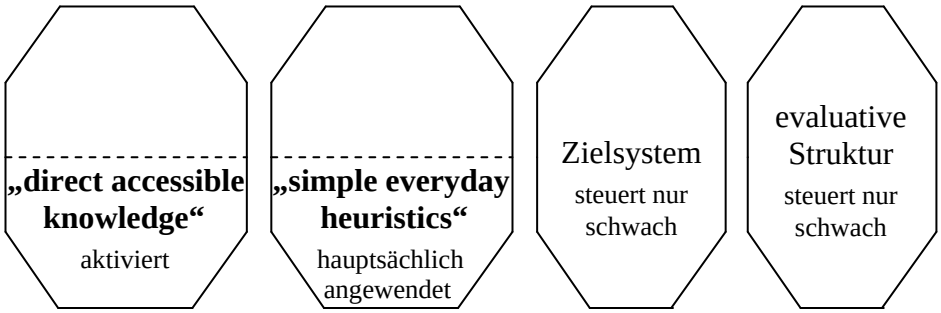


Abb. 3.2. Kennzeichen des intuitiven Denkmodus (vgl. Scholz, 1991, S. 231 f.)

Scholz (1991, S. 228) weist zudem darauf hin, dass die Anwendung von Wissen und von Heuristiken sowohl durch den persönlichen Background (Alter, Ausbildungsstand etc.) als auch durch die Art, in der ein Problem gerahmt ist, beeinflusst wird. In der Theorie des Conceptual Change werden diese beiden Einflüsse in Form von Elementen des emotionalen und des kognitiven Filters beziehungsweise in Form von externalen Variablen berücksichtigt. Der Einfluss der Problemrahmung auf das probabilistische Denken – und damit auch auf die angewendete Heuristik (Scholz, 1991, S. 222) – wird im Folgenden näher beschrieben.

3.2.3 Einfluss der Problemrahmung

Die Rahmung eines Problems wird von Scholz und Köntopp (1990, S. 109) „als eine wesentliche situative Variable für die Evozierung unterschiedlicher Strategientypen“ angesehen. So ist bei Problemstellungen, die im Kern eine identische Struktur aufweisen, ein Unterschied in der Bearbeitung feststellbar, wenn die situativen Bedingungen und/oder die Einkleidung des Problems verändert werden. Unter Bezug auf Bar-Hillel (1983) unterscheiden Scholz und Köntopp (1990) daher, was die Rahmenbedingungen einer Problemstellung anbelangt, zwischen einem

- „Problem Solving Framing“, abgekürzt mit „PSF“, und einem
- „Social Judgement Framing“, abgekürzt mit „SJF“.

Diese beiden Abkürzungen werden auch im weiteren Verlauf der Arbeit verwendet.

Kennzeichnend für das „Problem Solving Framing“ ist, „dass die Problemstellung einer typischen mathematischen Textaufgabe gleicht“ (Scholz & Köntopp, 1990, S. 110). Das beschriebene Problem wird dabei als hypothetisch oder künstlich-unrealistisch angesehen. Aus der Art der Problemstellung ist ersichtlich, dass eine eindeutige und exakte Antwort gegeben werden soll. Bei der Bearbeitung der Problemstellung ist eine Einführung von kompatiblen Zusatzannahmen, aus denen sich unterschiedliche Lösungen beziehungsweise Antworten ergeben, zudem kaum möglich. Als Beispiel wird von Scholz und Köntopp (1990, S. 111) folgende „Urnenaufgabe“ angeführt:

> Urnenaufgabe: „In zwei Urnen befinden sich verschiedenfarbige Kugeln. Urne 1 beinhaltet 40% weiße Kugeln. Urne 2 beinhaltet 80% weiße Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim Entnehmen je einer Kugel aus beiden Urnen, zwei weiße Kugeln zu ziehen?“

Das „Social Judgement Framing“ ist durch eine realistisch und nicht artifiziell erscheinende Problemstellung gekennzeichnet (Scholz & Köntopp, 1990, S. 110). Die betreffende Problemsituation erscheint alltäglich, wobei die vorliegenden Informationen nicht völlig präzise sind und interpretierbar wirken. Die Problembeschreibung bietet eine Vielzahl an Anknüpfungspunkten, sodass zum einen verschiedene Interpretationen der Problemstellung entwickelt werden können und zum anderen auch die Möglichkeit besteht, bei der Bearbeitung des Problems die persönliche Lebenserfahrung und eigene Bewertungen mit einzubringen, wodurch sich unterschiedliche Lösungen beziehungsweise Antworten ergeben können. Das folgende „Karten-Problem“ wird von Scholz und Köntopp (1990, S. 112) als Beispiel für das „Social Judgement Framing“ angeführt:

> Karten-Problem: „Ihr Lieblingssänger ist auf Deutschlandtournee und gastiert dabei in Ihrem Wohnort. Natürlich möchten Sie gerne Karten haben, aber diese sind sehr gefragt. Wenn Sie sich bereits morgens um 7:00 Uhr bei der Kartenvorverkaufsstelle, die von 9:00 bis 11:00 Uhr geöffnet ist, einfinden, beträgt die Wahrscheinlichkeit, bzw. die Chance eine Karte zu bekommen, an jedem der beiden Tage etwa 40%. Wie hoch schätzen Sie Ihre Wahrscheinlichkeit bzw. Chance, eine Karte zu bekommen, wenn Sie sich an zwei aufeinanderfolgenden Tagen dort anstellen können?“

Dass die situativen Bedingungen einen Einfluss auf das Wahrscheinlichkeitsverständnis haben, wurde bereits von Langer (1975) festgestellt. So veranlassen Faktoren fertigkeitsbestimmter Situationen, wie *Herausforderung*, *Wahlmöglichkeit*, *Vertrautheit* und „*Beteiligtsein*“ (im Sinne der Art der Einbindung in die Situation), Personen in einer authentischen Umgebung in stochastischen Situationen dazu, eine im Vergleich zur objektiven Wahrscheinlichkeit unangemessene Zuversicht (in Form einer „persönlichen Erfolgswahrscheinlichkeit“) zu empfinden. Es wird von den betreffenden Personen nicht berücksichtigt, dass nur in fertigkeitsbestimmten Situationen ein kausaler Zusammenhang zwischen dem eigenen Verhalten und dem Ergebnis besteht, wodurch Erfolg gewissermaßen kontrollierbar wird. In stochastischen Situationen existiert dieser Zusammenhang nicht. Das Geschehen ist dort zufällig, Er-

folg somit nicht kontrollierbar. Die Erwartung einer im Vergleich zur objektiven Wahrscheinlichkeit unangemessen höher liegenden persönlichen Erfolgswahrscheinlichkeit wird als *Beeinflussbarkeitsvorstellung* oder *Kontrollillusion* bezeichnet, im Original „illusion of control“ (Langer, 1975). Zu beachten ist, dass das Wahrscheinlichkeitsverständnis einer Person, die sich (tatsächlich) in einer stochastischen (Risiko-)Situation befindet, und das Wahrscheinlichkeitsverständnis derselben Person, die eine derartige Situation (außenstehend) analysiert, voneinander abweichen können (Langer, 1975; Wollring, 1994b). Den Kontrollillusionen lassen sich auch die im Abschnitt 2.2.3 beschriebenen animistischen Vorstellungen zuordnen, wenn die Vorstellung von Wesen mit der Vorstellung der Beeinflussbarkeit verbunden ist (Wollring, 1994b).

Da neben der Wissensbasis auch die heuristische Struktur beim intuitiven Denkmodus eine zentrale Rolle einnimmt, werden im Folgenden für das probabilistische Denken typische Heuristiken, insbesondere „simple everyday heuristics“ und die damit einhergehenden kognitiven Verzerrungen[1], ausführlich beschrieben.

3.2.4 Probabilistische Heuristiken

Eine Vielzahl alltäglicher Entscheidungen basiert gemäß Tversky und Kahneman (1982a) auf der Einschätzung der Wahrscheinlichkeit von Ereignissen, die als unsicher angesehen werden. Beispielhaft führen sie den Ausgang von Wahlen, die Schuld eines Angeklagten vor Gericht und den zukünftigen Wert des US-Dollars an. Charakteristische Formulierungen sind diesbezüglich „Ich denke, dass ...“, „Die Chancen sind ...“, „Es ist unwahrscheinlich, dass ...“ etc. (Tversky & Kahneman, 1982a, S. 3). Zwischen der Selbsteinschätzung bezüglich der Qualität der eigenen Vorhersagen und der objektiven Feststellung des Erfolgs dieser Vorhersagen besteht oftmals eine wesentliche Diskrepanz.

Tversky und Kahneman (1982a) weisen darauf hin, dass die subjektive Einschätzung der Wahrscheinlichkeit der subjektiven Einschätzung von physikalischen Größen, wie der Entfernung oder der Größe eines Objekts, ähnelt, indem sich die betreffenden Urteile auf Daten beziehen, deren Gültigkeit als beschränkt angesehen werden muss, und auf eine begrenzte Anzahl an heuristischen Prinzipien zurückgegriffen wird, welche die komplexen Aufgaben der Einschätzung von Wahrscheinlichkeiten und der Vorhersage von Werten auf einfachere Bewertungsoperationen reduzieren. Als Beispiel aus dem Alltag lässt sich die Einschätzung der Entfernung eines Objekts anführen. Hierbei wird die scheinbare Entfernung anhand der Schärfe, in der das Objekt erscheint, bestimmt: Je schärfer das betreffende Objekt gesehen wird, umso geringer wird die Entfernung eingeschätzt. Bei guten Sichtbedingungen, wie bei einer Föhnwetterlage, wird die tatsächliche Entfernung von weit entfernt liegenden Objekten dadurch sehr oft unterschätzt. Solche Verzerrungen sind bei der intuitiven Beurteilung von Wahrscheinlichkeiten ebenfalls feststellbar (Tversky & Kahneman, 1982a, S. 3). Im Abschnitt 3.2.6 wird darauf näher eingegangen.

3.2.5 „Simple everyday heuristics“

Bei der intuitiven Einschätzung von Wahrscheinlichkeiten und der Vorhersage von Werten wird laut Tversky und Kahneman (1982a) typischerweise auf drei Heuristiken zurückgegriffen, die im Sinne des Prozess-Struktur-Modells von Scholz (1987) als „simple everyday heuristics“ bezeichnet werden können: erstens die Heuristik der *Repräsentativität*, im Original als

[1] In Anlehnung an Scholz (1986) wird „bias“ (engl.) in der deutschen Übersetzung als „Verzerrung“ bezeichnet.

„Representativeness“ bezeichnet, zweitens die Heuristik der *Verfügbarkeit*, im Original als „Availability“ bezeichnet, und drittens die Heuristik der *Adjustierung von einem Anker aus*, im Original als „Adjustment from an anchor“ bezeichnet.

Repräsentativität. Die Heuristik der *Repräsentativität* wird für gewöhnlich angewendet, wenn die Wahrscheinlichkeit eingeschätzt werden soll, dass ein Objekt oder Ereignis *A* zur Klasse oder zum Prozess *B* gehört. Bei der „Repräsentativität“ werden Wahrscheinlichkeiten nach dem Grad eingeschätzt, zu dem *A* für *B* repräsentativ ist, also danach, wie sehr *A* zu *B* ähnlich ist (Tversky & Kahneman, 1982a, S. 4). Gewissermaßen wird also nach einem Stereotyp gesucht. Folgendes Beispiel aus dem Alltag illustriert dies (vgl. Tversky & Kahneman, 1982a, S. 4): Ein ehemaliger Nachbar beschreibt einen Bekannten mit den Worten „Steve ist sehr schüchtern und lebt zurückgezogen, ist ausnahmslos hilfsbereit, aber er zeigt wenig Interesse an anderen Menschen und an seiner Umgebung. Eine sanfte und anständige Seele, mit einem Hang zur Ordnung und zur Strukturiertheit und mit Liebe zum Detail.“ Soll eingeschätzt werden, welchen Beruf Steve von den drei zur Auswahl stehenden Berufen „Bibliothekar“, „Pilot bei einer Airline“ und „Verkäufer“ am wahrscheinlichsten ausübt, so wird beispielsweise die Wahrscheinlichkeit, dass Steve ein Bibliothekar ist, danach eingeschätzt, wie sehr die Beschreibung von Steve dem (subjektiven) Stereotyp eines Bibliothekars ähnelt. Für die beiden anderen zur Auswahl stehenden Berufe ist das Vorgehen zur Einschätzung der Wahrscheinlichkeit analog. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Objekt einer bestimmten Population zuzuordnen ist, wird also „nach [der] Ähnlichkeit zu Hauptmerkmalen der Population oder nach hervorspringenden Merkmalen der Stichprobenziehung“ (Nothbaum & Scholz, 1995, S. 98) beurteilt. Im Beispiel von Steve ist bei dieser Vorgehensweise somit im Allgemeinen mit der Antwort „Bibliothekar“ zu rechnen.

Verfügbarkeit. Soll die Häufigkeit einer Klasse oder die Plausibilität einer bestimmten Entwicklung eingeschätzt werden, so kommt zumeist die Heuristik der *Verfügbarkeit* (bezogen auf Beispiele und Szenarien) zum Einsatz. Bei der Anwendung dieser Heuristik wird die Häufigkeit einer Klasse oder die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses danach beurteilt, wie leicht zugehörige Beispiele oder betreffende Ereignisse ins Gedächtnis gerufen werden können (Tversky & Kahneman, 1982a, S. 11). Die „Verfügbarkeit“ gibt einen nützlichen Hinweis zum Einschätzen der Häufigkeit oder der Wahrscheinlichkeit, da Beispiele großer Klassen für gewöhnlich besser und schneller präsent sind als Beispiele kleinerer Klassen. So kann zur Einschätzung des Risikos für einen Herzinfarkt bei Personen im mittleren Lebensalter beispielsweise das Auftreten von Herzinfarkten bei Personen der betreffenden Altersgruppe im eigenen Bekanntenkreis in Erinnerung gerufen werden. Bezüglich des Festhaltens an der Anwendung der Heuristik der *Verfügbarkeit* ist der Einfluss der lebenslangen Erfahrung hervorzuheben. Dieser lehrt im Allgemeinen, dass Beispiele einer großen Klasse besser und schneller hervorgerufen werden können als Beispiele einer kleinen Klasse, dass wahrscheinliche Ereignisse leichter vorstellbar sind als unwahrscheinliche und dass assoziative Verbindungen zwischen Ereignissen gestärkt werden, wenn die betreffenden Ereignisse häufig zusammen eintreten (Tversky & Kahneman, 1982a, S. 14). Die Heuristik der *Verfügbarkeit* ermöglicht also das Einschätzen der Anzahl einer Klasse, der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses und der Häufigkeit des gemeinsamen Eintretens von Ereignissen anhand der Leichtigkeit, mit der die entsprechenden gedanklichen Operationen des Hervorrufens, der Konstruktion oder der Assoziation ausgeführt werden können. Nothbaum und Scholz (1995, S. 98) weisen darauf hin, dass die betreffenden Urteile auf der Grundlage von subjektiv verfügbaren Informationen gefällt werden und sich eventuell „individuelle Wahrnehmungsmöglichkeiten, Gedächtniskapazitäten und unterschiedliche Rekonstruktionsmöglichkeiten“ verzerrend auswirken.

Adjustierung von einem Anker aus. Die Heuristik der *Adjustierung von einem Anker aus* wird für gewöhnlich eingesetzt, wenn ein Referenzwert verfügbar ist und eine numerische Voraussage abgegeben werden soll (Tversky und Kahneman, 1982a, S. 20). Der als Anker

gewählte Wert kann dabei entweder durch die Formulierung der Problemstellung als naheliegend erscheinen oder sich aus einer teilweisen Berechnung ergeben. Ein Beispiel aus dem Alltag für die Anwendung dieser Heuristik wäre die Einschätzung der Prozentzahl der Stimmen, die bei einer Stichwahl zwischen drei Kandidaten auf einen bestimmten Kandidaten entfällt, wenn bereits bekannt ist, dass einer der beiden anderen Kandidaten die erforderliche Mehrheit erhalten hat. Von Scholz und Köntopp (1990) wird diesbezüglich die Reproduktion einer Zahl aus dem Aufgabentext bei einer schriftlichen Problemstellung als „Verankerungslösung“ beziehungsweise „stand pat error“ bezeichnet. Die Heuristik der *Adjustierung von einem Anker aus* ergibt sich, indem in einem Inferenzprozess von dieser Verankerungslösung ausgegangen und die Lösung durch grobe Modifikation erhalten wird (Scholz & Köntopp, 1990, S. 113).

Zusammenfassend weisen Tversky und Kahneman (1982a) darauf hin, dass die beschriebenen drei Heuristiken zwar höchst ökonomisch und im Allgemeinen auch effektiv sind, jedoch zu systematischen und (da die Anwendung intuitiv erfolgt) in der Regel nur von externen Beobachtern vorhersagbaren Fehlern führen. Wie es zu diesen systematischen und vorhersagbaren Fehlern kommt, wird im Folgenden näher untersucht.

3.2.6 Einhergehende kognitive Verzerrungen

„Repräsentativität“, „Verfügbarkeit“ und „Adjustierung von einem Anker aus“ werden, wie bereits erwähnt, zur intuitiven Einschätzung von Wahrscheinlichkeiten und Vorhersage von Werten eingesetzt. Mit der Anwendung dieser Heuristiken gehen allerdings kognitive Verzerrungen einher, indem der Einfluss mehrerer für die Einschätzung und Vorhersage relevanter Faktoren nicht berücksichtigt wird.

Bei der „Repräsentativität“ erfolgt die Einschätzung der Wahrscheinlichkeit nach dem Grad der Ähnlichkeit zu einem Stereotyp. Die Anwendung dieser Heuristik geht mit folgenden kognitiven Verzerrungen einher (vgl. Tversky & Kahneman, 1982a):

- erstens der Insensibilität gegenüber der a-priori-Wahrscheinlichkeit der Ergebnisse,
- zweitens der Insensibilität gegenüber der Stichprobengröße,
- drittens Fehlvorstellungen von Zufall,
- viertens der Insensibilität gegenüber der Vorhersagbarkeit,
- fünftens der Illusion der Validität und
- sechstens Fehlvorstellungen von Regression.

Einhergehend mit der Anwendung der Heuristik der *Repräsentativität* ist die Insensibilität gegenüber der a-priori-Wahrscheinlichkeit der Ergebnisse. Die a-priori-Wahrscheinlichkeit der Ergebnisse wird außer Acht gelassen, da sie keinen Einfluss auf die Repräsentativität der Ergebnisse hat (Tversky & Kahneman, 1982a, S. 4). Gleiches gilt für die Grundrate der relativen Häufigkeit. Bezogen auf das im vorangegangenen Abschnitt beschriebene Beispiel von Steve, der entweder Bibliothekar oder Pilot bei einer Airline oder Verkäufer ist, wird also bei der Einschätzung, welchen der drei genannten Berufe Steve am wahrscheinlichsten ausübt, nicht berücksichtigt, dass es unter allen Berufstätigen weitaus mehr Verkäufer als Bibliothekare und als Piloten bei einer Airline gibt. Tversky und Kahneman (1982a) merken an, dass die a-priori-Wahrscheinlichkeit der Ergebnisse und die Grundrate der relativen Häufigkeit nur dann berücksichtigt werden, wenn keine Informationen vorliegen. Dies wäre also im Beispiel der Fall, wenn keine Beschreibung von Steve gegeben wäre. Sobald Informationen verfügbar sind, werden diese zur Einschätzung herangezogen, unabhängig von der Relevanz. Die a-priori-Wahrscheinlichkeit der Ergebnisse und die Grundrate der relativen Häufigkeit werden dabei außer Acht gelassen.

Mit der Anwendung der Heuristik der *Repräsentativität* geht auch die Insensibilität gegenüber der Stichprobengröße einher. Die Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses einer Stichprobe wird nach der Ähnlichkeit des Ergebnisses zum entsprechenden Parameter der Stichprobe beurteilt, die Größe der Stichprobe wird dabei nicht berücksichtigt (Tversky & Kahneman, 1982a, S. 6).

> Als Beispiel lässt sich die Einschätzung der Wahrscheinlichkeit anführen, dass in einer Stichprobe von 10 Männern die Durchschnittsgröße 180 cm beträgt. Die Einschätzung erfolgt dabei im Allgemeinen nach der „Repräsentativität“, also danach, wie sehr 180 cm zur durchschnittlichen Größe aller Männer (dem entsprechenden Parameter der Stichprobe) ähnlich ist. Bezogen auf die Frage, in welcher Stichprobe eine Durchschnittsgröße von mehr als 180 cm am wahrscheinlichsten ist, bei 1 000, 100 oder 10 Männern, wird in der Regel allen drei Stichproben die gleiche Wahrscheinlichkeit zugeordnet – die unterschiedliche Größe der drei Stichproben wird außer Acht gelassen (und damit auch, dass gemäß der Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen eine Durchschnittsgröße von mehr als 180 cm bei der kleinsten Stichprobengröße, also bei 10 Männern, am wahrscheinlichsten ist).

Eine ähnliche Insensibilität gegenüber der Stichprobengröße ist bei der Beurteilung der a-posteriori-Wahrscheinlichkeit (der Wahrscheinlichkeit, dass eine Stichprobe eher aus einer als aus einer anderen Grundgesamtheit entnommen wurde) feststellbar (Tversky & Kahneman, 1982a, S. 6). Auch hier wird das intuitive Urteil hauptsächlich durch die Zusammensetzung der Stichprobe beeinflusst und nicht durch die Stichprobengröße. Folgendes Beispiel wird von Tversky und Kahneman (1982a, S. 6 f.) angeführt:

> Aus einer Urne, die zu zwei Dritteln mit Bällen einer Farbe und zu einem Drittel mit Bällen einer anderen Farbe gefüllt ist, werden zwei Stichproben entnommen. Die erste der beiden Stichproben besteht aus fünf Bällen, davon sind 4 Bälle rot, 1 Ball ist weiß. Die zweite Stichprobe besteht aus zwanzig Bällen, davon sind 12 Bälle rot und 8 Bälle weiß. Eingeschätzt werden soll, anhand welcher der beiden Stichproben mit größerer Wahrscheinlichkeit darauf geschlossen werden kann, dass die Urne zu zwei Dritteln mit roten Bällen und zu einem Drittel mit weißen Bällen gefüllt ist. Im Allgemeinen wird das Ergebnis der ersten Stichprobe als weitaus repräsentativer als das Ergebnis der zweiten Stichprobe dafür angesehen, dass die Urne zu zwei Dritteln mit roten Bällen und zu einem Drittel mit weißen Bällen gefüllt ist, obwohl sich unter der Voraussetzung der gleichen a-priori-Wahrscheinlichkeit a posteriori aus der ersten Stichprobe ein Chancenverhältnis von 8 : 1 und aus der zweiten Stichprobe ein Chancenverhältnis von 16 : 1 für diese Zusammensetzung des Urneninhalts ergibt.

Tversky und Kahneman (1982a, S. 7) weisen zudem darauf hin, dass die a-posteriori-Chancenverhältnisse intuitiv viel zu vorsichtig eingeschätzt werden im Vergleich zu den tatsächlichen a-posteriori-Chancenverhältnissen – diese Unterschätzung der Auswirkung der Evidenz wird als „conservatism“ bezeichnet.

Die Anwendung der Heuristik der *Repräsentativität* geht auch mit Fehlvorstellungen von Zufall einher.

> So stellen Tversky und Kahneman (1982a) fest, dass bei einem zufälligen Prozess in der Regel erwartet wird, dass die grundlegende Charakteristik des Prozesses repräsentiert wird, und zwar nicht nur global in der ganzen Sequenz, sondern auch lokal in jedem Teil davon. Beispielhaft lässt sich das sechsmalige Werfen einer Münze anführen. Als Ergebnis wird die Sequenz K-Z-K-Z-Z-K (wobei „K“ für „Kopf“ und „Z“ für „Zahl“ steht) als wahrscheinlicher eingeschätzt als die Sequenz K-K-K-Z-Z-Z, welche nicht als repräsentativ für eine zufällige Sequenz angesehen wird, aber wiederum als wahrscheinlicher eingeschätzt wird als die Sequenz K-K-K-K-Z-K, welche nicht widerspiegelt, dass bei jedem einzelnen Wurf einer fairen Münze „Kopf“ und „Zahl“ gleich wahrscheinlich sind.

Tversky und Kahneman (1982a, S. 7) weisen darauf hin, dass die Vorstellung von der lokalen Repräsentativität die Ursache für einen Fehlschluss[2] ist, der als „gambler’s fallacy“ bezeichnet wird: Der Zufall wird als sich selbst regulierender Prozess angesehen, in dem eine Abweichung in die eine Richtung zu einer Abweichung in die andere Richtung führt, damit das Gesamtgleichgewicht wieder hergestellt ist.

---

[2]In Anlehnung an Scholz (1986) wird „fallacy“ (engl.) in der deutschen Übersetzung als „Fehlschluss“ bezeichnet, im Sinne des Abweichens von einer Norm, hier der „objektiven (formalen) Einschätzung“.

Beispielhaft lässt sich der irrtümliche Glaube einer großen Anzahl von Roulette-Spielern anführen, dass nach einer Serie von „rouge“ beim nächsten Spiel „noir“ wahrscheinlicher ist, weil die sich ergebende Sequenz dann repräsentativer für den Zufall erscheint als bei einem nochmaligen „rouge“.

Eine weitere Fehlvorstellung, die mit der Anwendung der Heuristik der *Repräsentativität* einhergeht, ist die Vorstellung, dass auch Stichproben von sehr kleiner Größe hoch repräsentativ für die Grundgesamtheit sind, aus der sie entnommen wurden. Diese Vorstellung wird als Vorstellung vom „Gesetz der kleinen Zahlen“ bezeichnet. Dabei wird angenommen, dass eine Hypothese über die Grundgesamtheit (immer) durch ein statistisch signifikantes Ergebnis in einer Stichprobe repräsentiert wird – unabhängig von der Größe der Stichprobe.

Mit der Anwendung der Heuristik der *Repräsentativität* geht auch die Insensibilität gegenüber der Vorhersagbarkeit einher. Es wird bei der Anwendung dieser Heuristik nicht berücksichtigt, dass eine (genaue) numerische Vorhersage unter Umständen gar nicht möglich ist (Tversky & Kahneman, 1982a, S. 8).

Beispielhaft lassen sich numerische Vorhersagen von Unternehmensgewinnen und von Ergebnissen von Fußballspielen anführen. Diese Vorhersagen basieren in der Regel auf Beschreibungen der betreffenden Unternehmen beziehungsweise Mannschaften und spiegeln den Grad wider, zu dem die Beschreibungen als günstig erscheinen, wobei die Verlässlichkeit der Beschreibungen und der Grad, zu dem die Beschreibungen eine genaue Vorhersage erlauben, außer Acht gelassen werden.

Tversky und Kahneman (1982a, S. 8) weisen darauf hin, dass sich aus der Berücksichtigung der Vorhersagbarkeit ergibt, welche Bandbreite eine numerische Vorhersage haben kann und wie extrem die betreffende Vorhersage ausfallen darf. Wenn die Berücksichtigung der Vorhersagbarkeit ergibt, dass keine (genaue) numerische Vorhersage möglich ist, dann sollte jeweils die gleiche Vorhersage gemacht werden. Bezogen auf das Beispiel der Unternehmensgewinne bedeutet dies, dass für alle Unternehmen die gleichen Gewinne vorhergesagt werden sollten, wenn keine für die Vorhersage relevanten Informationen zur Verfügung stehen. Intuitive Vorhersagen verletzen diese Regel jedoch oftmals.

Die Anwendung der Heuristik der *Repräsentativität* geht auch mit der Illusion der Validität einher. Tversky und Kahneman (1982a, S. 9) bezeichnen das ungerechtfertigte Vertrauen, das aus einer guten Übereinstimmung zwischen dem vorhergesagten Ergebnis und der als Input vorliegenden Information erwächst, als „Illusion der Validität“.

Bezogen auf das Beispiel von Steve wird bei der Einschätzung, welchen der drei Berufe Steve am wahrscheinlichsten ausübt, der Beruf favorisiert (das heißt als Ergebnis gewählt), der mit der Beschreibung von Steve (also mit der als Input vorliegenden Information) am besten übereinzustimmen scheint. Das Vertrauen in die eigene Vorhersage hängt dabei primär vom Grad der Repräsentativität des gewählten Ergebnisses für die als Input vorliegende Information ab – Faktoren, die die Genauigkeit der Vorhersage einschränken, werden dabei kaum oder gar nicht berücksichtigt.

Tversky und Kahneman (1982a, S. 9) weisen darauf hin, dass die Illusion der Validität in der Regel sogar trotz des Bewusstseins von Faktoren, die die Genauigkeit der Vorhersage einschränken, bestehen bleibt. Entscheidend für das Vertrauen in eine Vorhersage, die auf einem Input basiert, ist die internale Konsistenz des Inputschemas. Eine große Konsistenz liegt meist dann vor, wenn die Inputvariablen korreliert oder hoch redundant sind. Mit zunehmender Redundanz der Inputvariablen steigt also das Vertrauen in Vorhersagen, die auf der Grundlage dieses Inputs getroffen werden, obwohl die Genauigkeit der betreffenden Vorhersagen aufgrund der Redundanz der Inputvariablen sinken müsste.

Beispielhaft für den Einfluss der internalen Konsistenz eines Inputschemas auf das Vertrauen in eine Vorhersage, die auf diesem Input basiert, lässt sich die Vorhersage des Notendurchschnitts eines Schülers im Abschlusszeugnis aufgrund der Noten in den einzelnen Fächern am Ende des ersten Schuljahres anführen. Liegen am Ende des ersten Schuljahres in allen Fächern die gleichen Noten vor (zum Beispiel nur Zweier), so ist das Vertrauen in den vorhergesagten Notendurchschnitt im Abschlusszeugnis im Allgemeinen (ungerechtfertigterweise) größer als bei sehr unterschiedlichen Noten in den einzelnen Fächern am Ende des ersten Schuljahres.

Mit der Anwendung der Heuristik der *Repräsentativität* gehen auch Fehlvorstellungen von Regression einher. So wird in vielen Kontexten, in denen eine Regression zwangsläufig auftreten muss, keine Regression erwartet – wenn das Auftreten einer Regression entdeckt wird, werden dafür oftmals „fadenscheinige“ kausale Erklärungen erfunden (Tversky & Kahneman, 1982a, S. 10). Für Tversky und Kahneman (1982a) bleibt das Phänomen der Regression deswegen so schwer fassbar, weil es nicht vereinbar ist mit der Vorstellung, dass ein vorhergesagtes Ergebnis so repräsentativ wie möglich für den Input sein muss (und daher der Wert der Variable des Ergebnisses genauso extrem wie der Wert der Inputvariable zu sein hat).

Als Beispiel aus dem Alltag lässt sich die Einschätzung von erfahrenen Fluglehrern anführen, dass Belohnungen eine negative und Bestrafungen eine positive Auswirkung auf den fliegerischen Lernprozess haben, was damit begründet wird, dass nach einer außergewöhnlich guten Landung, die von Lob gefolgt ist, typischerweise eine schlechtere Landung folgt, wohingegen auf eine schlechte Landung, die von harscher Kritik begleitet ist, für gewöhnlich eine deutlich bessere Landung folgt.

Das Nichtverstehen des Effekts der Regression führt hierbei zur Überschätzung der Effektivität von Bestrafungen und zur Unterschätzung der Effektivität von Belohnungen. Obwohl das Phänomen der „Regression zur Mitte“ gemäß Tversky und Kahneman (1982a, S. 10) bereits vor mehr als 100 Jahren dokumentiert wurde und zudem im Alltag weit verbreitet ist, scheinen sich diesbezüglich keine zutreffenden Intuitionen zu entwickeln.

Bei der „Verfügbarkeit“ hängt die Einschätzung der Häufigkeit oder der Wahrscheinlichkeit von der Leichtigkeit ab, mit der Beispiele oder Ereignisse ins Gedächtnis gerufen werden können. Die Anwendung dieser Heuristik ist mit folgenden kognitiven Verzerrungen einhergehend (vgl. Tversky & Kahneman, 1982a):

- erstens Illusionen aufgrund der Abrufbarkeit von Beispielen,
- zweitens Illusionen aufgrund der Effektivität der Suchstrategie,
- drittens der Illusion der Vorstellbarkeit und
- viertens der illusorischen Korrelation.

Die Anwendung der Heuristik der *Verfügbarkeit* geht mit Illusionen aufgrund der Abrufbarkeit von Beispielen einher. Können zu einer Klasse Beispiele leicht abgerufen werden, so wird die Klasse zahlenmäßig größer erscheinen als eine gleich häufige Klasse, deren Beispiele weniger gut abrufbar sind.

Folgendes Beispiel belegt dies (vgl. Tversky & Kahneman, 1982a, S. 11): Wird eine Liste mit den Namen verschiedener bekannter weiblicher und männlicher Personen vorgelesen, wobei es sich bei den Namen in einer der beiden gleich großen Gruppen (weibliche bzw. männliche Personen) um vergleichsweise berühmtere Personen als in der anderen Gruppe handelt, so wird die Gruppe mit den berühmteren Personen im Nachhinein fälschlicherweise als zahlenmäßig größer eingeschätzt als die andere Gruppe, da die betreffenden Namen vertrauter erscheinen.

Neben der Vertrautheit haben noch andere Faktoren, wie das Hervorstechen oder das zeitliche Zurückliegen von Beispielen, einen Einfluss auf die Abrufbarkeit.

Beispielhaft lässt sich anführen, dass zum einen die Gefahr eines Wohnungsbrandes als größer eingeschätzt wird, wenn ein Wohnungsbrand bereits selbst miterlebt wurde (und nicht nur in der Zeitung davon gelesen wurde), und dass zum anderen das Unfallrisiko im Straßenverkehr im Vergleich zu sonst als höher eingeschätzt wird, wenn erst vor kurzem ein Unfall beobachtet wurde.

Einhergehend mit der Anwendung der Heuristik der *Verfügbarkeit* sind Illusionen aufgrund der Effektivität der Suchstrategie. Die Leichtigkeit, mit der Beispiele ins Gedächtnis gerufen werden können, hängt auch von der Suchstrategie ab.

Dies wird durch folgendes Beispiel belegt (vgl. Tversky & Kahneman, 1982a, S. 12): Soll eingeschätzt werden, ob ein zufällig aus einem Text in englischer Sprache ausgewähltes Wort mit mehr als drei Buchstaben mit größerer Wahrscheinlichkeit ein „r“ am Wortanfang oder an dritter Stelle hat, so wird in der Regel versucht, möglichst viele verschiedene Wörter aus dem Gedächtnis hervorzurufen, die mit einem „r“ beginnen (z. B. „road“) beziehungsweise bei denen ein „r“ an dritter Stelle steht (z. B. „dirt“). Da es

einfacher ist, Wörter nach ihrem Anfangsbuchstaben als nach dem an dritter Stelle stehenden Buchstaben aus dem Gedächtnis hervorzurufen, wird die Wahrscheinlichkeit, dass der Buchstabe „r“ am Wortanfang steht, im Allgemeinen als größer eingeschätzt – fälschlicherweise, da der Konsonant „r“ in der englischen Sprache relativ gesehen häufiger an dritter Stelle vorkommt als an erster Stelle.

Tversky und Kahneman (1982a) weisen zudem darauf hin, dass unterschiedliche Aufgabenstellungen unterschiedliche Suchmuster auslösen.

Beispielhaft für die Anwendung einer anderen Art von Suchstrategie lässt sich die Einschätzung der Häufigkeit anführen, mit der abstrakte Wörter, wie „thought“ oder „love“, und konkrete Wörter, wie „door“ oder „water“, im schriftlichen Englisch vorkommen. Zur Beantwortung dieser Frage wird zumeist nach Kontexten gesucht, in denen die betreffenden Wörter vorkommen könnten. Da Kontexte, die abstrakte Begriffe, wie „love“, beinhalten, leichter vorstellbar sind als Kontexte, in denen konkrete Begriffe, wie „door“, erwähnt werden, wird die Häufigkeit von abstrakten Wörtern im Vergleich zur Häufigkeit von konkreten Wörtern als größer eingeschätzt – sofern die Anzahl der verfügbaren Kontexte als Grundlage zur Einschätzung herangezogen wird. Anzumerken ist, dass abstrakte und konkrete Wörter im schriftlichen Englisch in etwa gleich häufig vorkommen.

Mit der Anwendung der Heuristik der „Verfügbarkeit“ geht auch die Illusion der Vorstellbarkeit einher. Tversky und Kahneman (1982a, S. 12) verweisen auf den Fall, dass die Häufigkeit einer Klasse eingeschätzt werden soll, zu der keine Beispiele im Gedächtnis abgespeichert sind, aber gemäß einer vorgegebenen Regel erzeugt werden können. In diesem Fall werden typischerweise einige Beispiele generiert und die Häufigkeit oder Wahrscheinlichkeit wird anhand der Leichtigkeit, mit der die betreffenden Beispiele generiert werden können, eingeschätzt. Jedoch spiegelt die Leichtigkeit nicht immer die tatsächliche Häufigkeit der zugehörigen Klasse wider.

Beispielhaft lässt sich die Einschätzung, wie viele verschiedene Komitees mit 2 (3, 4, ..., 8) Mitgliedern aus einer Gruppe von zehn Personen gebildet werden können, anführen. Wird keine Berechnung durchgeführt, so kann die Einschätzung der Anzahl anhand der gedanklichen Bildung einzelner Komitees erfolgen, wobei Komitees mit jeweils zwei Mitgliedern leichter generiert werden können als beispielsweise Komitees mit jeweils acht Mitgliedern. Aus der ursprünglichen Gruppe von zehn Personen lassen sich (ohne weiterführende Überlegungen) fünf verschiedene Komitees mit jeweils zwei Mitgliedern bilden, jedoch lässt sich nur ein Komitee mit acht Mitgliedern bilden, was in der Regel dazu führt, dass die Anzahl der Komitees mit wenigen Mitgliedern zahlenmäßig größer eingeschätzt wird als die Anzahl der Komitees mit vielen Mitgliedern, obwohl die tatsächliche Anzahl für n Mitglieder und $(10 - n)$ Mitglieder, mit $n = 2, 3, 4, ..., 8$, identisch ist.

Tversky und Kahneman (1982a) merken an, dass die Vorstellbarkeit eine wichtige Rolle bei der Einschätzung von Wahrscheinlichkeiten in Alltagssituationen spielt, wobei die Leichtigkeit, mit der Beispiele einer Klasse erzeugt werden können, auch hier nicht mit der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit der betreffenden Klasse übereinstimmen muss.

Beispielhaft lässt sich die Einschätzung des Risikos bei einer Abenteuerexpedition anführen, welche entscheidend durch die Vorstellbarkeit möglicher Gefahren beeinflusst wird, sodass das Risiko unter Umständen stark über- oder unterschätzt wird – Ersteres wird durch eine „lebhafte Phantasie“ begünstigt, Letzteres ergibt sich, indem an bestimmte Gefahren „schlicht und einfach“ nicht gedacht wird.

Die Anwendung der Heuristik der *Verfügbarkeit* geht darüber hinaus mit der illusorischen Korrelation einher. Hiermit wird eine Verzerrung bei der Beurteilung der Häufigkeit, mit der zwei Ereignisse zusammen eintreten, bezeichnet (Tversky & Kahneman, 1982a, S. 13). So wird im Allgemeinen die Häufigkeit des gemeinsamen Eintretens zweier assoziativ verbundener Ereignisse merklich überschätzt.

Folgendes Beispiel belegt dies (vgl. Tversky & Kahneman, 1982a, S. 13): Mehreren Testpersonen wurde jeweils ein Bild von einer Person vorgelegt und mitgeteilt, dass dieses Bild (angeblich) von einem Patienten gezeichnet wurde, bei dem eine bestimmte psychische Auffälligkeit, wie beispielsweise krankhaftes Misstrauen, diagnostiziert worden war. Von den Testpersonen sollte im Anschluss an eine Serie von Bildern und Diagnosen die Häufigkeit eingeschätzt werden, mit der die jeweilige Diagnose (wie krankhaftes Misstrauen) von bestimmten Merkmalen des zugehörigen Bildes begleitet worden war (zum Beispiel eigenartige Augen der gezeichneten Person). Die Häufigkeit eines Zusammenhangs zwischen Diagnose und Merkmalen des Bildes wurde dabei deutlich überschätzt.

Tversky und Kahneman (1982a, S. 13) merken an, dass der Effekt der illusorischen Korrelation extrem resistent gegenüber widersprechenden Daten ist und bei den Testpersonen aufgrund der Stärke der assoziativen Verbindung sogar dann, wenn die Korrelation zwischen Symptom und Diagnose in Wirklichkeit negativ war, noch vorlag.

Bei der „Adjustierung von einem Anker aus“ wird von einem Referenzwert ausgegangen, um eine numerische Voraussage abzugeben. Mit der Anwendung dieser Heuristik gehen folgende kognitive Verzerrungen einher (vgl. Tversky & Kahneman, 1982a):

- erstens die ungenügende Adjustierung,
- zweitens Fehlvorstellungen bei der Bewertung konjunktiver und disjunktiver Ereignisse und
- drittens die Verankerung bei der Einschätzung von subjektiven Wahrscheinlichkeitsverteilungen.

Mit der Anwendung der Heuristik der *Adjustierung von einem Anker aus* geht die ungenügende Adjustierung einher. So führen unterschiedliche Referenzwerte im Allgemeinen zu unterschiedlichen numerischen Einschätzungen. Dies lässt sich anhand des folgenden Beispiels illustrieren, welches in Bezug auf den im Abschnitt 3.2.3 beschriebenen Einfluss der Problemrahmung zeigt, wie das stochastische Verständnis durch die situativen Bedingungen beeinflusst sein kann (vgl. Tversky & Kahneman, 1982a, S. 14):

> Mehrere Testpersonen sollten den prozentualen Anteil der afrikanischen Länder an den Ländern der Vereinten Nationen einschätzen. Dazu wurde in Anwesenheit der jeweiligen Testperson mithilfe eines Glücksrades zuerst eine Zahl – entweder 10 oder 65 – ermittelt. Die Testperson sollte dann angeben, ob der tatsächliche Prozentsatz größer oder kleiner ist als die ermittelte Zahl. Anschließend sollte die Testperson den Prozentsatz numerisch einschätzen. Für die Zahl 10 ergab sich als Median der numerischen Einschätzungen 25, für die Zahl 65 dagegen 45.

Tversky und Kahneman (1982a, S. 15) weisen darauf hin, dass die ungenügende Adjustierung auch bei der Einschätzung des Ergebnisses von nicht vollständigen Berechnungen eine Rolle spielt.

> Beispielhaft lässt sich die numerische Einschätzung des Werts des Produkts $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$ beziehungsweise $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ anführen, wenn die Einschätzung unter Zeitdruck (das heißt ohne die Möglichkeit zur Durchführung einer kompletten Berechnung) erfolgt. So wurde einer Gruppe von Testpersonen das erste, einer anderen Gruppe von Testpersonen das zweite der beiden Produkte vorgelegt, wobei der Wert des jeweiligen Produkts innerhalb von fünf Sekunden numerisch eingeschätzt werden sollte. Für den Wert des ersten Produkts ergab sich als Median der numerischen Einschätzungen 512, für den Wert des zweiten Produkts dagegen 2 250. Der tatsächliche Wert des Produkts beträgt 40 320. Was das Vorgehen zur Einschätzung anbelangt, so wurde von den Testpersonen in der Regel der Wert der ersten Teilprodukte (von links nach rechts gesehen) berechnet und der Wert des (ganzen) Produkts durch Extrapolation des berechneten Werts eingeschätzt. Der größere Wert für den Median der numerischen Einschätzungen beim zweiten der beiden Produkte lässt sich folglich darauf zurückführen, dass der Wert der ersten Teilprodukte beim zweiten der beiden Produkte größer ist als beim ersten. Dass sowohl der Wert des ersten Produkts als auch der Wert des zweiten Produkts im Vergleich zum tatsächlichen Wert unterschätzt wurden, kann mit der ungenügenden Adjustierung (vgl. Tversky & Kahneman, 1982a, S. 15) und einer Tendenz zum „conservatism“ erklärt werden.

Einhergehend mit der Anwendung der Heuristik der *Adjustierung von einem Anker aus* sind Fehlvorstellungen bei der Bewertung konjunktiver und disjunktiver Ereignisse. So besteht bei der Einschätzung von Wahrscheinlichkeiten im Allgemeinen die Tendenz, die Wahrscheinlichkeit von konjunktiven Ereignissen zu überschätzen und die Wahrscheinlichkeit von disjunktiven Ereignissen zu unterschätzen.

> Beispielhaft lässt sich die Einschätzung der Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse anführen (vgl. Tversky & Kahneman, 1982a, S. 15): erstens, aus einem Beutel, der 50 Prozent rote und 50 Prozent weiße Murmeln enthält, beim einmaligen Ziehen eine rote Murmel zu ziehen, zweitens, aus einem Beutel, der 90 Prozent rote und 10 Prozent weiße Murmeln enthält, beim siebenmaligen Ziehen mit Zurücklegen siebenmal eine rote Murmel zu ziehen, und drittens, aus einem Beutel, der 10 Prozent rote und 90 Prozent

weiße Murmeln enthält, beim siebenmaligen Ziehen mit Zurücklegen mindestens einmal eine rote Murmel zu ziehen. Hierbei wird zumeist die Wahrscheinlichkeit des zweiten, konjunktiven Ereignisses (welche 48 Prozent beträgt) als größer eingeschätzt als die Wahrscheinlichkeit des ersten, einfachen Ereignisses (welche 50 Prozent beträgt) und die Wahrscheinlichkeit des ersten, einfachen Ereignisses wiederum als größer eingeschätzt als die Wahrscheinlichkeit des dritten, disjunktiven Ereignisses (welche 52 Prozent beträgt).

Diese Fehleinschätzung der Wahrscheinlichkeiten lässt sich damit erklären, dass bei allen drei Ereignissen die Wahrscheinlichkeit des jeweiligen Elementarereignisses (das heißt beim einmaligen Ziehen eine rote Murmel zu ziehen) als Referenzwert betrachtet wird. Ausgehend von diesem Referenzwert wird dann die Wahrscheinlichkeit des konjunktiven beziehungsweise disjunktiven Ereignisses durch Adjustierung eingeschätzt. Die Einschätzung bleibt dabei jeweils zu nah an der Wahrscheinlichkeit des betreffenden Elementarereignisses (Tversky & Kahneman, 1982a, S. 16). Was die Wahrscheinlichkeit von konjunktiven und disjunktiven Ereignissen anbelangt, so ist zu berücksichtigen, dass die Wahrscheinlichkeit eines konjunktiven Ereignisses nie größer und die Wahrscheinlichkeit eines disjunktiven Ereignisses nie kleiner als die Wahrscheinlichkeit der einzelnen elementaren Ereignisse sein kann. Anzumerken ist, dass die Fehlvorstellung bei der Bewertung konjunktiver Ereignisse dazu führt, dass die Wahrscheinlichkeit einer erfolgreichen Verwirklichung eines umfangreichen Planes (bei dem jeder einzelne von aufeinander aufbauenden Schritten mit Erfolg bewältigt werden muss) in der Regel überschätzt wird. Aufgrund der Fehlvorstellung bei der Bewertung disjunktiver Ereignisse wird die Wahrscheinlichkeit eines Versagens bei komplexen Systemen (bei denen jede der Komponenten einen Einfluss auf die Funktion des Systems hat) dagegen tendenziell unterschätzt. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn jede der Komponenten nur eine geringe Wahrscheinlichkeit des Versagens hat.

Die Anwendung der Heuristik der *Adjustierung von einem Anker aus* geht zudem mit der Verankerung bei der Einschätzung von subjektiven Wahrscheinlichkeitsverteilungen einher. So ergeben sich bei subjektiven Wahrscheinlichkeitsverteilungen aus den eingeschätzten Werten in der Regel Konfidenzintervalle, die zu eng sind und damit eine größere Sicherheit als gerechtfertigt widerspiegeln – dieser Effekt kann (wenigstens zu einem gewissen Anteil) auf eine „Verankerung“ bei der Einschätzung der betreffenden Werte zurückgeführt werden (Tversky & Kahneman, 1982a, S. 17).

Beispielhaft lässt sich die Einschätzung des jeweiligen Werts anführen, den der Durchschnittswert des Dow-Jones an einem bestimmten Tag mit der (subjektiven) Wahrscheinlichkeit von 1% unterschreitet beziehungsweise mit der (subjektiven) Wahrscheinlichkeit von 1% überschreitet (sodass sich zum Konfidenzniveau 98% aus diesen beiden Werten das zugehörige Konfidenzintervall ergibt). Zur Einschätzung der beiden Werte wird für gewöhnlich die bestmögliche (subjektive) Einschätzung des Durchschnittswerts des Dow-Jones am betreffenden Tag als Referenzwert herangezogen und anschließend adjustiert – zumeist jedoch nicht genügend weit.

Zu berücksichtigen ist, dass sich subjektive Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf zwei verschiedene Arten ermitteln lassen: zum einen, indem (wie am Beispiel „Dow-Jones“ beschrieben) *Werte* anzugeben sind, die mit einer bestimmten (subjektiven) Wahrscheinlichkeit nicht unter- oder überschritten werden, und zum anderen, indem jeweils die *Wahrscheinlichkeit* einzuschätzen ist, dass ein bestimmter vorgegebener Wert unter- oder überschritten wird. Bei der ersten Art der Ermittlung dient in der Regel die bestmögliche (subjektive) Einschätzung des tatsächlichen Werts als Anker, bei der zweiten Art der Ermittlung wird dagegen entweder der vorgegebene Wert oder ein Chancenverhältnis von 50 : 50 als Anker herangezogen (Tversky & Kahneman, 1982a, S. 17). Zu beachten ist, dass ein anderer Anker im Allgemeinen zu einer anderen subjektiven Wahrscheinlichkeitsverteilung führt. Dient die bestmögliche (subjektive) Einschätzung des tatsächlichen Werts als Anker, so besteht die Tendenz zu „zu extremen“ Einschätzungen (das heißt Ereignisse, denen nur eine sehr geringe Wahrscheinlichkeit zugeschrieben wurde, treten relativ gesehen zu häufig doch ein). Wird der vorgegebene Wert oder ein Chancenverhältnis von 50 : 50 als Anker herangezogen, so sind die Ein-

schätzungen dagegen oftmals „zu konservativ“ (hierbei treten Ereignisse im Vergleich zu der ihnen zugeschriebenen Wahrscheinlichkeit zu selten ein).

Von Tversky und Kahneman (1982a) wird zusammenfassend darauf hingewiesen, dass die mit der Anwendung der beschriebenen Heuristiken einhergehenden kognitiven Verzerrungen in Situationen, in denen die Einschätzenden als Gutachter oder Kommentatoren oder anderweitig als nicht vom subjektiven Risiko Betroffene fungieren, nicht motivationalen Effekten (wie dem Wunschdenken) zuzuschreiben sind und selbst bei intuitiven Einschätzungen statistisch geschulter Personen vorkommen – zumindest bei komplizierteren und weniger transparenten Problemstellungen. Tversky und Kahneman sehen es als erstaunlich an, dass von den meisten Menschen nicht aus der lebenslangen *Erfahrung* auf fundamentale statistische Regeln (wie den Einfluss der Stichprobengröße auf die Variabilität des Stichprobenergebnisses oder die Regression zur Mitte) geschlossen wird. Dies lässt sich damit erklären, dass die relevanten Beispiele nicht entsprechend kodiert sind. Das Fehlen einer entsprechenden Kodierung kann auch eine Erklärung dafür darstellen, dass die kognitiven Verzerrungen in den eigenen Einschätzungen von Wahrscheinlichkeiten normalerweise nicht wahrgenommen werden.

Darüber hinaus werden Ereignisse natürlicherweise nicht nach der eingeschätzten Wahrscheinlichkeit geordnet, was dabei helfen würde, zu entdecken, dass beispielsweise nur 50 Prozent der Vorhersagen, denen eine Wahrscheinlichkeit von 90 Prozent oder mehr zugeschrieben wurde, in Wirklichkeit zutreffen. Tversky und Kahneman (1982a) weisen darauf hin, dass die internale Konsistenz der Einschätzungen in der Regel das einzige Kriterium ist, nach dem eingeschätzte Wahrscheinlichkeiten (subjektiv) beurteilt werden – für eine adäquate und rationale Beurteilung ist dieses Kriterium nicht ausreichend.

Beispielhaft lässt sich das wiederholte Werfen einer fairen Münze anführen und die Einschätzung der Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis „Kopf“ beim jeweils folgenden Wurf. Wird für die Einschätzung jeweils die Anzahl der Würfe als Referenz genommen, bei denen unmittelbar vorangehend „Kopf“ nicht das Ergebnis war, so ist das Kriterium der internalen Konsistenz der Einschätzungen erfüllt – die Einschätzungen stehen aber unter Umständen im (unbewussten) Widerspruch zu der Überzeugung, dass die Münze „kein Gedächtnis hat“.

Zur adäquaten und rationalen (subjektiven) Beurteilung von eingeschätzten Wahrscheinlichkeiten ist also neben der Überprüfung der internalen Konsistenz auch die Überprüfung der Kompatibilität mit dem vorhandenen Gerüst an Vorstellungen (den „beliefs and presuppositions“) erforderlich. Gemäß Tversky und Kahneman (1982a, S. 20) kann es für eine derartige Überprüfung kein einfaches formales Verfahren geben – als Anhaltspunkte für die Kompatibilität mit dem vorhandenen Gerüst an Vorstellungen bieten sich jedoch das eigene Wissen über den betreffenden Sachverhalt, die Gesetze der Wahrscheinlichkeitstheorie sowie die eigenen Urteilsheuristiken und die damit einhergehenden kognitiven Verzerrungen an.

Die mit der Anwendung der beschriebenen drei „simple everyday heuristics“ einhergehenden kognitiven Verzerrungen sind in Abbildung 3.3 auf der folgenden Seite im Überblick dargestellt.

Neben den von Tversky und Kahneman (1982a) aufgeführten Heuristiken der *Repräsentativität*, *Verfügbarkeit* und *Adjustierung von einem Anker aus* werden von Nothbaum und Scholz (1995) sowie von Amir und Williams (1999) noch weitere „simple everyday heuristics“ beschrieben, die für das intuitive probabilistische Denken von Bedeutung sind: die Heuristik der *kausalen Schemata* und die Heuristik der *Gleichwahrscheinlichkeit*. Die Heuristik der *kausalen Schemata* ist dadurch gekennzeichnet, dass „Informationen über Auftretenshäufigkeiten von Ereignissen [...] dann zur Wahrscheinlichkeitsschätzung herangezogen [werden], wenn diese Ereignisse in kausalem Zusammenhang zur gesuchten Wahrscheinlichkeit stehen“ (Nothbaum & Scholz, 1995, S. 98). Die Heuristik der *Gleichwahrscheinlichkeit* beschreibt die Tendenz, jede beliebige Menge an Ereignissen als gleichwahrscheinlich zu behandeln (Amir & Williams, 1999, S. 87; Lecoutre, 1992).

Folgendes Beispiel illustriert die Anwendung der Heuristik der *kausalen Schemata* (vgl. Tversky & Kahneman, 1982c, S. 119): Bei der Einschätzung der Wahrscheinlichkeit wird im Allgemeinen das Ereignis „Die Tochter hat blaue Augen, wenn ihre Mutter blaue Augen hat“ als wahrscheinlicher eingeschätzt als das Ereignis „Die Mutter hat blaue Augen, wenn ihre Tochter blaue Augen hat“, obwohl beiden Ereignissen die gleiche Wahrscheinlichkeit zugeschrieben werden müsste, wenn (unter Vernachlässigung der Gesetze der Vererbungslehre) davon ausgegangen wird, dass die Wahrscheinlichkeit für „blaue Augen“ für Mutter und Tochter gleich groß ist – aus P(X: „Die Tochter hat blaue Augen“) = P(Y: „Die Mutter hat blaue Augen“) folgt, dass gilt: $P(X|Y) = P(Y|X)$.

Abb. 3.3. „Simple everyday heuristics“ und einhergehende kognitive Verzerrungen

Darüber hinaus muss berücksichtigt werden, dass unter Umständen auch bei der intuitiven Einschätzung von Wahrscheinlichkeiten – beziehungsweise allgemein beim intuitiven probabilistischen Denken – auf einfache, nicht probabilistisch-spezifische Heuristiken zurückgegriffen wird, wie beispielsweise die Heuristik des *Take The Best*. Der Entscheidungsprozess bei dieser Heuristik, welche bei der Auswahl aus zwei zur Verfügung stehenden Alternativen zur Anwendung kommt, wird von Hutchinson und Gigerenzer (2005, S. 98) unter Bezug auf Gigerenzer und Goldstein (1996) wie folgt beschrieben:

- erstens, Berücksichtigung eines gegebenen Stichwortes zur selben Zeit, wobei die sich ergebenden Werte immer für beide zur Verfügung stehenden Alternativen herausgesucht werden;
- zweitens, wenn die beiden Werte diesbezüglich identisch sind, Untersuchung des nächsten Stichwortes, ansonsten Ignorieren aller anderen Stichwörter und Treffen der Entscheidung auf der Grundlage dieses einen Stichwortes;
- drittens, falls keine Stichwörter mehr zur Untersuchung übrig sind, Raten.

Folgendes Beispiel illustriert die Anwendung der Heuristik des *Take The Best*, welche als „simple everyday heuristic“ bezeichnet werden kann:

> Gegeben sind zwei Urnen. Urne 1 enthält 10 weiße Kugeln und 5 schwarze Kugeln, Urne 2 enthält 20 weiße Kugeln und 15 schwarze Kugeln. Eingeschätzt werden soll, bei welcher der beiden Urnen die Wahrscheinlichkeit größer ist, beim einmaligen Ziehen eine weiße Kugel zu ziehen. Wird (ausgehend von der Problembeschreibung) intuitiv ein Stichwort für beide Alternativen, Urne 1 und Urne 2, gewählt, so ergibt sich im Falle des Stichwortes „Anzahl der weißen Kugeln“ für Urne 2 die größere Anzahl und somit die Antwort „Bei Urne 2“, im Falle des Stichwortes „Differenz von schwarzen und weißen Kugeln in der Urne“ für beide Urnen die gleiche Differenz, sodass ein neues Stichwort nötig ist beziehungsweise geraten werden muss, und beim Stichwort „Anteil der weißen Kugeln an allen Kugeln in der Urne“ für Urne 1 ein größerer Anteil und somit die Antwort „Bei Urne 1.“

Anzumerken ist, dass bei der Anwendung der Heuristik des *Take The Best intuitiv* zuerst die Stichworte berücksichtigt werden, denen die größte „Validität“ zugeschrieben wird – das heißt die als am ehesten verlässlich und zu einer Entscheidung führend angesehen werden. Der Begriff der „Validität“ beschreibt dabei das Verhältnis von korrekten Folgerungen zu allen Folgerungen, die ein Stichwort (isoliert betrachtet) erlaubt, wobei ein „Unentschieden“ keine Folgerung zulässt (Hutchinson & Gigerenzer, 2005, S. 98). Scholz und Köntopp (1990, S. 107) weisen auf die allgemeine Problematik hin, aus einem Wahrscheinlichkeitsurteil auf den zugrunde liegenden Mechanismus der Inferenz zu schließen (also beispielsweise anhand einer bestimmten Einschätzung der Wahrscheinlichkeit die Anwendung der Heuristik des *Take The Best* zu vermuten), da „höchst unterschiedliche Inferenzen zu ein und demselben Urteil führen“ können.

Der Heuristik des *Take The Best* lassen sich auch die von Scholz (1991, S. 246) unter Verweis auf Siegler (1986) beschriebenen Informationsverarbeitungsregeln zum Lösen von Wahrscheinlichkeitsaufgaben, wie Urnenexperimenten, zuordnen. Dabei wird die Entscheidung zwischen zwei zur Auswahl stehenden Urnen nach folgenden Regeln getroffen, welche sich auf ein bestimmtes Stichwort zurückführen lassen:

- Bei Regel I, welche dem Stichwort „Anzahl an günstigen Ereignissen“ entspricht, wird die Urne mit der größeren Anzahl an günstigen Ereignissen ausgewählt.
- Regel II, welcher das Stichwort „Anzahl an ungünstigen Ereignissen“ zugrunde liegt, besagt, dass bei der gleichen Anzahl an günstigen und ungünstigen Ereignissen die Urne mit der kleineren Anzahl an ungünstigen Ereignissen ausgewählt wird.
- Regel III bezieht sich auf das Stichwort „Differenz von günstigen und ungünstigen Ereignissen“ und sagt aus, dass die Urne genommen wird, bei der die Differenz von günstigen und ungünstigen Ereignissen größer ist.

- Bei Regel IV, welche sich auf das Stichwort „Verhältnis zwischen günstigen und ungünstigen Ereignissen“ zurückführen lässt, wird die Urne ausgewählt, bei der das Verhältnis zwischen günstigen und ungünstigen Ereignissen größer ist.

Anzumerken ist, dass die Anwendung der als Regel I, Regel II und Regel III aufgeführten Strategien bereits von Falk (1982) beschrieben wurde. Welche der vier Regeln zur Anwendung kommt, das heißt welches Stichwort gewählt wird, hängt sowohl von der Komplexität des eigenen Systems an Regeln, also des eigenen „Stichwortkatalogs“, ab als auch von der Struktur der Aufgabe (Scholz, 1991, S. 247).

Beispielhaft für den Einfluss von (im Sinne der Theorie des Conceptual Change) externalen Variablen auf die Anwendung einer nicht probabilistisch-spezifischen „simple everyday heuristic“ lässt sich folgende Problemstellung anführen (vgl. Hutchinson & Gigerenzer, 2005, S. 113):

> Beim Besuch eines Restaurants, in dem zuvor noch nie gespeist wurde, soll eingeschätzt werden, welches Gericht empfehlenswert ist. Hierbei wird häufig das gleiche Gericht ausgewählt, das bereits von einer anderen Person gewählt wurde, die mit dem Restaurant vertraut zu sein scheint – es wird also die Einschätzung einer Person aus der sozialen Umgebung übernommen beziehungsweise kopiert.

Diese Art von Heuristik wird von Hutchinson und Gigerenzer (2005, S. 113) als „adaptive social heuristic“ bezeichnet und ist mit dem Übernehmen der Meinung eines Experten vergleichbar – wie im Zusammenhang mit der Interpretation von Wahrscheinlichkeit als subjektive Wahrscheinlichkeit im Abschnitt 2.2.3 beschrieben.

Aufgrund der mit der Anwendung der Heuristik der *Repräsentativität*, der *Verfügbarkeit* und der *Adjustierung von einem Anker aus* einhergehenden kognitiven Verzerrungen kommt es zu „typischen Fehlschlüssen“[3], wie beispielsweise dem (bereits beschriebenen) als „gambler’s fallacy“ bezeichneten Fehlschluss. Im Folgenden werden weitere „typische Fehlschlüsse“ vorgestellt, die aus der Anwendung der drei genannten Heuristiken hervorgehen.

3.2.7 „Typische Fehlschlüsse“

Aus der Anwendung der Heuristik der *Repräsentativität* geht der als „gambler’s fallacy“ bezeichnete Fehlschluss hervor. Dieser Fehlschluss wird von Fischbein (1975, S. 29) unter der Bezeichnung „negative recency effect“ aufgeführt, da die Tendenz besteht, das Ergebnis vorherzusagen, das einige Zeit lang nicht erschienen ist. Neben dem Begriff des „negative recency effect“ ist auch der Begriff des „positive recency effect“ geläufig. Der dazugehörige Fehlschluss geht ebenfalls auf die Anwendung der Heuristik der *Repräsentativität* zurück und beschreibt die Tendenz, das Ergebnis vorherzusagen, das bereits einige Zeit lang in Folge eingetreten ist. Die beiden als „recency effects“ bezeichneten Fehlschlüsse sind also die Auswirkungen, die das wiederholte Auftreten des gleichen Ergebnisses bei vorangegangenen Versuchen auf die Einschätzung der Wahrscheinlichkeit beim nächsten Versuch hat (vgl. das Beispiel zu Roulette-Spielern, welches im vorangegangenen Abschnitt in Bezug auf die mit der Anwendung der Heuristik der *Repräsentativität* einhergehenden Fehlvorstellungen von Zufall angeführt wurde). Beispielhaft für das Auftreten des „positive recency effect“ lässt sich folgendes Experiment anführen (vgl. Fischbein, 1975, S. 29):

> Eine von zwei Lampen (eine rote und eine andersfarbige) leuchtet jeweils auf. Vorhergesagt werden soll jeweils, welche der beiden Lampen beim nächsten Mal aufleuchten wird. Wenn beispielsweise die rote Lampe mehrere Male in Folge aufgeleuchtet hat, so wird mit größerer Wahrscheinlichkeit darauf getippt, dass beim nächsten Mal wieder die rote Lampe aufleuchten wird.

[3] Die Bezeichnung „Fehlschluss“ wird vom Autor in dieser Arbeit im Sinne des Abweichens von einer Norm, der „objektiven (formalen) Einschätzung“, verwendet.

Ein weiterer Fehlschluss, dem die Anwendung der Heuristik der *Repräsentativität* zugrunde liegt, wird als „conjunction fallacy“ bezeichnet. Bei diesem Fehlschluss wird ein konjunktives Ereignis als wahrscheinlicher eingeschätzt als eines der zugehörigen elementaren Ereignisse (Tversky & Kahneman, 1982b, S. 91).

> Als Beispiel aus dem Bereich des Alltags lässt sich anführen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass der Angeklagte den Tatort fluchtartig verlassen hat, nicht kleiner sein kann als die Wahrscheinlichkeit, dass der Angeklagte den Tatort fluchtartig verlassen hat, weil er Angst hatte, als Mörder angeklagt zu werden, obwohl Letzteres oftmals als plausibler und somit wahrscheinlicher eingeschätzt wird als Ersteres.

Anzumerken ist, dass der als „conjunction fallacy“ bezeichnete Fehlschluss (nur) das Symptom eines fundamentaleren Problems darstellt – dieses Problem liegt in der Inkonsistenz zwischen der Logik der Wahrscheinlichkeit und der Logik der Repräsentativität (Tversky & Kahneman, 1982b, S. 98).

Auf die Anwendung der Heuristik der *kausalen Schemata* lässt sich ein als „time-axis fallacy“ bezeichneter Fehlschluss, der von Fischbein und Schnarch (1997) auch unter der Bezeichnung „the Falk phenomenon“ aufgeführt wird, zurückführen. Diesem Fehlschluss liegt die Annahme zugrunde, dass die Kenntnis des Ergebnisses eines nachfolgenden Versuchs keinen Einfluss auf die Einschätzung der Wahrscheinlichkeit beim vorangegangenen Versuch hat. Zur Illustration lässt sich folgendes Beispiel anführen (vgl. Falk, 1979, S. 64 f.):

> Eine Urne enthält zwei weiße Bälle und zwei schwarze Bälle. Die Urne wird geschüttelt. Anschließend werden, ohne Zurücklegen und ohne hinzusehen, nacheinander zwei Bälle gezogen. Eingeschätzt werden soll zum einen die Wahrscheinlichkeit, dass beim zweiten Mal ein weißer Ball gezogen wurde, wenn bekannt ist, dass beim ersten Mal ein weißer Ball gezogen wurde, und zum anderen die Wahrscheinlichkeit, dass beim ersten Mal ein weißer Ball gezogen wurde, wenn bekannt ist, dass beim zweiten Mal ein weißer Ball gezogen wurde. Im ersten Fall wird zumeist richtig eingeschätzt, dass die betreffende Wahrscheinlichkeit ein Drittel beträgt, im zweiten Fall wird dagegen in der Regel fälschlicherweise angenommen, dass die betreffende Wahrscheinlichkeit ein halb beträgt, und nicht ein Drittel. Eine typische Argumentation, die diesem Fehlschluss zugrunde liegt, lautet: „Dem ersten Ball ist egal, ob der zweite Ball weiß sein wird oder nicht.“

Falk (1979, S. 66) weist diesbezüglich darauf hin, dass das Ergebnis einer späteren Ziehung in der Tat keinen kausalen Einfluss auf das Ergebnis einer früheren Ziehung hat – jedoch ist zu berücksichtigen, dass die *Information* über das Ergebnis der späteren Ziehung unter Umständen ein neues Licht auf das ungewisse Ergebnis der früheren Ziehung wirft und somit zu einer modifizierten Einschätzung der betreffenden Wahrscheinlichkeit führt.

3.2.8 „Higher order heuristics“

Da „higher order heuristics“ im intuitiven Denkmodus so gut wie keine Rolle spielen, wird auf diese Art von Heuristiken hier nicht ausführlicher eingegangen. Beispielhaft für probabilistische Heuristiken, die den „higher order heuristics“ zugeordnet werden können, werden von Scholz (1991, S. 231 f.) unter anderem mathematische Theoreme und probabilistische Denkweisen, die in der Schule gelernt werden, angeführt – bei diesen ist neben einer statischen, konzeptuellen und wissensbasierenden Komponente auch eine aktive, operative und dynamische Komponente zu berücksichtigen. Was die probabilistischen Denkweisen im Bereich des Schulunterrichts in der Sekundarstufe I anbelangt, so können *Baumdiagramme* als wesentliches Element der „higher order heuristics“ angesehen werden. Sie werden gerade in letzter Zeit verstärkt vorgeschlagen als *das* heuristische Mittel, um Probleme stochastisch zu lösen (vgl. Sedlmeier & Gigerenzer, 2001; Martignon & Wassner, 2002).

Neben der Kenntnis von Heuristiken ist auch das Verständnis von intuitiven Denkprozessen wichtig (Nothbaum & Scholz, 1995, S. 98). Anhand von Interviews mit einzelnen Schülerinnen und Schülern wurde in der Studie von Green (1982) festgestellt, dass bei der Einschät-

zung von Wahrscheinlichkeiten die Tendenz besteht, Fragen sehr schnell und intuitiv zu beantworten, ohne dass offenkundig mathematische Operationen durchgeführt werden (vgl. Abschnitt 4.2.4). Im Folgenden werden diese probabilistischen Intuitionen näher charakterisiert.

3.3 Entwicklungspsychologische Sichtweise

3.3.1 Intuitionen

Rasfeld (2004, S. 35) führt an, dass der Begriff der Intuition zu den Begriffen gehört, die in der wissenschaftlichen Literatur höchst unterschiedlich verwendet werden. Freudenthal (1975, S. 7; zitiert aus Büchter & Henn, 2007, S. 3) umschreibt den Begriff der Intuition anschaulich: „Was ein Punkt, ein rechter Winkel, ein Kreis ist, weiß ich schon vor der ersten Geometriestunde, ich kann es nur noch nicht präzisieren. Ebenso weiß ich schon, was Wahrscheinlichkeit ist, ehe ich es definiert habe“. Von Fischbein und Schnarch (1997, S. 96) werden Intuitionen unter Verweis auf Fischbein (1987) als Kognitionen definiert, die *subjektiv* als offensichtlich, direkt annehmbar, holistisch, zwangsläufig und extrapolierbar erscheinen. So unterscheidet sich eine intuitive Kognition durch das Gefühl des Offensichtlichen, der intrinsischen Sicherheit, von einer Kognition logischen und analytischen Ursprungs. Als Beispiel für eine intuitive Kognition lässt sich die Tatsache anführen, dass die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten eine gerade Linie ist. Im Gegensatz dazu stellt die Tatsache, dass die Summe der Innenwinkelmaße eines Dreiecks 180° ergibt, keine intuitive Kognition dar, da nicht unmittelbar klar ist, dass dies so sein muss – dass es so ist, steht außer Frage, da es sich beweisen lässt (Fischbein & Schnarch, 1997).

Bei einer Vermutung im Sinne einer Schätzung, einer Lösung oder einer Vorhersage wird von Fischbein und Grossman (1997, S. 28) zwischen einer „willkürlichen Vermutung“ und einer „intuitiven Vermutung“ unterschieden. Intuitive Vermutungen zeichnen sich dadurch aus, dass sie stillschweigend auf einer anfänglichen Information und einer gedanklichen Operation basieren. Beispielhaft lässt sich das Werfen einer fairen Münze anführen. Beim einmaligen Wurf stellt die Behauptung, dass beispielsweise „Zahl“ das Ergebnis sein wird, eine willkürliche Vermutung dar, da keinerlei Informationen hinsichtlich des Ergebnisses vorliegen. Wird dagegen nach dem dreimaligen Werfen mit dem Ergebnis „Zahl-Zahl-Zahl“ behauptet, dass beim nächsten Wurf beispielsweise „Kopf“ das Ergebnis sein wird, so handelt es sich um eine Vermutung, die auf einer Information basiert und somit als intuitive Vermutung angesehen werden kann. Der Begriff des intuitiven Wissens bezeichnet diesbezüglich eine globale, direkte Schätzung – im Gegensatz zu einer Lösung, die auf einer expliziten Berechnung beruht (Fischbein & Grossman, 1997, S. 29).

Im weiteren Verlauf der Arbeit wird folgendes Verständnis des Begriffes der Intuition zugrunde gelegt (vgl. Fischbein, 1975; Fischbein & Schnarch, 1997; Rasfeld, 2004):

> Intuitionen stellen eine spezifische Form *unmittelbar verfügbaren Wissens* dar. Es handelt sich dabei nicht um Faktenwissen, sondern um *kognitive Komponenten intelligenten Verhaltens*, die im aktiven Kontakt mit der Umwelt aufgebaut werden.

Intuitives Wissen ist subjektiv *offensichtlich*, das heißt völlig klar für den Betreffenden. Es muss nicht hinterfragt und überprüft werden und ist in der Regel nicht explizit formuliert. Zudem erscheint intuitives Wissen als *zwangsläufig* und *sicher*, sodass Alternativen nicht akzeptabel erscheinen und abgelehnt werden.

Hinsichtlich der Frage, welche Mechanismen dazu führen, dass eine gedankliche Operation subjektiv als unmittelbar und global erscheint, wird von Fischbein und Grossman (1997, S. 29) angeführt, dass die Sequenz an Operationen im Unbewussten stattfindet und auf der Bewusstseinsebene nur das Endprodukt in Form einer „Einsicht“ vorliegt. Zu berücksichtigen ist, dass Intuitionen verhaltensorientiert und abhängig von Vorerfahrungen sind und dazu tendieren, adaptive Bedürfnisse zu erfüllen – egal ob richtig oder falsch. Demzufolge werden bei Entscheidungen und Vermutungen, die auf Intuitionen beruhen, die „Daten der Realität“ mit einbezogen (Fischbein & Grossman, 1997, S. 29).

Subjektive Überzeugungen und Realität können jedoch miteinander in Konflikt geraten. Ein Grund hierfür ist, dass die (eigene) Erfahrung für gewöhnlich begrenzt ist, ein anderer, dass die Notwendigkeit, zweckgebunden zu handeln, impliziert, dass Ursachen manipuliert werden dürfen, um eine gewünschte Wirkung zu erreichen. Dies hat zur Folge, dass bei der Interpretation von Ereignissen die Tendenz besteht, zwischen Ursache und Wirkung zu unterscheiden, und dass sich die Vorstellung entwickelt, dass eine bestimmte Ursache immer dieselbe Wirkung nach sich zieht. Diese Vorstellung, welche beispielsweise zu dem im Abschnitt 3.2.7 beschriebenen, als „time-axis fallacy“ bezeichneten Fehlschluss führt, kann zwar hilfreich für die Elaboration innerlich kohärenter Repräsentationen sein, jedoch können diese Repräsentationen in Dissonanz mit der Realität geraten. Indem die Kohärenz der kognitiven Organisation angestrebt wird, besteht auch die Tendenz dazu, Informationen, die leicht zugänglich sind, in die ablaufenden gedanklichen Operationen zu integrieren und Informationen, für die anspruchsvollere und aufwendige Nachforschungen erforderlich wären, zu ignorieren. Darüber hinaus besteht die Tendenz, sich auf Informationen zu verlassen, die für eine ganze Klasse als repräsentativ erscheinen (Fischbein & Schnarch, 1997, S. 97).

Als einen fundamentalen Aspekt der Theorie des intuitiven Wissens führen Fischbein und Schnarch (1997, S. 97) die Tatsache an, dass die beschriebenen Erscheinungen und Zustände von intuitivem Wissen nicht unabhängig von den von Piaget (1976) als „operationale Kapazitäten“ bezeichneten logischen und analytischen Kapazitäten funktionieren können.

In Bezug auf den Begriff der Intuition wird von Fischbein (1975) zwischen „Primärintuitionen“ und „Sekundärintuitionen“ unterschieden. Erstere beruhen auf den eigenen Erfahrungen, ohne dass dazu irgendeine systematische Instruktion erforderlich ist. Letztere besitzen alle Merkmale von Intuitionen, werden aber durch die wissenschaftliche Ausbildung geformt, hauptsächlich in der Schule. Von Tirosh und Tsamir (2004, S. 537) wird diesbezüglich festgehalten, dass Sekundärintuitionen dann formuliert werden, wenn formales Wissen intuitiv wird.

Als Beispiel aus dem Alltag für formales Wissen, das intuitiv wird, lässt sich das Wissen anführen, dass die Angabe „2,34 m“ eine Längenangabe darstellt.

Fischbein, Bărbat und Mînzat (1971, S. 140) führen beispielhaft für Primärintuitionen die Intuition von Raum und die Intuition von Zeit an. Von Fischbein (1975, S. 8) werden als Primärintuitionen zudem operationale Intuitionen aufgeführt, die im Allgemeinen durch die formalen Regeln der Logik ausgedrückt werden und das Gefühl hervorrufen, dass eine Schlussfolgerung auf der Basis von gegebenen Prämissen als wahr erscheint.

Beispielhaft für eine Sekundärintuition lässt sich die bereits beschriebene Intuition anführen, dass die Angabe „2,34 m“ eine Längenangabe darstellt.

Allerdings weisen Fischbein et al. (1971) bezüglich der Einteilung in Primär- und Sekundärintuitionen darauf hin, dass es kaum möglich ist, eine klare Grenze zwischen diesen beiden Arten von Intuitionen zu ziehen. In der nachfolgenden Abbildung ist die Unterscheidung zwischen Primär- und Sekundärintuitionen im Überblick dargestellt.

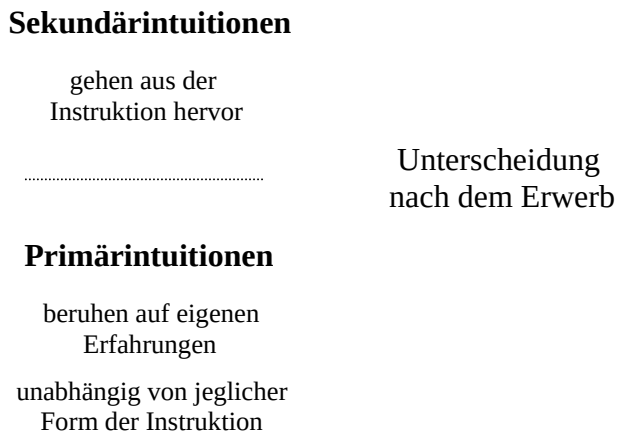


Abb. 3.4. Primär- und Sekundärintuitionen (vgl. Fischbein, 1975, S. 117)

Neben der Unterscheidung zwischen Primär- und Sekundärintuitionen wird von Fischbein (1975, S. 117) eine weitere Art der Unterscheidung angeführt: *zustimmende* Intuitionen und *antizipierende* Intuitionen – im Original als „*affirmatory* intuitions“ und „*anticipatory* intuitions“ bezeichnet. Diesbezüglich verkörpern zustimmende Intuitionen das Wissen von der externalen Welt, welches als offensichtlich akzeptiert wird. Für Rasfeld (2004, S. 36) ist damit „ein intuitives Verständnis, eine unmittelbar akzeptierte Interpretation oder Erklärung gemeint (‚So muss es sein!‘)“. Antizipierende Intuitionen sind als gedankliche Konstrukte aufzufassen, welche die Lösung eines Problems im Ganzen vorhersehen, bevor die einzelnen Schritte der Lösung gefunden sind (Fischbein, 1975, S. 117). Für Rasfeld (2004, S. 36) verkörpert der Begriff der antizipierenden Intuition „ein Konstrukt, das in der Gestaltpsychologie mit *Einsicht* umschrieben wird: Während wir um die Lösung eines Problems ringen, fühlen wir plötzlich, dass wir diese erfasst haben (‚So könnte es gehen!‘)“.

Beispielhaft werden von Fischbein (1975, S. 12) folgende zustimmenden Intuitionen angeführt: die Intuition, dass aus $A = B$ und $B = C$ folgt, dass $A = C$, die Intuition, dass die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten eine gerade Linie ist (wie bereits erwähnt), und die Intuition, dass die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Perle zu ziehen, bei einer Schachtel, die 4 weiße Perlen und 5 schwarze Perlen enthält, größer ist als bei einer anderen Schachtel, die 2 weiße Perlen und 5 schwarze Perlen enthält.

Als Beispiel für eine antizipierende Intuition wird von Fischbein (1975, S. 13) die durch die Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen ausgedrückte Intuition angeführt, dass sich die relative Häufigkeit eines beobachteten Ergebnisses der theoretischen Wahrscheinlichkeit annähert, wenn die Anzahl der Versuche zunimmt.

Fischbein (1975) weist jedoch auch bei der vorliegenden Unterscheidung darauf hin, dass diese weit entfernt von einer klaren Abgrenzung ist – zum einen leiten antizipierende Intuitionen zumindest einen Teil ihrer Plausibilität von zustimmenden Intuitionen ab und zum anderen können sich zustimmende Intuitionen aus antizipierenden Intuitionen ableiten, wenn diese den Demonstrationstest bestanden haben und dafür infrage kommen, den Status von Sekundärintuitionen zu erwerben. Folgendes Beispiel illustriert dies (vgl. Fischbein, 1975, S. 13):

Wird im Inneren eines Dreiecks eine Linie eingezeichnet, die zu einer der Seiten des Dreiecks parallel ist, so wird antizipiert, dass die Schnittpunkte dieser Linie mit den beiden anderen Seiten des Dreiecks die be-

treffenden Seiten in zueinander proportionale Abschnitte teilen. Nachdem dies demonstriert wurde und zur Denkroutine geworden ist, wird es mit der Zeit selbstverständlich und erwirbt den Status einer zustimmenden Intuition.

Die Unterscheidung zwischen zustimmenden Intuitionen und antizipierenden Intuitionen ist in der nachfolgenden Abbildung ebenfalls im Überblick dargestellt.

antizipierende Intuitionen

Ideen zur Problemlösung

den einzelnen Schritten der Lösungsbildung vorausgehend

„So könnte es gehen!“

zustimmende Intuitionen

unmittelbar akzeptierte Interpretationen oder Erklärungen

„So muss es sein!“

Abb. 3.5. Zustimmende und antizipierende Intuitionen (vgl. Rasfeld, 2004, S. 36)

Bezogen auf die im Abschnitt 2.2.3 beschriebenen animistischen Vorstellungen in stochastischen Situationen ist anzumerken, dass diese von Wollring (1994a, S. 27) als (weitestgehend ohne Unterweisung erlernte) Primärintuitionen angesehen und als antizipierende sowie zum Teil auch zustimmende Intuitionen aufgefasst werden, da sie mit anderen stochastischen Vorstellungen koexistieren und wechselwirken.

Was die Frage anbelangt, wieso einige der Kognitionen als offensichtlich und zwangsläufig erscheinen, andere hingegen nicht, führen Fischbein und Schnarch (1997) die Hypothese an, dass eine natürliche Tendenz dazu besteht, Kognitionen in kohärenten und verhaltenseffizienten Strukturen zu organisieren und zu integrieren – mit zunehmendem Alter und größerer Erfahrung entwickeln sich dadurch auskristallisierte, feste und beständige Vorstellungen, auf denen das gedankliche und praktische Verhalten beruht.

Für das Verständnis des probabilistischen Denkens sind zwei Aspekte von besonderer Bedeutung (vgl. Greer, 2001, S. 21 f.):

- zum einen, dass intuitive probabilistische Kognitionen dadurch charakterisiert sind, dass sie durch die Erfahrung geformt werden und Anpassungen an die Umgebung darstellen, und
- zum anderen, wie sich die probabilistische Intuition im Vergleich zur Intuition in anderen mathematischen und naturwissenschaftlichen Bereichen unterscheidet.

In Bezug auf den ersten Aspekt ist anzumerken, dass die betreffende Aussage aufgrund der Vielzahl an Fehlschlüssen, von denen typische im Abschnitt 3.2.7 beschrieben wurden, scheinbar einen Widerspruch ergibt. Jedoch ist zu berücksichtigen, dass die menschliche Erfahrung begrenzt ist und Intuitionen aus der praktischen Aktivität mit konkreten Sachverhalten hervorgehen, welche Eigenschaften besitzen, die bei der Konstruktion einer abstrakten Vorstellung abgelöst werden müssen.

Beispielhaft wird von Greer (2001, S. 21) auf Punkte und Linien, die auf einem Blatt Papier gezeichnet sind, und deren geometrische Idealisierung verwiesen.

Was das probabilistische Denken betrifft, so sollte insbesondere der Einfluss von Erfahrungen aus Glücksspielen nicht außer Acht gelassen werden – bei diesen ist die Verbindung zwischen der Situation und der probabilistischen Struktur, welche diese modelliert, sehr viel direkter als bei vielen anderen Arten von „ungeordneten" Erfahrungen im Alltag.

Ein einfaches Beispiel ist, dass aus Würfelspielen, bei denen zu Beginn des Spiels eine Sechs benötigt wird, die Vorstellung erwächst, dass die Wahrscheinlichkeit, eine Sechs zu bekommen, gering ist, da die Fälle, in denen es einer großen Anzahl an Würfen bis zum Start bedarf, gegenüber den anderen Fällen hervorstechen (Greer, 2001, S. 22). Gemäß Hawkins und Kapadia (1984, S. 369) ist die Erfahrung der Schülerinnen und Schüler begrenzt und führt so zu der falschen Schlussfolgerung, dass eine Sechs schwerer zu bekommen ist als andere Augenzahlen. Als mögliche instruktionale Maßnahme (welche auf die im Abschnitt 2.2.3 beschriebene Interpretation von Wahrscheinlichkeit als subjektive Wahrscheinlichkeit zurückgeht) wird vorgeschlagen: „Hundert Versuche, bei denen das Kind gezwungen ist mit Spielmarken zu wetten, sollten es ziemlich davon abbringen – es sei denn, der Spielwürfel ist wirklich einseitig ausgerichtet" (Hawkins & Kapadia, 1984, S. 371).

Des Weiteren ist zu berücksichtigen, dass es der Intuition widerspricht, zu verstehen, dass eine probabilistische Einschätzung unabhängig vom Ergebnis bewertet werden kann (Greer, 2001, S. 21).

Beispielhaft lässt sich die Problematik anführen, einen Anfänger beim Kartenspiel „Schafkopf" davon zu überzeugen, dass es falsch war, wie die Hand gespielt wurde, obwohl es sich als erfolgreich erwiesen hat, beziehungsweise, dass es richtig war, wie die Hand gespielt wurde, obwohl es nicht zum Erfolg geführt hat.

In Bezug auf den zweiten Aspekt, wie sich die probabilistische Intuition im Vergleich zur Intuition in anderen mathematischen und naturwissenschaftlichen Bereichen unterscheidet, wird von Greer (2001, S. 22) angemerkt, dass der wesentliche Unterschied in der „Wackeligkeit" probabilistischer Intuitionen zu sehen ist. Folgendes Beispiel illustriert dies (vgl. Borovcnik & Bentz, 1991, S. 74):

Im Bereich der Arithmetik werden Berechnungen mit natürlichen Zahlen angestellt, beispielsweise 2 + 2. Das Ergebnis, 4, lässt sich anhand von Mengen im Alltag sofort nachzählen und überprüfen. Im Bereich der Wahrscheinlichkeit gestaltet sich die Interpretation der Rückmeldung dagegen weitaus schwieriger. So steht der geringen Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn bei der staatlichen Lotterie die Tatsache gegenüber, dass es trotzdem jede Woche Gewinner gibt.

Von Tirosh und Tsamir (2004, S. 537 f.) werden zwischen der Theorie des Conceptual Change und der Theorie der Intuitionen folgende Gemeinsamkeiten aufgeführt:

- erstens, dass die Idee von „presuppositions" ähnlich ist zur Idee von Primärintuitionen,
- zweitens, dass sich beide Theorien auf Inkompatibilitäten zwischen den anfänglichen Vorstellungen, die Schülerinnen und Schüler aus ihren vorherigen (alltäglichen oder mathematischen) Erfahrungen in den Unterricht mitbringen, und dem Wissen, das sie durch die Instruktion erwerben sollen, beziehen,
- drittens, dass in beiden Theorien davon ausgegangen wird, dass der Einfluss der „presuppositions" beziehungsweise Primärintuitionen auch nach der Instruktion erhalten bleibt, und
- viertens, dass beide Theorien inhaltsorientiert sind.

Jedoch wird in der Theorie des Conceptual Change zwischen „freundlichen" Situationen der Bereicherung und „problematischen" Situationen des radikalen Wechsels unterschieden, wobei beim radikalen Wechsel von verschiedenen „Stufen der Mischung" von wissenschaftlichem Wissen und „presuppositions" ausgegangen wird – in Form von synthetischen Modellen. Im Gegensatz dazu wird in der Theorie der Intuitionen eine Vermischung von formalem Wissen und Primärintuitionen als unvermeidbar angesehen und ein Endzustand beschrieben –

wenn formales Wissen zur Sekundärintuition wird. Hierbei werden drei Arten von mathematischem Wissen unterschieden: formales Wissen, algorithmisches Wissen und intuitives Wissen. Durch Inkompatibilitäten zwischen diesen Arten von Wissen kommt es zu systematischen Fehlern, Fehlvorstellungen und epistemologischen Hindernissen. Abschließend wird von Tirosh und Tsamir (2004, S. 538) darauf hingewiesen, dass sowohl den „presuppositions“ als auch den Primärintuitionen eine Schlüsselrolle in Bezug auf die Entwicklung und Evaluation von Lernumgebungen und Unterrichtsmethoden in der Naturwissenschaft und der Mathematik zugeschrieben wird.

Für Hawkins und Kapadia (1984, S. 374) geht mit der Theorie der Intuitionen die Auffassung einher, dass die Vorstellungen und Intuitionen der Schülerinnen und Schüler von Wahrscheinlichkeit sozial vermittelt, modifiziert und entwickelt werden können. Die intuitiven Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler von Wahrscheinlichkeit sind jedoch typischerweise als subjektiv und inkohärent anzusehen, zudem existieren verschiedene Interpretationen von Wahrscheinlichkeit. Diesbezüglich sehen Hawkins und Kapadia (1984, S. 374 f.) die Verwendung von subjektiven Ansätzen zusätzlich zu den traditionellen a-priori- und frequentistischen Ansätzen als „fruchtbarsten Weg“ (ganz im Sinne der Begrifflichkeit der Theorie des Conceptual Change) zum Aufbau eines guten Grundgerüsts für die Entwicklung probabilistischer Vorstellungen an – es wird also auf eine Mischung der drei Ansätze hingewiesen. Mit dem Begriff der Intuition geht der Begriff des Schemas einher, auf den im Folgenden näher eingegangen wird.

3.3.2 Schemata

Im Abschnitt 1.2.2 wurde in Bezug auf das spontane Entstehen von Fehlkonzepten bereits beschrieben, dass ein „Schema“ von der Struktur her als ein Cluster aus zusammenhängenden Konzepten angesehen werden kann – es besteht aus „Slots“ oder „Variablen“, die mit Konzepten gefüllt und in einer bestimmten Art und Weise eingeordnet sind. Was den Prozess betrifft, so wird unter einem „Schema“ ein Programm (im Groben analog zu einem Computerprogramm) verstanden, das darauf ausgerichtet ist, eine bestimmte Menge an Information zu interpretieren und die entsprechende Reaktion vorzubereiten und zu kontrollieren – der Begriff des Programms bezeichnet hierbei eine Sequenz von Schritten, die relativ flexibel und anpassungsfähig an die gegebenen Bedingungen ist (Fischbein & Grossman, 1997, S. 29).

Eine umfassende Beschreibung des Begriffs des Schemas wird von Vergnaud (1994, S. 53) gegeben: „Ein Schema ist finalisiert: Ziele implizieren Erwartungen. Ein Schema generiert Handlungen: Es muss Regeln beinhalten. Ein Schema ist kein Stereotyp, da die Sequenz an Handlungen von den Parametern der Situation abhängt.“ Gemäß Fischbein und Grossman (1997, S. 29 f.) ist ein Schema sowohl stabil als auch flexibel – es verkörpert eine Art des Denkens, Interpretierens und Problemlösens und stellt ein organisiertes System von sequentiellen Interpretationen und Verfahren dar, die zusammen einen bestimmten Grad an gedanklicher Reifung und eine ausreichende Menge an Erfahrung ausdrücken. Schemata sollten dabei nicht als eine Art mechanische Programme, sondern als auf der Logik basierende Strukturen angesehen werden.

Folgende Unterscheidung wird von Fischbein und Grossman (1997, S. 30) als epistemologisch bedeutend angesehen: die Unterscheidung zwischen „allgemeinen Schemata“ und „spezifischen Schemata“. Allgemeine Schemata haben eine grundlegende, strukturierende Rolle und werden daher auch als strukturelle Schemata bezeichnet.

Folgende Beispiele lassen sich anführen (vgl. Fischbein & Grossman, 1997, S. 30): die Schemata der Klassifikation, Fortsetzung und Bijektion, das Konzept von Maßzahl und Maßeinheit, die Vorstellung von Zahlen, die Konzepte von deterministischen Beziehungen und Zufall, die Konzepte von Proportion,

Wahrscheinlichkeit, Korrelation und kombinatorischen Operationen sowie die Konzepte von formalem gegenüber empirischem Beweis.

Spezifische Schemata sind stärker inhaltsgebunden und spezieller. Sie stellen die Voraussetzungen dar, um ein Objekt identifizieren oder eine bestimmte Operation durchführen zu können.

Beispielhaft lassen sich alle Konzepte mit einer spezifischen Bedeutung (wie Dreieck, Stuhl oder Bleistift), alle Reflexe und alle mathematischen oder naturwissenschaftlichen Formeln anführen (vgl. Fischbein & Grossman, 1997, S. 30).

Dabei ist zu berücksichtigen, dass Schemata hierarchisch organisiert sind: von ganz allgemeinen hin zu spezifischen, inhaltsgebundenen Schemata. In der nachfolgenden Abbildung ist dies beispielhaft und ausschnittsweise für die Information „Werfen einer Münze“ dargestellt.

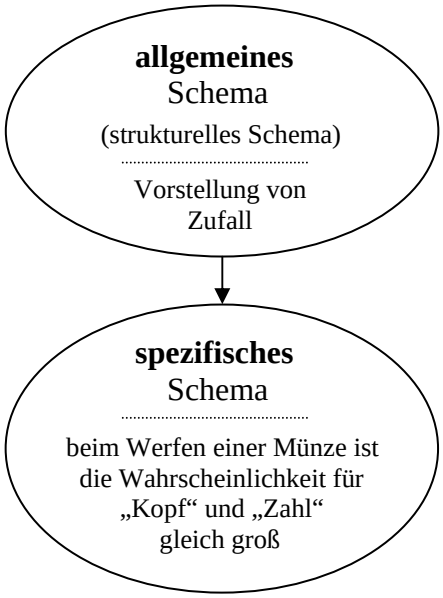


Abb. 3.6. Unterscheidung zwischen allgemeinem und spezifischem Schema

Für Fischbein und Grossman (1997, S. 30) sind die verschiedenen Abschnitte in der ontogenetischen Evolution menschlicher Intelligenz dadurch gekennzeichnet, dass neue, strukturelle Schemata konstituiert werden, wobei (der Theorie des Conceptual Change entsprechend) eine Integration der alten in die neuen Schemata stattfindet. Die neuen Schemata charakterisieren dabei die einzelnen Entwicklungsphasen des Denkens, welche im Abschnitt 3.3.4 beschrieben werden. Fischbein und Grossman (1997, S. 31) gehen davon aus, dass beim Lernenden ein echtes Verständnis eines bestimmten Konzeptes oder einer Operation nur erreicht werden kann, wenn die Hierarchie der betreffenden Schemata vollständig ausgebildet und zudem gedanklich integriert ist. In welchem Verhältnis Schemata und Intuitionen dabei stehen, wird im Folgenden beschrieben.

3.3.3 Verhältnis von probabilistischen Intuitionen und Schemata

Bezüglich des Verhältnisses von Intuitionen und Schemata wird von Fischbein und Grossman (1997, S. 31) festgehalten, dass sowohl Intuitionen als auch Schemata im Allgemeinen stabile,

gut strukturierte, gut integrierte und äußerst einflussreiche Gedanken-Verhaltens-Strukturen beinhalten. Jedoch ist davon auszugehen, dass keine reinen Intuitionen existieren, sondern Intuitionen immer aus dem Inneren heraus manipuliert und geformt werden durch bestimmte intellektuelle Schemata (Fischbein & Grossman, 1997, S. 28). In jede Intuition ist also ein bestimmtes intellektuelles Schema eingebettet, welches stillschweigend agiert und zu einem wesentlichen Bestandteil der betreffenden Intuition wird (Fischbein & Schnarch, 1997, S. 103).

Fischbein und Schnarch (1997, S. 103) weisen darauf hin, dass diese intellektuellen Schemata (im Sinne von „allgemeinen Prinzipien“) mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler stärker und besser in die intellektuelle Aktivität integriert werden und somit einen größeren Einfluss auf die theoretischen Entscheidungen ausüben.

Beispielhaft für das probabilistische Denken lassen sich insbesondere folgende Schemata anführen, welche einen Einfluss auf Entscheidungen, die auf Intuitionen basieren, ausüben (vgl. Fischbein & Schnarch, 1997, S. 103): das Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit, das (allgemeine) Prinzip der Verhältnisgleichheit und das (allgemeine) Prinzip der Kausalität, das der „simple everyday heuristic“ der *kausalen Schemata* zugrunde liegt.

So gehen Fischbein und Schnarch (1997, S. 103) davon aus, dass die mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler stattfindende Verinnerlichung des Prinzips der stochastischen Unabhängigkeit dazu führt, dass bei diesbezüglichen Zufallsexperimenten die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Repräsentativität* überwunden wird.

Die ebenfalls mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler stattfindende Verinnerlichung des Prinzips der Verhältnisgleichheit kann dagegen als Ursache für eine kognitive Verzerrung angesehen werden, welche mit der Anwendung der Heuristik der *Repräsentativität* einhergeht: die Insensibilität gegenüber der Stichprobengröße. So wird zur Einschätzung der Wahrscheinlichkeit von Stichprobenergebnissen nicht die Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen herangezogen, sondern (fälschlicherweise) das Prinzip der Verhältnisgleichheit, da sich dieses „von selbst als relevant aufdrängt“ (Fischbein & Schnarch, 1997, S. 103). Dass sich das Prinzip der Verhältnisgleichheit bei dieser Art von Problemstellung von selbst als relevant aufdrängt, hängt für Greer (2001, S. 24) auch damit zusammen, dass es bei anderen Arten von Problemstellungen, wie dem Vergleich von Chancen, zur Ermittlung einer korrekten Lösung führt – so ist es beispielsweise gleich wahrscheinlich, eine weiße Spielmarke aus 3 weißen und 2 schwarzen Spielmarken zu ziehen wie aus 300 weißen und 200 schwarzen Spielmarken.

Das Prinzip der Kausalität wird von Fischbein und Schnarch (1997, S. 103) ebenfalls als ein tief verwurzeltes Schema angesehen, wobei die tiefe Verwurzelung dazu führt, dass bei diesbezüglichen Problemstellungen ein wesentlicher Teil der Information vernachlässigt wird und es somit zu dem als „time-axis fallacy“ oder „the Falk phenomenon“ bezeichneten Fehlschluss kommt – es wird dabei nicht von einer formalen mathematischen, sondern von einer konkreten, kausalen, zeitorientierten Beziehung ausgegangen, im Sinne von „das Vorangegangene bestimmt das Darauffolgende“.

Für Fischbein und Schnarch (1997, S. 104) wird die intuitive Lösung eines Problems durch die Interaktion zwischen einem allgemeinen intellektuellen Schema, das intuitiv akzeptiert wird, und gewissen spezifischen Einschränkungen des Problems geformt, wobei die Interventionen des Schemas sowohl adäquat als auch inadäquat sein können. Das betreffende Schema ist dabei in sich stets formal korrekt – es passt jedoch unter Umständen „nicht wirklich“ zum vorliegenden Problem (Fischbein & Schnarch, 1996). Explizit wiedergegeben wird das betreffende Schema, wenn für die Lösung eine Rechtfertigung erforderlich ist.

Die Instruktion im Unterricht kann dazu beitragen, dass von den Schülerinnen und Schülern die Konflikte zwischen ihren primären intuitiven Schemata und den spezifischen Arten

des Denkens in stochastischen Situationen aktiv erfahren werden. Wenn von den Schülerinnen und Schülern zudem gelernt wird, die Ursachen dieser Konflikte und der sich ergebenden Fehlschlüsse zu analysieren, dann können die betreffenden Konflikte und Fehlschlüsse unter Umständen vermieden werden – es kann sich so eine „echt probabilistische Art des Denkens“ entwickeln (Fischbein & Schnarch, 1997).

Ein Modell zu verschiedenen Phasen der Entwicklung des probabilistischen Denkens nach Piaget und Inhelder (1951) wird im Folgenden näher beschrieben.

3.3.4 Entwicklungsphasen des probabilistischen Denkens

Den Ausgangspunkt für die Entwicklung des probabilistischen Denkens bilden sensomotorische Schemata, welche in zunehmend komplexere kognitive Strukturen umstrukturiert werden – zuerst in präoperative und dann in operative (Scholz, 1991, S. 244). Operative kognitive Strukturen stellen die Grundvoraussetzung dafür dar, dass logisch-mathematische Konzepte überhaupt entstehen können. Zur Begründung lässt sich anführen, dass die in logisch-mathematischen Problemen innewohnenden quantitativen Beziehungen vom heranwachsenden Kind nur durch logische Operationen umstrukturiert werden können – dies trifft auch auf die kindliche Konstruktion der Vorstellung von Wahrscheinlichkeit zu (Scholz, 1991, S. 244).

Laut Hawkins und Kapadia (1984, S. 366), welche auf Siegel und Andrews (1962) verweisen, liegt bereits bei Kindern im Alter von 3 bis 5 Jahren[4] ein gewisses Bewusstsein von Wahrscheinlichkeit vor, das sich beispielsweise in Form des „probability matching“ zeigt. Der Begriff des „probability matching“ beschreibt, dass sich bei einer Serie von Versuchen die relativen Häufigkeiten der von den Kindern vorhergesagten Ereignisse den Wahrscheinlichkeiten der betreffenden Ereignisse immer besser annähern (Greer, 2001, S. 15).

> In der „Standardversion“ ist vom Probanden bei einer Serie von Zufallsversuchen jeweils vorherzusagen, welches von zwei möglichen Ereignissen *A* bzw. *B* beim nächsten Versuch eintreten wird, wobei die (dem Probanden unbekannte) Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von *A* bzw. *B* während der Versuchsserie unverändert bleibt (zum Beispiel 70% für das Eintreten von *A* und 30% für das Eintreten von *B*).

Anzumerken ist, dass bei Kindern im Alter von 3 Jahren insbesondere dann das Phänomen des „probability matching“ beobachtbar ist und somit auf ein gewisses Bewusstsein von Wahrscheinlichkeit geschlossen werden kann, wenn die betreffenden Aufgaben kein hohes Niveau an verbalem Verständnis erfordern (Scholz, 1991, S. 245).

Piaget und Inhelder (1951, S. 195 f.) kommen zu dem Ergebnis, dass das Zufällige von Kindern erst nach und nach entdeckt wird und diesbezüglich die enge Korrelation auffällig ist, welche die Entstehung der Vorstellungen von Zufall und Wahrscheinlichkeit mit denen der verschiedenen Operationen aufweist. In Anlehnung an die Entwicklung der elementaren logisch-arithmetischen Operationen, wozu beispielsweise der Umgang mit Brüchen zählt, werden von Piaget und Inhelder (1951, S. 199 f.; vgl. Scholz, 1991, S. 243 f.) drei Phasen der Entwicklung des probabilistischen Denkens unterschieden:

- die Phase der „Gleichgültigkeit gegenüber dem Möglichen und dem Notwendigen“, welche mit der präoperationalen Phase einhergeht,
- die Phase der „Entdeckung des Zufalls als nicht zusammensetzbare Realität im Gegensatz zu den Operationen“, welche mit der Phase der konkreten Operationen einhergeht, sowie

[4] Diese und alle weiteren Altersangaben sind als „*im Durchschnitt*“ aufzufassen – wird eine konkrete Schülerin oder ein konkreter Schüler betrachtet, so können im Vergleich zu den Angaben durchaus Abweichungen feststellbar sein.

- die Phase der probabilistischen Komposition, der „Synthese von Zufall und deduktiven Operationen“, welche mit der Phase der formalen Operationen einhergeht.

Anzumerken ist, dass an den Erkenntnissen von Piaget und Inhelder (1951) inzwischen auch Kritik geübt wird (was jedoch an der Würdigung ihrer bahnbrechenden Arbeit nichts ändert). Exemplarisch lässt sich anführen, dass Kinder, die sich in der präoperationalen Phase befinden, entgegen der Annahme von Piaget und Inhelder (1951) in bestimmten Kontexten bereits zwischen zufälligen und nicht-zufälligen Ereignissen unterscheiden können: Sie begreifen zum Beispiel den deterministischen Charakter des Auszählreims „Ene mene muh“ (Martignon & Wassner, 2005, S. 209).

Die Phase der „Gleichgültigkeit gegenüber dem Möglichen und dem Notwendigen“ erstreckt sich beim Kind bis zu einem Alter von 7 bis 8 Jahren und ist, was die Operationen betrifft, durch das Fehlen der umkehrbaren Zusammensetzung gekennzeichnet (Piaget & Inhelder, 1951, S. 196). Die Begründungen bei Spielen bleiben prälogisch und werden nur durch intuitive Systeme der Regulierung geregelt, ohne hierarchische Verbindungen, ohne Erhaltung der Gesamtheit und ohne Strenge in den möglichen Schlussfolgerungen, aber mit einer schrittweisen Gliederung der intuitiven Zusammenhänge, welche allmählich zur Ebene der Operationen führt. Kinder, die sich in dieser Phase der Denkentwicklung befinden, sind nicht dazu in der Lage, alle paarweisen Kombinationen, alle Permutationen oder alle paarweisen Anordnungen zu finden ohne eine davon zu vergessen. Als Erklärung wird von Piaget und Inhelder (1951, S. 196) angeführt, dass hierzu bestimmte multiplikative Operationen nötig sind, die von den Kindern noch nicht beherrscht werden. Scholz (1991, S. 244) weist darauf hin, dass Kinder in diesem Altersbereich noch nicht in der Lage sind, logische Beziehungen (wie Ursache und Wirkung) oder ähnliche deduktive Beziehungen zu konstruieren, und daher auch nicht verstehen können, wieso Ereignisse eintreten – bezogen auf die Theorie des Conceptual Change fehlt den Kindern also das kognitive Grundgerüst, das zum Erkennen des Unterschieds zwischen notwendigen (und damit vorhersagbaren) und möglichen (und somit nicht vorhersagbaren) Ereignissen erforderlich ist.

Piaget und Inhelder (1951) unterscheiden innerhalb dieser Phase der Denkentwicklung zwischen zwei Stufen, die sie als Stufe IA und Stufe IB bezeichnen. Die Stufe IA ist dadurch gekennzeichnet, dass quantitative Verhältnisse nicht berücksichtigt und intuitive Vergleiche von diesem Standpunkt aus durchgeführt werden. Im Unterschied zur Stufe IA werden von Kindern, die sich auf der Stufe IB befinden, ausgehend von der Wahrnehmung bereits gewisse Arten der intuitiven Regelung entwickelt, was beispielsweise in der richtigen Beantwortung von Fragen zum Vergleich von Chancenverhältnissen (wie zum Beispiel für das Ziehen einer roten Spielmarke aus einem Beutel mit einer roten und drei weißen Spielmarken beziehungsweise aus einem Beutel mit einer roten und sechs weißen Spielmarken) zum Ausdruck kommt. Jedoch werden auf dieser Stufe noch nicht alle dieser Fragen mit einer einzigen Variablen systematisch gelöst (Piaget & Inhelder, 1951, S. 139) – dies ist erst auf der folgenden Stufe, welche mit der Phase der konkreten Operationen einhergeht, der Fall.

Charakteristisch für die Phase der „Entdeckung des Zufalls als nicht zusammensetzbare Realität im Gegensatz zu den Operationen“, welche das Alter von 7 bis 8 Jahren bis zum Alter von 11 bis 12 Jahren umfasst, ist die Konstruktion von operativen Zusammensetzungen logischer Ordnung und von numerischen Gruppen – jedoch auf einer im Wesentlichen konkreten Ebene (Piaget & Inhelder, 1951, S. 196). Laut Piaget und Inhelder (1951) beginnt diese zweite Phase der Denkentwicklung, welche auch die erstmalige Entwicklung der Vorstellung von Zufall kennzeichnet, mit der Entdeckung der logisch-arithmetischen Operationen. Zum einen führt die Entdeckung der deduktiven oder der operativen Notwendigkeit dazu, dass im Gegenzug der nicht-deduktive Charakter des Zufälligen begriffen werden kann – zum anderen führt die Entdeckung des operativen Ineinandergreifens von komplementären Teilen eines

Ganzen (beispielsweise *A* und *A'* bilden *B*) zur Entdeckung einer konkreten Trennung (wenn *x* aus *B* ist, dann ist *x* aus *A* oder aus *A'*), welche die Vorstellung von zwei oder mehreren Möglichkeiten unterstützt und eine Unterscheidung zwischen dem Möglichen und dem Notwendigen ermöglicht, da sie sowohl das Notwendige (wenn *x* aus *B* ist, dann muss *x* aus *A* oder aus *A'* sein) als auch das Mögliche (wenn *x* aus *B* ist, dann kann *x* aus *A* sein, *x* kann aber auch aus *A'* sein) impliziert. Scholz (1991) weist darauf hin, dass bei den Kindern zum Verständnis der Zufälligkeit von Ereignissen kognitive Strukturen in konkrete Operationen des Denkens organisiert sein müssen. Durch diese kann die logische Notwendigkeit des Eintretens deterministischer Ereignisse über logische Beziehungen begriffen werden. Da sich zufällige Ereignisse aufgrund ihrer Irreversibilität nicht in konkret-operativen Strukturen darstellen lassen, kann hier auch nicht auf das Eintreten von Ereignissen geschlossen werden, solange nicht zwischen notwendigen und möglichen Ereignissen differenziert werden kann (Scholz, 1991).

Innerhalb dieser Phase der Denkentwicklung wird von Piaget und Inhelder (1951) ebenfalls zwischen zwei Stufen unterschieden: Stufe IIA und Stufe IIB. In Anlehnung an die Stufe IB ist die Stufe IIA dadurch gekennzeichnet, dass Vergleiche mit einer einzigen Variablen durchgängig erfolgreich bewältigt werden (wie beispielsweise der Vergleich des Chancenverhältnisses für das Ziehen einer roten Spielmarke aus einem Beutel mit einer roten und vier weißen Spielmarken beziehungsweise aus einem Beutel mit zwei roten und vier weißen Spielmarken) – allerdings werden Fragen zu Verhältnissen, welche Vergleiche mit zwei Variablen beinhalten (wie zum Beispiel der Vergleich des Chancenverhältnisses für das Ziehen einer roten Spielmarke aus einem Beutel mit einer roten und zwei weißen Spielmarken beziehungsweise aus einem Beutel mit zwei roten und vier weißen Spielmarken), auf dieser Stufe noch generell falsch beantwortet (Piaget & Inhelder, 1951, S. 141 f.). Kinder, die sich auf der Stufe IIB der Denkentwicklung befinden, lösen diese Problemstellungen nach und nach durch empirisches Herantasten – eine systematische Lösung liegt auf dieser Stufe jedoch noch nicht vor (Piaget & Inhelder, 1951, S. 145). Scholz (1991) weist darauf hin, dass Kinder, die sich in der Phase der konkreten Operationen befinden, Wahrscheinlichkeiten bereits quantitativ einschätzen können, allerdings nur dann, wenn die Anzahl der Ereignisse begrenzt ist und das Verhältnis zwischen günstigen und ungünstigen Fällen leicht berechnet werden kann.

Im Alter von 11 bis 12 Jahren schließt sich an die Phase der „Entdeckung des Zufalls als nicht zusammensetzbare Realität im Gegensatz zu den Operationen“ die Phase der probabilistischen Komposition, der „Synthese von Zufall und deduktiven Operationen“ an. Diese Phase, welche mit der Phase der formalen Operationen einhergeht, ist durch das formale Denken gekennzeichnet, also die Möglichkeit, eines mit dem anderen oder mehrere Systeme der konkreten Operationen zugleich zu verbinden und in Ausdrücke hypothetisch-deduktiver Implikationen zu übersetzen (Piaget & Inhelder, 1951, S. 196). Erst in dieser Phase organisiert sich die Einschätzung der Wahrscheinlichkeit in ihrem allgemeinen Charakter.

Im Vergleich zu Kindern, die sich auf der Stufe IIB befinden, wird von Kindern, die sich auf der Stufe III befinden, bei Vergleichen mit zwei Variablen eine allgemeine und schnelle Lösung gefunden (wie zum Beispiel beim Vergleich des Chancenverhältnisses für das Ziehen einer roten Spielmarke aus einem Beutel mit einer roten und zwei weißen Spielmarken beziehungsweise aus einem Beutel mit zwei roten und fünf weißen Spielmarken), ohne dass hierzu ein Herantasten stattfindet (Piaget & Inhelder, 1951, S. 148). Scholz (1991) weist darauf hin, dass die konkreten Operationen in der Phase der formalen Operationen aufeinander abgestimmt und in ein komplett geschlossenes und reversibles System an logischen Operationen transformiert werden. Dies stellt die Grundvoraussetzung dafür dar, dass die Kinder bei der Berechnung von Verhältnissen die Gesamtheit aller Ereignisse konstruieren und darstellen sowie multiple Beziehungen in Betracht ziehen können (Scholz, 1991, S. 244).

In der nachfolgenden Abbildung sind die verschiedenen Phasen der Entwicklung und die zugehörigen Stufen des probabilistischen Denkens im Überblick dargestellt.

ab 11./12. Lebensjahr	**Phase der formalen Operationen**	Stufe III
7./8. bis 11./12. Lebensjahr	**Phase der konkreten Operationen**	Stufe IIB Stufe IIA
bis 7./8. Lebensjahr	**präoperationale Phase**	Stufe IB Stufe IA

Abb. 3.7. Ein Modell zu Entwicklungsphasen und Stufen des probabilistischen Denkens nach Piaget und Inhelder (1951, S. 195 f.; vgl. Scholz, 1991, S. 244)

Für Piaget und Inhelder (1951, S. 217) ist der abschließende Gedankengang, so wie er sich im Zustand des Äquilibriums des Denkens darstellt, immer deduktiv. Die Deduktion beruht diesbezüglich auf einem System an logisch-arithmetischen oder raumzeitlichen Operationen – im Gegensatz zu den irreversiblen und nicht zusammensetzbaren Prozessen, welche für die Vorstellung von Zufall kennzeichnend sind. Das Zufällige ist also, anders als die deduktiven Schlussfolgerungen, nicht determiniert, wobei diese „relative Undeterminiertheit“ in drei Formen vorliegen kann (vgl. Piaget & Inhelder, 1951, S. 217 f.):

- erstens hinsichtlich der Anwendung logisch-arithmetischer Operationen,
- zweitens in Bezug auf die Anwendung raumzeitlicher Operationen und
- drittens bezüglich der Anwendung logisch-arithmetischer und raumzeitlicher Operationen zugleich.

Bei der ersten Form reduziert sich das Zufällige auf die logische Undeterminiertheit, welche durch die Vorstellung der Nichtimplikation, oder, präziser, der nicht-deduktiven Zusammensetzbarkeit, ausgedrückt werden kann.

Folgendes Beispiel illustriert dies: Die Tatsache „*A* ist der Freund von *B*, *B* ist der Freund von *C*, aber *A* ist kein Freund von *C*“ drückt eine Facette des Zufalls aus, welche im Widerspruch zur deduktiven Schlussfolgerung „$A = B$ und $B = C$, also $A = C$“ steht.

Bei der zweiten Form reduziert sich das Zufällige nicht mehr auf die logische Nichtimplikation oder Nichtzusammensetzbarkeit, sondern auf die Nichtkausalität.

Dies lässt sich an folgendem Beispiel veranschaulichen: Die Ursache für das Laufen eines Menschen auf der Straße steht nicht notwendigerweise im Zusammenhang mit den Ursachen und Auswirkungen, die das Herabstürzen eines Dachziegels unter dem Einfluss des Windes betreffen (wobei dies auch umgekehrt gilt).

Die bei der dritten Form vorliegende doppelte Undeterminiertheit kommt beispielsweise durch die Grenze zwischen der Mikrophysik und der Makrophysik zum Ausdruck, welche von Piaget und Inhelder (1951) als charakteristisch für diese dritte Form angesehen wird.

Anzumerken ist, dass die Undeterminiertheit bei den drei genannten Formen in doppelter Hinsicht relativ ist: zum einen, da die Undeterminiertheit niemals vollständig ist, weil die Berücksichtigung der Streuungen es erlaubt, jedem Ereignis einen bestimmten Koeffizienten der Wahrscheinlichkeit und damit der Bestimmbarkeit zuzuordnen, und zum anderen, da sich das Denken nicht an der Undeterminiertheit selbst stößt, sondern am System der berücksichtigten Operationen (Piaget & Inhelder, 1951, S. 219). So illustriert beispielsweise das Problem der

(händischen) Bestimmung der siebten Dezimalstelle von Logarithmen den relativen Charakter des Zufalls, welcher in diesem Fall eine besondere Rolle spielt, da diese Dezimalstelle andererseits wohlbestimmt ist. Für Piaget und Inhelder (1951, S. 222) mündet der Konflikt zwischen der Irreversibilität des Zufalls und der Reversibilität der operativen Mechanismen darin, dass der Zufall schließlich in die Ausdrucksweise der Operationen übersetzt wird.

Für Piaget und Inhelder (1951, S. 224) ist aus einer psychologischen Sichtweise anzunehmen, dass sich jede Einschätzung der Wahrscheinlichkeit, egal ob explizit oder implizit, auf ein System der Verteilung oder der Häufigkeiten bezieht – die Intuition der Wahrscheinlichkeit bildet sich beim Kind erst von dem Moment an, in dem diese Überlegung vollständig zustande kommt. Piaget und Inhelder (1951, S. 226) halten fest: „Kurz, genauso wie das ‚Notwendige' im Verständnis mit ‚immer' oder mit ‚alles' in der Erweiterung übereinstimmt, genauso stimmen die verschiedenen Grade von ‚wahrscheinlich' im Verständnis eineindeutig mit den verschiedenen Bedeutungen von ‚häufig' in der Erweiterung überein."

Im Folgenden werden die Erkenntnisse zum probabilistischen Denken in den einzelnen Entwicklungsphasen näher beschrieben, wobei der Schwerpunkt auf der Phase der konkreten Operationen und der Phase der formalen Operationen liegt – also den beiden Phasen, die für das intuitive probabilistische Denken der Schülerinnen und Schüler im Bereich der Sekundarstufe I charakteristisch sind.

3.3.5 Präoperationale Phase

Bezüglich der Intuition von Zufall kommt Fischbein (1975, S. 117 f.) zu dem Ergebnis, dass bereits Kinder, die sich in der präoperationalen Phase befinden, das Zufällige, im Sinne des Unvorhersagbaren, vom Deduzierbaren unterscheiden können – jedoch werden die Interpretationen der Kinder durch einige allgemeine Merkmale ihrer Intelligenz verzerrt: Durch einen gewissen Subjektivismus werden Zufall und Willkür verwechselt; Fakten werden nur auf der Grundlage der unmittelbar vorhergehenden Fakten beurteilt; es besteht die Vorstellung, dass zufällige Ereignisse von der Person, die die Ereignisse auslöst, gesteuert werden können, und Unwesentliches, wie die subjektive Vorliebe, hat einen Einfluss darauf, ob Ereignisse als zufällig angesehen werden oder als determiniert. Fischbein (1975, S. 118) geht davon aus, dass Kinder vor dem Eintritt in die Phase der konkreten Operationen zwar über kein Konzept von Zufall verfügen, aber, entgegen der Annahme von Piaget und Inhelder (1951), bereits über eine Primärintuition, welche in Fällen mit einer kleinen Anzahl von Möglichkeiten zutreffend ist – manchmal sogar zutreffender als die Intuition von Kindern, die sich in der Phase der formalen Operationen befinden.

Laut Fischbein (1975, S. 118) ist schon bei Kindern, die sich in der präoperationalen Phase befinden, eine Primärintuition von relativer Häufigkeit vorhanden. So wird von diesen Kindern bei einer Serie von Experimenten im Allgemeinen das häufigste Ereignis mit einer größeren als der tatsächlichen Häufigkeit vorhergesagt, wobei die vorhergesagte relative Häufigkeit gegen 100% tendiert. Für dieses Phänomen des „over-shooting" lassen sich zwei mögliche Interpretationen anführen: zum einen, dass bei den Kindern noch keine bestimmten intellektuellen Mechanismen vorhanden sind, die zu der Suche nach komplexeren Strategien anregen, sodass offensichtlich die rudimentärste Vorhersagestrategie, durchgehend das häufigste Ereignis anzugeben, gewählt wird, und zum anderen, dass es sich dabei um das direkte Ergebnis eines Konditionierungsprozesses handelt (Fischbein, 1975, S. 119), bei dem sich die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Vorhersage mit dem Eintreten des betreffenden Ereignisses erhöht (Greer, 2001, S. 16). Die Ergebnisse von Wollring (2007) legen ebenfalls nahe, dass bereits Kinder, die sich noch in der präoperationalen Phase befinden, über eine frequen-

tistische Primärintuition zur Wahrscheinlichkeit verfügen, wenngleich diese von anderen Vorstellungen überlagert ist.

Das probabilistische Urteil ist bei Kindern in dieser Phase der Denkentwicklung schwankend, weil sie noch keine adäquate Rahmentheorie haben (Fischbein, 1975, S. 120), also im Sinne der Theorie des Conceptual Change noch nicht über zutreffende „presuppositions“ verfügen. Vorhersagen und Einschätzungen basieren im Wesentlichen auf Einflüssen, die auf der kognitiven Ebene wahrgenommen werden. Bei einer Diskrepanz zwischen der wahrgenommenen Information und den gespeicherten Informationen ist die wahrgenommene Information entscheidend für die Vorhersage oder Einschätzung. Zudem werden Vorhersagen und Einschätzungen durch die Vorliebe für bestimmte Farben und die Position von Objekten im Raum beeinflusst. Wenn diese Einflüsse nicht vorhanden und die erforderlichen Hilfsoperationen des Vergleichs und der Berechnung darüber hinaus einfach sind, dann sind Kinder, die sich in der präoperationalen Phase befinden, dazu fähig, Chancen richtig einzuschätzen (Fischbein, 1975, S. 121).

Fischbein (1975) weist jedoch darauf hin, dass Kinder, die sich in dieser Phase der Denkentwicklung befinden, möglicherweise ein Schema, das einen doppelten Vergleich umfasst, trotz der Instruktion nicht assimilieren können. Die Chancen werden in Situationen mit mehreren verschiedenen Paaren von Objekten nur dann richtig eingeschätzt, wenn entweder die günstigen oder die ungünstigen Objekte in gleicher Anzahl in jedem Paar präsent sind, die erforderliche Operation also auf einen binären Vergleich reduziert werden kann (Fischbein, 1975, S. 120; vgl. Wollring, 1995).

Kombinatorische Operationen werden von Kindern in der präoperationalen Phase der Denkentwicklung nur in einer empirischen Art und Weise durchgeführt – dabei wird von den Kindern im Allgemeinen nicht einmal versucht, eine Methode zu finden, um eine gründliche Bestandsaufnahme aller möglichen Kombinationen, Permutationen oder Anordnungen in der betreffenden Situation durchführen zu können (Fischbein, 1975, S. 121; Piaget & Inhelder, 1951, S. 153 f.).

> Dies führt beispielsweise dazu, dass bei drei zur Auswahl stehenden Farben (zum Beispiel „Rot“, „Weiß“ und „Blau“) nicht alle möglichen paarweisen Kombinationen, „Rot und Rot“, „Rot und Weiß“, „Rot und Blau“, „Weiß und Weiß“, „Weiß und Blau“ sowie „Blau und Blau“, (ohne Hilfestellung) gefunden werden (vgl. Piaget & Inhelder, 1951, S. 154).

3.3.6 Phase der konkreten Operationen

Mit dem Eintritt in die Phase der konkreten Operationen wird, im Sinne eines Conceptual Change, aus der Primärintuition von Zufall eine klare, organisierte, konzeptuelle Struktur (Fischbein, 1975, S. 121). Zudem ist durch die Aneignung von räumlich-zeitlichen und logisch-mathematischen operationalen Schemata die Möglichkeit gegeben, zwischen zufälligen und deduzierbaren Vorgängen zu unterscheiden, auch auf der Vorstellungsebene – jedoch ist dieser Prozess in der vorliegenden Phase der Denkentwicklung noch größtenteils auf die konkrete Ebene beschränkt und somit nicht abgeschlossen. In der Phase der konkreten Operationen beginnen Kinder außerdem die Interaktion in Kausalketten, die zu unvorhersagbaren Ereignissen führen, und die Irreversibilität von zufälligen Phänomenen zu verstehen – einhergehend mit dem Verständnis der Reversibilität (Fischbein, 1975, S. 121).

> Folgendes Beispiel lässt sich zur Illustration anführen: Befindet sich eine weiße Kugel allein auf einem Billardtisch, so kann der Weg, den sie zurücklegt, als kausale Folge der Anstoßrichtung und -geschwindigkeit angesehen werden. Befindet sich die weiße Kugel dagegen mit vielen anderen Kugeln auf dem Billardtisch, so führt die Interaktion der Bewegungen aller Kugeln dazu, dass der Weg, den die weiße Kugel zurücklegt, unvorhersagbar wird (vgl. Piaget & Inhelder, 1951, S. 205).

Gemäß Fischbein (1975, S. 121) nähern sich in dieser Phase der Denkentwicklung die von den Kindern bei einer Serie von Versuchen vorhergesagten relativen Häufigkeiten den tatsächlichen relativen Häufigkeiten immer besser an, was sich auf eine Entwicklung in der Primärintuition von relativer Häufigkeit zurückführen lässt. Wird Intuition als das kognitiv fixierte Ergebnis gesammelter Erfahrung angesehen, dann kann die Entwicklung in der Primärintuition von relativer Häufigkeit als natürlicher Prozess aufgrund einer gestiegenen Erfahrung im Umgang mit probabilistischen Situationen angesehen werden, in denen die korrekte Einschätzung der relativen Häufigkeit von Phänomenen von Bedeutung ist. Andererseits lässt sich die Entwicklung in der Primärintuition von relativer Häufigkeit auch auf eine korrektere Interpretation von Daten zurückführen, welche die relativen Häufigkeiten von Ereignissen aus der eigenen Erfahrung betreffen. Diese korrektere Interpretation von Daten geht mit den Schemata sich entwickelnder Intelligenz einher, durch die Operationen besser koordiniert werden können. Im Vergleich zur präoperationalen Phase ist zudem die Dominanz der wahrgenommenen Daten nicht mehr so stark, außerdem liegen konsistentere und effizientere Repräsentationen vor. Anzumerken ist, dass die Intuition von relativer Häufigkeit die Fähigkeit voraussetzt, Runs von Ereignissen derart zu gruppieren, dass globale Schätzungen von Verhältnissen gemacht werden können (Fischbein, 1975, S. 122). All dies deutet für Fischbein darauf hin, dass die Intuition von relativer Häufigkeit, obwohl sie primär und präoperational ist (analog zu einer klassisch-konditionierten Antwort), trotzdem vom allgemeinen Erwerb der Intelligenz während den operationalen Phasen profitiert. Dies entspricht der Annahme der Theorie des Conceptual Change, dass bei der Veränderung von allgemeinen Rahmentheorien („presuppositions“) auch die damit verbundenen Vorstellungen („beliefs“) angepasst werden.

Bezüglich der Einschätzung von Chancen und der Vorstellung von Wahrscheinlichkeit ist im Vergleich zur präoperationalen Phase keine Verbesserung feststellbar: Ohne entsprechende Instruktion können Kinder, die sich in der Phase der konkreten Operationen befinden, weiterhin nur Probleme erfolgreich lösen, bei denen die erforderliche Operation nicht über einen binären Vergleich hinausgeht – jedoch ist in dieser Phase im Vergleich zur vorangegangenen Phase der prozentuale Anteil korrekter Antworten größer (Fischbein, 1975, S. 122).

Von Fischbein (1975, S. 123) wird darauf hingewiesen, dass Kinder, die sich in der Phase der konkreten Operationen befinden, zwar über kein Konzept von Wahrscheinlichkeit verfügen, was eine explizite und korrekte Berechnung von Wahrscheinlichkeiten anbelangt, aber, im Gegensatz zur Annahme von Piaget und Inhelder (1951), nach entsprechender Instruktion auch Probleme lösen können, die nicht auf binäre Vergleiche reduziert werden können. Für Fischbein (1975) ist dies ein Beleg dafür, dass das Fehlen des Konzepts der Proportionalität, welches charakteristisch für die Phase der formalen Operationen ist, kein Hindernis für das Erlernen des Konzepts der Wahrscheinlichkeit darstellt.

In Experimenten zum Lernen von Wahrscheinlichkeit wurde laut Fischbein (1975, S. 123) festgestellt, dass Kinder ab dem Eintritt in die Phase der konkreten Operationen bei einer Serie von Versuchen Antwortmuster zeigen, die sich mit dem festgestellten Phänomen des „probability matching“ überlagern. Beispielhaft werden folgende Antwortmuster aufgeführt: erstens Stereotype, wie im Fall von drei möglichen Antworten „links-Mitte-rechts“, zweitens die im Abschnitt 3.2.7 beschriebenen „recency effects“, wobei der „positive recency effect“ dem „negative recency effect“ vorausgeht, und drittens die Tendenz, Vorhersagen auf Muster zu stützen, die bei vorangegangenen Versuchen entdeckt wurden. Zudem wurde bei Experimenten, in denen nur eine Antwort verstärkt wurde, festgestellt, dass von Kindern im Alter von 9 bis 10 Jahren nicht mehr die Strategie der Gewinnmaximierung, also durchgehend das häufigste Ereignis anzugeben, angewendet wird, sondern andere Strategien, die eine größere Variabilität der Vorhersage erlauben, zum Einsatz kommen (Fischbein, 1975, S. 123).

Fischbein (1975, S. 123) weist darauf hin, dass Kinder, die sich in der Phase der konkreten Operationen befinden, zwar nach Methoden suchen, um eine Bestandsaufnahme aller Kombi-

nationen, Permutationen und Anordnungen, die mit einem gegebenen Satz an Elementen möglich sind, durchführen zu können, jedoch durch Versuch und Irrtum in der Regel nur zu Verfahren gelangen, die als rudimentär zu bezeichnen sind. Nach entsprechender Instruktion können Kinder, die kurz vor dem Eintritt in die Phase der formalen Operationen stehen, schließlich die enumerativen Verfahren, die bei der Konstruktion von Baumdiagrammen verwendet werden, assimilieren. Dies wird von Fischbein (1975, S. 124) als „struktureller Erwerb“ angesehen, da die Möglichkeit des Transfers gegeben ist – sowohl im näheren Sinne in Form der iterativen Verallgemeinerung als auch im weiteren Sinne in Form der konstruktiven Verallgemeinerung. Bezogen auf die Theorie des Conceptual Change liegt also neben der Plausibilität und der Verständlichkeit auch die Fruchtbarkeit dieser neuen Vorstellung vor.

Bei der Entwicklung des probabilistischen Denkens von Kindern, die sich in der Phase der konkreten Operationen befinden, ist zum einen eine positive Tendenz feststellbar, die durch das „probability matching“ zum Ausdruck kommt, zum anderen aber auch eine negative Tendenz, die sich in Form von Stereotypie und, unter bestimmten Umständen, Schwierigkeiten beim Erkennen der Gleichwahrscheinlichkeit äußert (Fischbein, 1975, S. 124).

Als Erklärung für diese gegenläufigen Tendenzen wird von Fischbein (1975, S. 124) angeführt, dass die Entwicklung der Intuitionen von Zufall, relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit mit zunehmendem Alter als eine Funktion

- der intellektuellen Entwicklung und
- der alltäglichen Erfahrung

des Kindes aufzufassen ist – diesbezüglich darf der Einfluss der Instruktion in der Schule und die damit einhergehende Entwicklung von Sekundärintuitionen nicht außer Acht gelassen werden. Fischbein weist darauf hin, dass die Instruktion in der Schule vom Determinismus geprägt ist und die rationale, wissenschaftliche Interpretation von Phänomenen zu sehr vereinfacht, indem diese als das Streben nach eindeutig kausalen oder logischen Abhängigkeiten dargestellt wird – dabei wird alles, was mit Ungewissheit, Überraschung oder Zufall assoziiert wird, als außerhalb der Möglichkeit einer konsistenten, rationalen, wissenschaftlichen Erklärung befindlich angesehen.

Dies führt für Fischbein (1975, S. 124) dazu, dass das Schema des Zufalls und das Schema des Determinierten, entgegen der Theorie von Piaget und Inhelder (1951), beim Kind nach einer Phase der Koexistenz lediglich in einer ziemlich instabilen Art und Weise verschmolzen werden, sodass das deterministische Denken die Intuition von Zufall und Wahrscheinlichkeit beeinflusst (vgl. Hawkins & Kapadia, 1984; Wollring, 1995).

Als primitivste Methode der Rationalisierung des Zufalls wird von Fischbein (1975) das bereits beschriebene Antwortmuster der Stereotypie angeführt. Eine weitere Methode, die auf der Rationalisierung des Zufalls basiert, führt zu dem bereits beschriebenen, als „negative recency effect“ bezeichneten Fehlschluss. Bei diesem wird nach sequentiellen Abhängigkeiten, welche die Unsicherheit verringern könnten, gesucht und dabei eine unzulässige Extrapolation der Stichprobenintuition durchgeführt (diese besagt, dass das Verhältnis von Elementen in der Stichprobe zum Verhältnis in der Grundgesamtheit tendiert – die Entstehung der Stichprobenintuition lässt sich darauf zurückführen, dass Zufallsstichproben, deren Ergebnis weit vom Verhältnis in der Grundgesamtheit abweicht, vergleichsweise selten zu beobachten sind). Die Reihenfolge der Elemente wird bei dieser Art des logischen Denkens nicht berücksichtigt, nur das Verhältnis (Fischbein, 1975, S. 125). Darüber hinaus scheint die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten langer Sequenzen sich wiederholender Elemente geringer zu sein als die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten kurzer, alternierender Sequenzen unterschiedlicher Elemente. Die beschriebenen intuitiven Einschätzungen werden dann (fälschlicherweise) auf Situationen übertragen, in denen Ereignisse, eines nach dem anderen, eingeschätzt werden müssen.

Laut Fischbein (1975, S. 125) werden bei dem als „negative recency effect“ bezeichneten Fehlschluss die fundamentalen Mechanismen von Intuitionen sichtbar: stabile, strukturelle Schemata, die alles in der Erfahrung des Einzelnen auswählen, assimilieren und speichern, was sich als förderlich für die Geschwindigkeit, Anpassungsfähigkeit und Effektivität des Handelns herausgestellt hat. Intuitionen stellen also die Basis für Extrapolationen dar. Die Schlussfolgerungen gehen dabei über das aus den Prämissen Deduzierbare hinaus und somit ins Unbekannte. Das mit einer Intuition einhergehende Gefühl der Zuversicht und der Überzeugung dient dazu, die Kluft, die die genau verfügbare Information von der finalen Interpretation trennt, zu kompensieren und vielleicht auch zu maskieren (Fischbein, 1975, S. 126). Beim Fehlen einer systematischen Kontrolle durch das konzeptuelle System, welches den allgemeinen Rahmentheorien in der Theorie des Conceptual Change entspricht, kann es durch verbotenerweise durchgeführte Extrapolationen dann zu Fehlern bei der Interpretation und Vorhersage kommen – auch wenn diese Fehler im Allgemeinen nicht als anomal anzusehen sind. So können die Fehler in den betreffenden Fällen zumeist auf die unpassende Anwendung bestimmter Formen der Intelligenz, deren Erwerb für die vorliegende Entwicklungsphase charakteristisch ist, zurückgeführt werden.

Beispielhaft für diesbezüglich unpassende Anwendungen lassen sich die Extrapolationen vom Wahrnehmbaren zum Abstrakten, vom Speziellen zum Allgemeinen, vom Endlichen zum Unendlichen sowie vom Modell zum Original anführen (vgl. Fischbein, 1975, S. 126).

Die Intuition, die den „recency effects“ zugrunde liegt, beruht auf einer bestätigten Erfahrung, welche in der Stichprobenintuition zum Ausdruck kommt – hierbei handelt es sich um eine nicht zutreffende Grundlage, die jedoch auf das hauptsächliche Bedürfnis der Intelligenz in der Phase der konkreten Operationen zurückgeführt werden kann: das Bedürfnis nach quantifizierbaren Vorhersagen (Fischbein, 1975, S. 126).

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass nicht zutreffende Intuitionen aus Verschmelzungen, Kurzschlüssen, Transfers und verbotenen Extrapolationen innerhalb der Schemata der allgemeinen Intelligenz in jeder einzelnen der Entwicklungsphasen hervorgehen können (Fischbein, 1975, S. 126). Nichtsdestotrotz wird es von Fischbein (1975, S. 126) als wichtig erachtet, dass zutreffende Intuitionen auch zur Ausübung kommen – denn wenn dies nicht der Fall ist oder die betreffenden Intuitionen systematisch unterdrückt werden, dann verkümmern sie; dass Intuitionen wirklich jemals verloren gehen, ist dagegen anzuzweifeln.

3.3.7 Phase der formalen Operationen

In der Phase der formalen Operationen befindliche Kinder sind dazu in der Lage, in einer hypothetisch-deduktiven Art und Weise in Relation zu Möglichkeiten (und nicht nur Realitäten) logisch zu denken – dies beinhaltet, dass Operationen an Operationen durchgeführt werden können (Fischbein, 1975, S. 126 f.).

Bezüglich der Intuition von Zufall wird von Fischbein (1975, S. 127) darauf hingewiesen, dass in der Phase der formalen Operationen die Synthese zwischen dem Zufälligen und dem Deduzierbaren weder spontan noch vollständig erkannt wird. So wird beispielsweise in zufälligen Situationen nach kausalen Zusammenhängen gesucht, die zu einer Verringerung der Unsicherheit führen könnten, auch wenn es in diesen Situationen gar keine derartigen Zusammenhänge geben kann. Laut Fischbein reicht die operationale Struktur des formalen Denkens allein nicht aus für die (im Sinne der Theorie des Conceptual Change) Verständlichkeit des Konzepts des Zufalls – auch wenn die operationale Struktur die dafür benötigten Schemata bereitstellt. Die Ursache für dieses Defizit lässt sich in den deterministisch geprägten kulturellen und erzieherischen Traditionen sehen, welche zufällige Ereignisse jenseits der Grenzen des Rationalen und Wissenschaftlichen einordnen. Daraus resultiert, dass die Intuition von

Zufall unvereinbar mit der Struktur des logischen Denkens wird, degradiert zu einem minderwertigen Status – als eine inadäquate Methode der Interpretation, die keine wissenschaftlichen Standards erfüllt (Fischbein, 1975, S. 127). Folglich wird das logisch-wissenschaftliche Denken ohne die Berücksichtigung der Intuition von Zufall und daher ohne die Gesamtheit der formalen Strukturen konstruiert, welche dazu fähig wären, das Mögliche in die Begriffe rationaler Konstruktionen zu übersetzen.

Fischbein (1975, S. 128) hebt hervor, dass bei Kindern, die sich in der Phase der formalen Operationen befinden, im Vergleich zu den vorangegangenen Phasen ein Fortschritt feststellbar ist, was die Intuition von relativer Häufigkeit betrifft – und zwar hauptsächlich in Fällen, in denen die Vorhersage in einem praktischen Nutzen resultiert. So ist beispielsweise bei entsprechenden Versuchsbedingungen der Einfluss der Entwicklung der Intelligenz auf das Vorhersageverhalten an der Anwendung der Strategie der Gewinnmaximierung erkennbar – wenn die Anwendung dieser Strategie nicht offensichtlich stereotyp erfolgt (Fischbein, 1975, S. 128).

Bei der Einschätzung von Chancen sind Kinder, die sich in der Phase der formalen Operationen befinden, den Kindern, die sich noch nicht in dieser Phase befinden, überlegen (Fischbein, 1975, S. 128; Piaget & Inhelder, 1951).

Zur Untersuchung des Einflusses der Instruktion auf das probabilistische Denken in der Phase der formalen Operationen wurden von Fischbein (1975, S. 128) folgende Konzepte und Verfahren in experimentellen Übungsstunden (innerhalb eines Schuljahres) behandelt: Ereignis, Stichprobengröße, Elementarereignis, zusammengesetztes Ereignis, Wahrscheinlichkeit als Maß für die Chance, relative Häufigkeit und kombinatorische Analyse. Gemäß Fischbein wurden die unterrichteten Konzepte von den Kindern mit großem Interesse verfolgt und zudem im Allgemeinen verstanden und korrekt angewendet – dies impliziert zumindest den Beginn einer Umstrukturierung der intuitiven Grundlage. Für Fischbein (1975, S. 129) stellen generative Modelle, wie zum Beispiel Baumdiagramme im Fall von kombinatorischen Operationen, das am besten geeignete unterrichtliche Mittel zur Unterstützung der Konstruktion von Sekundärintuitionen dar. Diese generativen Modelle können zudem eine ganze Klasse von verwandten Situationen repräsentieren und bieten sich darüber hinaus förmlich zur Übertragung auf andere Situationen an (Greer, 2001, S. 19).

Von Fischbein (1975, S. 128) wird auf die Annahme von Piaget und Inhelder (1951) verwiesen, dass Kinder in der Phase der formalen Operationen dazu in der Lage sind, systematische Methoden zur Durchführung von Bestandsaufnahmen aller möglichen Kombinationen, Permutationen und Anordnungen eines gegebenen Satzes an Elementen anzuwenden. Dies trifft jedoch laut Fischbein (1975) nur für den Großteil der Kinder zu, die sich in dieser Phase der Denkentwicklung befinden – eher zutreffend ist es, dass von Kindern, die sich in der Phase der formalen Operationen befinden, kombinatorische Verfahren mit Hilfe der Instruktion durchgeführt werden können, was, wie bereits erwähnt, auch für Kinder gilt, die kurz vor dem Eintritt in diese Phase stehen. Die Unterschiede in der Leistung zwischen diesen beiden Altersstufen sind dabei als gering einzustufen.

In Situationen, in denen sich die Anzahl der günstigen Ereignisse und die Anzahl der ungünstigen Ereignisse nicht mehr direkt aufzählen lässt, wurden von Fischbein (1975, S. 129) in Untersuchungen mit Kindern im Alter von 13 bis 17 Jahren entweder falsche Intuitionen festgestellt oder „fehlende intuitive Ressourcen“.

Beispielhaft lässt sich folgende Problemstellung anführen (vgl. Fischbein, 1975, S. 129): „In einem Lagerhaus befinden sich Äpfel. Davon sind 90% reif und 10% noch grün. Wenn drei Äpfel zufällig entnommen werden, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass zwei von ihnen reif sind?“ Die Antworten der Kinder im Alter von 13 bis 17 Jahren waren gemäß Fischbein im Allgemeinen von der Form $0{,}9^2 \cdot 0{,}1$ und damit im Widerspruch zur richtigen Lösung $0{,}9^2 \cdot 0{,}1 + 0{,}9 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 + 0{,}1 \cdot 0{,}9^2 = 3 \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1$.

> Dies kann darauf zurückgeführt werden, dass zur Lösung keine Primärintuition von Chancen benötigt wird, sondern eine elaborierte Intuition, die durch operationale Mittel umstrukturiert ist.

Fischbein (1975, S. 129) weist hierbei ausdrücklich darauf hin, dass den betreffenden Kindern nicht eine Methode zur Berechnung fehlte, sondern eine Intuition – und zwar die Intuition eines zusammengesetzten Ereignisses. Unter Verweis auf Weaver (1963) wird von Fischbein (1975, S. 129) ein weiteres Beispiel angeführt:

> „In einer Schachtel befinden sich zwei Spielmarken. Bei einer der beiden Spielmarken, Spielmarke *A*, sind beide Seiten rot. Bei der anderen Spielmarke, Spielmarke *B*, ist eine Seite rot, die andere blau. Eine Spielmarke wird zufällig aus der Schachtel gezogen und auf den Tisch gelegt. Die sichtbare Seite der Spielmarke ist rot. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die andere Seite der Spielmarke ebenfalls rot ist?“

Zur Lösung des Problems werden von den befragten Personen in der Regel logisch-mathematische Schemata und Verfahren angewendet, die entweder von Natur aus, im Zuge der Entwicklung während der Phase der formalen Operationen, oder durch Instruktion in der Schule, auf der Basis der Primärintuitionen auferlegt, erworben wurden (Fischbein, 1975, S. 130). Das Vorgehen lässt sich hierbei wie folgt beschreiben (vgl. Fischbein, 1975, S. 129):

> Da es zwei Spielmarken gibt, die mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gezogen werden können, beträgt die Wahrscheinlichkeit für jede der beiden Spielmarken 0,5. Falls Spielmarke *A* gezogen wurde, dann ist die andere Seite rot. Falls Spielmarke *B* gezogen wurde, dann ist die andere Seite blau. Daher lautet die Antwort auf die Fragestellung: „Die Wahrscheinlichkeit, dass die andere Seite der Spielmarke ebenfalls rot ist, beträgt 0,5.“

Aus dieser Überlegung ergibt sich also eine inkorrekte Lösung, die dem Anschein nach aber sowohl die Anforderungen des deduktiven Schließens als auch die Ausrichtung der Intuition zufriedenstellt – der entscheidende Punkt ist, dass sich in diesem Fall die Intuition nicht im Gleichschritt mit den operationalen Denkschemata entwickelt hat (Fischbein, 1975, S. 130). Eine Überlegung, die zur richtigen Lösung führt, lässt sich wie folgt formulieren (vgl. Fischbein, 1975, S. 130):

> Wenn *a* und *b* die beiden roten Seiten der Spielmarke *A* bezeichnen, *c* die rote Seite der Spielmarke *B* bezeichnet und *x* die blaue Seite der Spielmarke *B*, dann sind beim zufälligen Ziehen einer Spielmarke folgende Kombinationen der Seiten möglich: „*a* sichtbar und *b* verdeckt“ sowie „*b* sichtbar und *a* verdeckt“, wenn Spielmarke *A* gezogen wurde, und „*c* sichtbar und *x* verdeckt“ sowie „*x* sichtbar und *c* verdeckt“, wenn Spielmarke *B* gezogen wurde. Da bereits bekannt ist, dass bei der gezogenen Spielmarke die sichtbare Seite rot ist, kann die Kombination „*x* sichtbar und *c* verdeckt“ ausgeschlossen werden. Übrig bleiben also drei Kombinationen, „*a* sichtbar und *b* verdeckt“, „*b* sichtbar und *a* verdeckt“ sowie „*c* sichtbar und *x* verdeckt“, und daher drei Möglichkeiten für die verdeckte Seite, von denen zwei bedeuten, dass die verdeckte Seite rot ist. Somit beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit zwei Drittel.

Laut Fischbein (1975) wird das beschriebene logische Vorgehen als völlig klar angesehen, wenn es erklärt wird. Das Problem bei diesem Vorgehen ist jedoch, dass es von der Intuition nicht akzeptiert wird, da das Gefühl des Offensichtlichen fehlt (Fischbein, 1975, S. 130). Für Fischbein lassen sich die meisten der Paradoxa des probabilistischen Denkens damit erklären, dass operationale Schemata unangebracht angewendet wurden, weil die intuitive Basis nicht ausreichend elaboriert war. Beispielhaft werden von Fischbein die im Abschnitt 2.2.1 beschriebenen Würfelprobleme des Chevalier de Méré angeführt.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass sich die probabilistische Intuition nicht spontan entwickelt, außer in sehr engen Grenzen, und die unentwickelte probabilistische Intuition weder den Verfahren hoch entwickelten logischen Denkens folgen noch die Auswahl solcher Verfahren lenken oder die Plausibilität des erhaltenen Ergebnisses evaluieren kann (Fischbein, 1975, S. 131). Für Fischbein (1975, S. 131) können Verständnis, Interpretation, Evaluation und Vorhersage probabilistischer Phänomene nicht auf Primärintuitionen beruhen, die in einem rudimentären Zustand der Entwicklung vernachlässigt, vergessen und aufgegeben wurden – unter dem Druck operationaler Schemata, die nicht mit ihnen artikulieren können. Es

erscheint daher notwendig, von der frühen Kindheit an die komplexe intuitive Basis, welche für das probabilistische Denken relevant ist, zu trainieren – auf diese Weise kann ein echtes und konstruktives Gleichgewicht zwischen dem Möglichen und dem Determinierten in der Funktionsweise der Intelligenz erreicht werden (Fischbein, 1975, S. 131). Wie der Einfluss der intuitiven Basis auf das Verständnis von Wahrscheinlichkeit bei der Instruktion berücksichtigt werden kann, wird im Folgenden beschrieben.

3.3.8 Folgerungen für Instruktionen

Unter Verweis auf Myers (1982) werden von Hawkins und Kapadia (1984, S. 362) drei Dimensionen genannt, die für das Verständnis von Wahrscheinlichkeit von Bedeutung sind:

- erstens „externale Verbundenheit“,
- zweitens „internale Verbundenheit“ und
- drittens „Erklärung“.

Die „externale Verbundenheit“ bezieht sich hierbei auf die Beziehung zwischen dem Unterrichtsstoff und dem Alltagswissen, das die Schülerinnen und Schüler besitzen. Mit der „internalen Verbundenheit“ wird der Grad bezeichnet, zu dem Beziehungen zwischen Formeln und Vorstellungen explizit entwickelt sind. Die dritte Dimension, die „Erklärung“, entspricht der rationalen Begründung, die für eine bestimmte Formel vorliegt. In Bezug auf das im Abschnitt 2.2.1 beschriebene Würfelproblem des Chevalier de Méré ist anzumerken, dass beim Chevalier de Méré weder eine externale noch eine internale Verbundenheit vorlag, da das Resultat seiner mathematischen Überlegungen im Widerspruch zu seinen eigenen Erfahrungen stand (Hawkins & Kapadia, 1984, S. 362).

Die Einführung in die Theorie der Wahrscheinlichkeit kann gemäß Fischbein et al. (1971, S. 151 f.) bei der unterrichtlichen Instruktion auf kompatible intuitive Ausrichtungen, im Sinne von Primärintuitionen, gestützt werden, was folgende Konzepte und Verfahren betrifft: das Konzept des Zufalls und die Quantifizierung des Zufalls als das Verhältnis zwischen der Anzahl der günstigen und der Anzahl der möglichen Ergebnisse, mit 1 als der Repräsentation der Wahrscheinlichkeit eines sicheren Ereignisses und 0 als der Repräsentation der Wahrscheinlichkeit eines unmöglichen Ereignisses. Zudem wird intuitiv verstanden, dass sich die Wahrscheinlichkeit von zusammengesetzten Ereignissen, welche aus der Vereinigung von Elementarereignissen bestehen, durch die Addition der betreffenden Einzelwahrscheinlichkeiten bestimmen lässt.

Was die Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten betrifft, so ist zwischen der Primärintuition, dass sich die Chance durch die Multiplikation verringert, und der Intuition für die zutreffende Berechnung an sich zu unterscheiden – Erstere ist vorhanden, Letztere muss dagegen erst durch die Instruktion entwickelt werden, wobei der Transfer von einer Situation auf eine andere Situation nur schrittweise vollzogen werden kann, beispielsweise von zwei auf drei Murmeln, von Murmeln zu Würfeln (Fischbein et al., 1971, S. 152). Als Erklärung lässt sich anführen, dass die Artikulation zwischen der intuitiven Basis und der logischen Struktur der Operation noch schwach ist.

Bezüglich der Anwendung der Additionsregel für Wahrscheinlichkeiten wird von Fischbein et al. (1971, S. 152 f.) darauf hingewiesen, dass bei der Betrachtung bestimmter Ereignisse nicht einfach eine Intuition fehlt, sondern eine widersprüchliche Primärintuition vorhanden ist, die beispielsweise dazu führt, dass beim gleichzeitigen Würfeln mit zwei (optisch nicht unterscheidbaren) Spielwürfeln keinerlei Veranlassung gesehen wird, verschiedene Möglichkeiten, wie „5 und 6“ bzw. „6 und 5“, in Betracht zu ziehen. Diesbezüglich ist davon auszugehen, dass eine Sekundärintuition, die dazu bestimmt ist, eine inadäquate Primärintui-

tion zu ersetzen, nicht als Ergebnis einer punktuellen Erklärung konstruiert werden kann, unabhängig davon wie klar und überzeugend diese Erklärung ist – dies kann nur durch ausgedehnte Übung erreicht werden (Fischbein et al., 1971, S. 153). Dabei muss insbesondere gewährleistet werden, dass die betreffende Konstruktion in die sich in der Phase der konkreten Operationen und der Phase der formalen Operationen entwickelnde operationale Struktur integriert wird.

Zur angemessenen Berücksichtigung von Intuitionen erscheint es Greer (2001, S. 25) erstens als wichtig, den Schülerinnen und Schülern bei der Instruktion ihre vorhandenen Primärintuitionen bewusst zu machen. Eine Veränderung dieser Primärintuitionen wird dagegen als außerordentlich schwierig angesehen, da dies keine Frage der Korrektur einer isolierten Vorstellung ist, sondern eine tiefe Reorganisation von Clustern an kognitiven Vorstellungen impliziert (das heißt, bezogen auf die Theorie des Conceptual Change, die Veränderung von allgemeinen Rahmentheorien betrifft). Zweitens ist es notwendig, durch die Instruktion Sekundärintuitionen aufzubauen (Greer, 2001, S. 26). Zur Schaffung von Grundvoraussetzungen wird die aktive Auseinandersetzung mit probabilistischen Phänomenen als wichtig angesehen, darauf aufbauend der Einsatz von Repräsentationen, wie intuitiven Modellen (beispielsweise Baumdiagramme). Zu berücksichtigen ist, dass intuitive Modelle sowohl bewusst als auch unbewusst angewendet werden und durch die Instruktion oder unabhängig davon entstehen. Der Einsatz von intuitiven Modellen bei der Instruktion wird, im Sinne der Theorie des Conceptual Change, als fruchtbar betrachtet. Als dritte und letzte Komponente muss bei der Instruktion berücksichtigt werden, dass Primärintuitionen nicht verschwinden, sondern Ansichten weiterhin stillschweigend beeinflussen (Greer, 2001, S. 26).

Hierbei wird von Greer (2001, S. 27) auf ein pädagogisches Dilemma hingewiesen (welches für eine Vielzahl an mathematischen Modellbildungen, auch deterministischer Art, gilt): Zum einen ist der Einsatz von beschränkt gültigen intuitiven Modellen notwendig, um den Schülerinnen und Schülern mathematische Konzepte anfangs zugänglich zu machen, zum anderen werden diese beschränkt gültigen Modelle dann von den Schülerinnen und Schülern sehr stark verinnerlicht – dies führt zu dem potenziell demoralisierenden Effekt, dass das, was als selbstverständlich angesehen wurde, (aufgrund der beschränkten Gültigkeit) in Wirklichkeit gar nicht zutreffend ist.

Den Schülerinnen und Schülern sollte deswegen so früh wie möglich bewusst gemacht werden, dass dies ein natürliches Denkmuster ist, welches mit den größten Mathematikern geteilt wird (Fischbein, 1987, S. 39).

Greer (2001, S. 29) sieht es zudem als wichtig an, die Faktoren, die Intuitionen „einrahmen“, in Betracht zu ziehen. Hierzu gehören neben dem nicht-formalen Lernen in Alltagsaktivitäten auch Erfahrungen, die mit der geographischen und kulturellen Umgebung des Einzelnen zusammenhängen – in der Theorie des Conceptual Change wird dies in Form der externalen Variablen berücksichtigt.

Darüber hinaus sollte bei der Einführung des Konzepts der Wahrscheinlichkeit auch die Verbindung mit anderen Bereichen der Mathematik nicht außer Acht gelassen werden, da es mehrere Faktoren gibt, die gegen eine reibungslose Assimilation ohne eine geeignete Akkomodation sprechen. Ganz allgemein muss die kulturelle Ausrichtung hin zum deterministischen Denken und zu kausalen Erklärungen berücksichtigt werden – im Speziellen sollte die Aufmerksamkeit auf die Beziehung zwischen Wahrscheinlichkeit und Statistik gerichtet werden (Greer, 2001, S. 30). Als zentrale Konzepte im Sinne des Aufbaus von Sekundärintuitionen werden von Greer (2001) hierbei die Stichprobenvariation und die fundamentale Eigenschaft, dass sich Wahrscheinlichkeiten stabilisieren, wenn die Stichprobengröße zunimmt, angesehen. Um eine Verknüpfung zwischen Wahrscheinlichkeit und Statistik herzustellen, eignet sich die Aufzeichnung, grafische Repräsentation und Interpretation von Ergebnissen aus

Experimenten mit stochastischen Phänomenen. Auf der praktischen Ebene sind auch die vorhandenen arithmetischen Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler zu berücksichtigen. Für die Einschätzung von Wahrscheinlichkeiten sind insbesondere das Verständnis von Brüchen und das Verständnis des proportionalen Denkens von Bedeutung. Abschließend wird von Greer (2001, S. 31) auf die Möglichkeit des Einsatzes von Computersoftware hingewiesen, durch den sich fundamental neue Ressourcen der Repräsentation ergeben. Wie das Format der Repräsentation das probabilistische Denken beeinflussen kann, wird im Folgenden dargestellt.

3.4 Darstellung von Informationen

3.4.1 Einfluss des Formates der Darstellung

Im Abschnitt 2.1.2 wurden unterschiedliche Repräsentationsformate für die Darstellung von Wahrscheinlichkeiten beschrieben. An numerischen Repräsentationsformaten ist insbesondere die Darstellung in Form von Prozenten, Dezimalzahlen und Brüchen bzw. relativen Häufigkeiten gebräuchlich. Krauss (2003, S. 4) weist jedoch darauf hin, dass diese Arten der Darstellung nicht dem Format der Informationsdarbietung entsprechen, „auf das das menschliche Denken natürlicherweise eingestellt ist“.

Unter Verweis auf Gigerenzer und Hoffrage (1995) wird von Krauss (2003, S. 3 f.) hervorgehoben, „dass die Frage nach der Qualität eines mentalen Algorithmus nicht von der Art und Weise der Repräsentation der Informationen getrennt werden kann: Algorithmen verarbeiten Information, und Information braucht Repräsentation“. Bezogen auf die Frage, welche Art der Darstellung das am besten geeignete Repräsentationsformat für das menschliche Denken darstellt, wird von Krauss (2003, S. 4) unter Bezug auf Hasher und Zacks (1984) angeführt: „Nach psychologischen Theorien über Gedächtnis und Aufmerksamkeit gehören absolute Häufigkeiten zu den wenigen Informationen, die automatisch registriert werden, d. h. ohne bewusste Intention und ohne Interferenz mit anderen kognitiven Prozessen.“ Dazu passend, wenn auch nicht aus diesem Grund, werden absolute Häufigkeiten von Gigerenzer und Hoffrage (1995) als „natürliche Häufigkeiten“ bezeichnet.

3.4.2 Darstellung in Form von natürlichen Häufigkeiten

Gigerenzer und Hoffrage (1995) bezeichnen absolute Häufigkeiten laut Krauss (2003, S. 4) als „natürliche Häufigkeiten“, weil diese „in einer natürlichen Umgebung durch das Zählen von Fällen (‚natural sampling‘)“ gewonnen werden können. Krauss (2003, S. 6) weist darauf hin, dass das Verständnis von probabilistischen Situationen gefördert wird, wenn von der Gewinnung der dazugehörigen Informationen in Form von natürlichen Häufigkeiten ausgegangen wird – dies gilt insbesondere für „Bayesianische Situationen“, bei denen die Informationen typischerweise als bedingte Wahrscheinlichkeiten in Form von Dezimalbrüchen in Prozentschreibweise gegeben sind, wodurch die Größe der Grundgesamtheit „aufgrund der Normierung“ nicht mehr ersichtlich ist. Anhand der in Abbildung 3.8 auf der folgenden Seite dargestellten Aufgabe von Zhu und Gigerenzer (2006), der „Pingping-Aufgabe“, lässt sich dies veranschaulichen – Ausgangpunkt ist dabei eine in einer natürlichen Umgebung durch das Zählen von Fällen gewonnene Information: die betreffende Anzahl von Leuten.

Pingping geht in ein kleines Dorf um nach dem Weg zu fragen.
In diesem Dorf lügen jeweils 10 von 100 Leuten. Von den 10 Leuten, die lügen, haben 8 eine rote Nase. Von den restlichen 90 Leuten, die nicht lügen, haben 9 auch eine rote Nase.
Stellen Sie sich vor, dass Pingping eine Gruppe von Leuten im Dorf mit roten Nasen trifft. Wie viele dieser Leute lügen?

(Format der Informationsdarbietung: *natürliche Häufigkeiten*)

Pingping geht in ein kleines Dorf um nach dem Weg zu fragen.
In diesem Dorf ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person, die Pingping trifft, lügt, 10%. Wenn eine Person lügt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie eine rote Nase hat, 80%. Wenn eine Person nicht lügt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie auch eine rote Nase hat, 10%.
Stellen Sie sich vor, dass Pingping jemanden im Dorf mit einer roten Nase trifft. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person lügt?

(Format der Informationsdarbietung: *Wahrscheinlichkeiten – Prozente*)

Abb. 3.8. Formate der „Pingping-Aufgabe“ (vgl. Zhu & Gigerenzer, 2006, S. 289)

Liegen die Informationen in Form von natürlichen Häufigkeiten vor, so ergibt sich leicht nachvollziehbar aus dem Text und bildlich vorstellbar, dass jeweils 8 von 17 Leuten, die eine rote Nase haben, lügen. Dies entspricht einem Anteil von 47% und führt in Bezug auf die Fragestellung zur Antwort „47%“. Durch die „Normierung“ der durch das Zählen von Fällen gewonnenen Information ergibt sich aus der oberen Aufgabenformulierung die untere Aufgabenformulierung – die erwartete Antwort bleibt dabei gleich („47%“). Allerdings ist der Weg zur Antwort nicht mehr bildlich vorstellbar, da anstelle einer Gruppe von Leuten, die sich in bestimmte Untergruppen einteilen lässt, nur eine einzige Person betrachtet wird, die mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit ein bestimmtes Verhalten an den Tag legt, welches wiederum mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit zu einer bestimmten körperlichen Reaktion führt.

Anzumerken ist, dass der von Krauss (2003) als „Normierung“ bezeichnete Schritt streng genommen aus *zwei* Teilschritten besteht. Im ersten Teilschritt wird die durch das Zählen von Fällen gewonnene Information vom Darstellungsformat der natürlichen Häufigkeiten in das Darstellungsformat der Prozente übertragen – der Begriff der Wahrscheinlichkeit ist hierbei in der Aufgabenformulierung (weiterhin) nicht vorhanden. In Abbildung 3.9 auf der folgenden Seite ist dargestellt, wie die Formulierung der „Pingping-Aufgabe“ nach diesem ersten Teilschritt lauten könnte („Zwischen“-Format). Erst im zweiten Teilschritt wird der Begriff der Wahrscheinlichkeit in die Aufgabenstellung mit einbezogen, indem jeweils nicht mehr eine bestimmte Anzahl von Leuten (vgl. die obere der beiden in Abbildung 3.8 dargestellten Aufgabenformulierungen) beziehungsweise eine unbestimmte Anzahl von Leuten (vgl. die in Abbildung 3.9 dargestellte Aufgabenformulierung) Gegenstand der Betrachtung ist, sondern die Wahrscheinlichkeit für das Verhalten und die davon abhängige körperliche Reaktion einer einzigen Person. Somit bleibt kritisch festzuhalten, dass zum einen unklar ist, wie groß der Einfluss jedes einzelnen der beiden Teilschritte auf das Verständnis der beschriebenen Situation ist, und dass zum anderen diskutierbar ist, ob bei der oberen der beiden in Abbildung 3.8

dargestellten Aufgabenformulierungen sowie bei der in Abbildung 3.9 dargestellten Aufgabenformulierung (überhaupt) von einer „Bayesianischen Situation“ (im klassischen Sinne) gesprochen werden sollte.

Pingping geht in ein kleines Dorf um nach dem Weg zu fragen.
In diesem Dorf lügen 10% der Leute. Von den 10%, die lügen, haben 80% eine rote Nase. Von den restlichen 90%, die nicht lügen, haben 10% auch eine rote Nase.
Stellen Sie sich vor, dass Pingping eine Gruppe von Leuten im Dorf mit roten Nasen trifft. Wie viele dieser Leute lügen?

(Format der Informationsdarbietung: *Prozente*)

Abb. 3.9. „Zwischen“-Format der „Pingping-Aufgabe“

Liegt die Aufgabe (lediglich) in der unteren der beiden in Abbildung 3.8 dargestellten Aufgabenformulierungen vor, dann besteht die Gefahr, dass Lernende, die zum ersten Mal mit einer derartigen Denkweise konfrontiert werden, diese Abstraktionsleistung nicht bewältigen und es zu dem häufig auftretenden Fehler der Missachtung der Basisrate kommt (Krauss, 2003) – zudem ist zu beachten, dass sich rein formelmäßig (anhand der Regel von Bayes) korrekt bestimmte Lösungen für gewöhnlich „einer naiven Intuition entziehen und ‚überraschend‘ wirken“ (Krauss, 2003, S. 6). Durch die (zusätzliche) Darbietung der Informationen in Form von natürlichen Häufigkeiten lassen sich dagegen die „auftauchenden Widersprüche zwischen Intuition und richtiger Lösung ‚reparieren‘ [...] [, sodass es] zu einem echten Verständnis des Konzepts der bedingten Wahrscheinlichkeiten“ (Krauss, 2003, S. 2) kommen kann, ganz im Sinne der Theorie des Conceptual Change. Das Format der natürlichen Häufigkeiten trägt somit zum Verständnis der Logik des Bayesianischen Schließens bei.

Darüber hinaus bietet sich laut Krauss (2003, S. 6) insbesondere bei Aufgaben zum Satz von Bayes die Anwendung der Heuristik des Baumdiagramms zur Visualisierung des Vorgehens an – jedoch sollte berücksichtigt werden, dass „der Einsatz von Baumdiagrammen, *die mit Wahrscheinlichkeiten belegt sind* [...], keinen entscheidenden Fortschritt in Richtung Verständnis bedeutet“, da neben der „Repräsentation der algorithmisch-strukturellen Eigenschaften [...] auch die *Repräsentation der gegebenen Information* eine entscheidende Rolle bei der kognitiven Verarbeitung spielt“.

Krauss (2003) weist zudem darauf hin, dass das Konzept der Darstellung von Informationen in Form von natürlichen Häufigkeiten erfolgreich auf Bereiche der Wahrscheinlichkeitsrechnung übertragen werden kann, die nicht bayesianisch sind. Dies lässt sich an folgendem Beispiel veranschaulichen (vgl. Krauss, 2003, S. 7):

„Linda ist 31 Jahre alt, alleinstehend, sehr intelligent und sagt offen ihre Meinung. Sie hat Philosophie studiert. Während der Studienzeit beschäftigte sie sich ausführlich mit Fragen der Gleichberechtigung und der sozialen Gerechtigkeit und nahm auch an Anti-Atomkraft-Demonstrationen teil.“

Im klassischen Format soll eingeschätzt werden, welche der beiden Aussagen wahrscheinlicher ist: „Linda ist eine Bankangestellte“ oder „Linda ist eine Bankangestellte und in der feministischen Bewegung aktiv.“

Im Format der natürlichen Häufigkeiten lautet die Formulierung der Aufgabe dagegen wie folgt: „Stellen Sie sich 100 Personen vor, auf die Lindas Beschreibung passt. Wie viele dieser Personen sind Bankangestellte? Wie viele dieser Personen sind Bankangestellte und in der feministischen Bewegung aktiv?“

Gemäß Krauss (2003, S. 7) „verschwindet die ‚conjunction fallacy'" (welche als „typischer Fehlschluss" im Abschnitt 3.2.7 beschrieben wurde) bei der Mehrzahl der Personen, wenn die Aufgabe im Format der natürlichen Häufigkeiten („Stellen Sie sich 100 Personen vor ...") präsentiert wird.

Des Weiteren konnte nachgewiesen werden, dass Personen, die die Logik des Bayesianischen Schließens anhand des Formats der natürlichen Häufigkeiten verstanden haben, „auch nach längerer Zeit noch Aufgaben zum Satz von Bayes lösen, *selbst wenn diese Aufgaben dann im Wahrscheinlichkeitsformat präsentiert werden*" (Krauss, 2003, S. 7) – die Aufgaben werden von den betreffenden Personen einfach in das Format der natürlichen Häufigkeiten übertragen. Hierzu verweist Krauss (2003) auf Sedlmeier (1997). Der Ansatz, probabilistische Informationen in das Format der natürlichen Häufigkeiten zu übertragen, wird zum Beispiel bereits in der Rechtssprechung berücksichtigt, in der „oftmals unter Unsicherheit ‚Bayesianische' Entscheidungen getroffen werden müssen" (Krauss, 2003, S. 2) – so wie im Abschnitt 2.2.3 beschrieben. Krauss (2003, S. 5) verweist hierbei unter Bezug auf Redmayne (1998) auf eine offizielle Empfehlung des Berufungsgerichts („Court of Appeal") in England und Wales: „Kommunikation von DNA-Evidenz solle vor Gericht nur noch in ganzen Zahlen zugelassen werden, da die komplizierten Wahrscheinlichkeiten von niemandem verstanden würden."

Was das Verständnis von Wahrscheinlichkeit betrifft, so ist auch die im Folgenden beschriebene Erkenntnis von Bedeutung.

3.5 Modell „subjektiver Wahrscheinlichkeiten"

3.5.1 „Outcome Approach"

In Interviews mit Personen ohne probabilistische Vorkenntnisse wurde von Konold (1989) festgestellt, dass die Vorhersage „70% Regenwahrscheinlichkeit am heutigen Tag" von mehreren Personen als Vorhersage, *dass es* am heutigen Tag regnen wird, interpretiert wurde. Dieses „Vorhersageschema" wird als „Outcome Approach" bezeichnet (Konold, 1995). Die Anwendung des „Outcome Approach" ist dadurch gekennzeichnet, dass bei der Einschätzung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses das Ziel nicht darin gesehen wird, Wahrscheinlichkeiten anzugeben, die die Verteilung von Ereignissen in einer Stichprobe widerspiegeln, sondern darin, das Ergebnis eines einzigen Versuchs vorherzusagen – die Werte der Wahrscheinlichkeit werden dabei in „ja/nein"-Entscheidungen übersetzt, wobei Werte genügend weit ober- oder unterhalb von 50% als „ja"- oder „nein"-Vorhersagen kodiert und Werte um die 50% als völlige Unkenntnis über das Ergebnis interpretiert werden. Nothbaum und Scholz (1995, S. 98) fügen hinzu, dass bei der Anwendung des „Outcome Approach" versucht wird, eine Vorhersage bezüglich des nächsten Ereignisses zu treffen, wobei „die Wahrscheinlichkeitswerte [...] [als] Quantifizierungen der Stärke der wahrgenommenen kausalen Faktoren" aufgefasst und „ab einer gewissen Abweichung von der Mitte (p = 0,5) dem sicheren Wissen über Auftreten bzw. Ausbleiben des Ereignisses zugeordnet" werden. In Abbildung 3.10 auf der folgenden Seite ist dieses „Vorhersageschema" grafisch dargestellt, wobei die Werte der Wahrscheinlichkeit in Anlehnung an Konold (1995) in Prozent angegeben sind – der symbolisch eingezeichnete Zeiger markiert für das Eintreten eines bestimmten Ereignisses eine Wahrscheinlichkeit von ungefähr 70%, welche zur Vorhersage „Das Ereignis wird eintreten" führt.

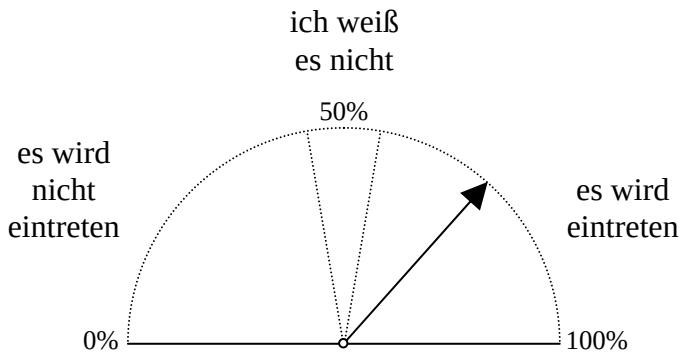


Abb. 3.10. „Outcome Approach“ (vgl. Konold, 1995)

Folgende Auszüge aus zwei Interviews bezüglich der Vorhersage „70% Regenwahrscheinlichkeit am heutigen Tag“ illustrieren die Anwendung des „Outcome Approach“:

- „Wenn der Wettervorhersager von einer 50/50-Chance sprechen würde, ich würde irgendwie denken, dass das merkwürdig wäre ... dass er nicht wirklich wüsste, wovon er spricht ...“ (Konold, 1989, S. 68);
- „Also, es sagt mir, dass es über 50% ist, und also, das ist das erste, an was ich denke. Und, also, ich denke, die Halbe-Weg-Marke zwischen 50% und sagen wir 100% wird so, na ja, 75% sein. Und es ist fast so, und ich denke, dass das eine ziemlich gute Chance ist, dass es Regen geben wird“ (Konold, 1989, S. 66).

Konold (1995) weist darauf hin, dass Personen bei ihren Schlussfolgerungen oftmals mehrere Perspektiven einnehmen, die sich unterscheiden und in Konflikt geraten können. Zudem kann es vorkommen, dass Personen bei ihren Schlussfolgerungen bezüglich ein und derselben Situation zwischen diesen Perspektiven wechseln. Beispielhaft wird von Konold (1995) folgende Problemstellung angeführt:

„Münzproblem, Teil 1: Welche der folgenden Sequenzen ergibt sich am wahrscheinlichsten beim fünffachen Wurf einer fairen Münze?

(a) K-K-K-Z-Z
(b) Z-K-K-Z-K
(c) Z-K-Z-Z-Z
(d) K-Z-K-Z-K
(e) Alle vier Sequenzen sind gleich wahrscheinlich.“

„Münzproblem, Teil 2: Aufgeführt sind die gleichen Sequenzen von K’s und Z’s wie zuvor. Welche der Sequenzen ergibt sich am unwahrscheinlichsten beim fünffachen Wurf einer fairen Münze?

(a) K-K-K-Z-Z
(b) Z-K-K-Z-K
(c) Z-K-Z-Z-Z
(d) K-Z-K-Z-K
(e) Alle vier Sequenzen sind gleich unwahrscheinlich.“

Bei verschiedenen schriftlichen Tests mit dieser zweiteiligen Problemstellung (wobei die beiden Teile des „Münzproblems“ jeweils auf derselben Seite des betreffenden Tests abgedruckt waren) wurde von Konold (1995) festgestellt, dass in der Regel von etwas mehr als der Hälfte der getesteten Personen, die beim ersten Teil des „Münzproblems“ die richtige Antwort (dass alle vier Sequenzen gleich wahrscheinlich sind) gegeben hatten, beim zweiten Teil nicht die richtige Antwort (dass alle vier Sequenzen gleich unwahrscheinlich sind), sondern eine andere Antwort gewählt wurde – erklären lässt sich diese „Inkonsistenz“ laut Konold, der auf Interviews mit zwanzig Personen (N = 20) verweist, wie folgt: Beim ersten Teil des „Münzprob-

lems“ wird in Übereinstimmung mit dem „Outcome Approach“ angenommen, dass eine Vorhersage getroffen werden soll, welche Sequenz auftreten wird. Die Antwort, dass alle vier Sequenzen gleich wahrscheinlich sind, wird gewählt, weil jeder der vorgegebenen Sequenzen nur eine sehr kleine Wahrscheinlichkeit für das Auftreten zugeschrieben wird und damit schwer vorherzusagen ist, welche der Sequenzen auftreten wird – die Antwort wird nicht gegeben, weil die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten (tatsächlich) als gleich groß angesehen werden. Beim zweiten Teil der Problemstellung wird dann von vielen Personen die Heuristik der *Repräsentativität* angewendet, da die geforderte Betrachtungsweise als ungewohnt erscheint und sich dem „Vorhersageschema“ des „Outcome Approach“ entzieht, sodass insgesamt gesehen bei ein und derselben Situation zwei unterschiedliche Perspektiven eingenommen werden. Dies illustriert, wie schwierig es ist, anhand der Leistung bei einer einzigen Problemstellung zutreffende Rückschlüsse auf das Wissen und die Denkweise einer getesteten Person zu ziehen. Im Abschnitt 4.1.1 wird auf diese Problematik, welche bezüglich der Theorie des Conceptual Change für die Einschätzung von Bedeutung ist, ob ein Conceptual Change tatsächlich stattgefunden hat, weiter eingegangen.

3.5.2 Hinweis

Von Nothbaum und Scholz (1995, S. 98) wird darauf hingewiesen, dass der „Outcome Approach“ „nicht mit dem Konzept subjektiver Wahrscheinlichkeiten“, also der im Abschnitt 2.2.3 beschriebenen Interpretation von Wahrscheinlichkeit als subjektive Wahrscheinlichkeit, zu verwechseln ist. Der „Outcome Approach“ ist für Nothbaum und Scholz (1995, S. 98) „ein interessantes, sehr einfaches und reduziertes Modell ‚subjektiver Wahrscheinlichkeiten‘“, in dem „bezüglich des nächsten Ereignisses prinzipiell drei Vorhersagen gemacht werden: ‚Es wird auftreten‘ (p = 1,0); ‚Es wird nicht auftreten‘ (p = 0,0); ‚Ich weiß es nicht‘ (p = 0,5)“. Im Gegensatz dazu stellt die Interpretation von Wahrscheinlichkeit als subjektive Wahrscheinlichkeit eine Quantifizierung der individuellen Unsicherheit dar, bei der „alle Werte zwischen Null und Eins ein sinnvolles Maß der Unsicherheit [...] darstellen“ (Nothbaum & Scholz, 1995, S. 98).

Kapitel 4

Synopse ausgewählter Studien zur Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens

Nach einer kurzen Vorbemerkung werden die Befunde von fünf ausgewählten Studien zur Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens bei Schülerinnen und Schülern im Bereich der Sekundarstufe I präsentiert und unter dem Aspekt des Conceptual Change neu analysiert.

4.1 Vorbemerkung

4.1.1 Allgemeines zur Konzeption von Studien

Nach Hawkins und Kapadia (1984, S. 365) bezieht sich ein großer Teil der Studien über die Vorstellungen von Wahrscheinlichkeit bei Kindern auf Vorhersagen bei Stichproben vom Typ „Perlen in Urnen“ und „Kugeln in Beuteln“ – dies geht auf Jean Piaget zurück. Als problematisch werden dabei zum einen die Komplexität der Schlussfolgerungen angesehen und zum anderen die großen Verwirrungen über das, was nun genau beurteilt wird – relative Häufigkeiten, Brüche, Zahlen, Volumina, Farbbewusstsein oder -vorlieben, etc. (Hawkins & Kapadia, 1984, S. 365).

Darüber hinaus leiden viele Studien unter dem Problem einer angemessenen Wahl und Verwendung der Sprache. Für Studien im englischsprachigen Raum wird von Hawkins und Kapadia (1984, S. 365) die Konfusion zwischen Wörtern wie „possible“, „probable“, „likely“ etc. angeführt. Greer (2001, S. 27) merkt unter Bezug auf Fischbein, Nello und Marino (1991) an, dass nicht einmal das Verständnis von Begriffen wie „sicher“, „möglich“ und „unmöglich“ vorausgesetzt werden kann. Hawkins und Kapadia (1984, S. 366) weisen zudem darauf hin, dass bei nicht-behavioristischen Ansätzen die Problematik besteht, dass dabei evaluiert wird, ob die an der Studie teilnehmenden Schülerinnen und Schüler über geeignete verbale „Beschriftungssysteme“ für Wahrscheinlichkeiten verfügen. So muss die Tatsache, dass nicht die passende Sprache zur Beantwortung vorliegt, nicht zwangsläufig das Fehlen geeigneter zugrunde liegender Konzepte bedeuten. Ein weiteres Problem ergibt sich aus der „linguistischen Interpretation“ von Aufgaben durch die Probanden (Hawkins & Kapadia, 1984, S. 372). Folgendes Beispiel, welches von Scholz (1991, S. 223) als „Taxi-Problem“ bezeichnet wird, lässt sich zur Veranschaulichung anführen (vgl. Hawkins & Kapadia, 1984, S. 372):

> Taxi-Problem: „In einer Stadt ist bekannt, dass 85% der Taxis grün und 15% blau sind. Ein Unfall passiert mit einem Taxi, welches vom einzigen Zeugen als blau identifiziert wird. *Der Zeuge liegt in 80% der Fälle richtig*. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Taxi wirklich blau war?“
>
> Erwartet wird hierbei in der Regel unter der Annahme der stochastischen Unabhängigkeit die statistisch korrekte Antwort „41%“. Diese ergibt sich etwa anhand der Regel von Bayes oder indem die in der Problemstellung gegebenen Informationen in Form von natürlichen Häufigkeiten betrachtet werden: In der betreffenden Stadt sind 85 von 100 Taxis grün, die restlichen 15 Taxis sind blau. Von den 85 grünen Taxis werden vom Zeugen 68 richtig identifiziert als grün, die anderen 17 werden fälschlicherweise als blau identifiziert. Von den 15 blauen Taxis werden vom Zeugen 12 richtig identifiziert als blau, die verbleibenden 3 werden fälschlicherweise als grün identifiziert. Folglich sind 12 von den 29 Taxis, die vom Zeugen als blau identifiziert werden, wirklich blau, was einem Anteil von 41% entspricht (und übertragen der gesuchten Wahrscheinlichkeit).

Für Hawkins und Kapadia (1981, S. 372) könnte die kursiv gedruckte Aussage im Aufgabentext auch dahingehend interpretiert werden, dass der Zeuge in tatsächlich 80% der Fälle richtig liegt, *unabhängig von der Farbe des Taxis*, sodass sich die Antwort „80%“ ergibt. Diesbezüglich ist hervorzuheben, dass das Problem des Nichtzusammenpassens zwischen linguistischen und technischen Interpretationen zwar auch in anderen Bereichen der Mathematik auftritt, jedoch nicht so akut wie im Bereich der Wahrscheinlichkeit. Die beim „Taxi-Problem“ vorliegende Art der Aufgabenstellung wird von Scholz (1991, S. 223) ebenfalls als kritisch angesehen – unter anderem aufgrund der Unvollständigkeit beziehungsweise Unbestimmbarkeit der Beschreibung eines realen Schauplatzes. Da die Stichworte und Parameter von Alltagsproblemen nicht begrenzt sind (wie im Abschnitt 3.2.3 im Zusammenhang mit dem Einfluss der Problemrahmung beschrieben), ist es selten, dass eine eindeutige Lösung vorliegt. Beim „Taxi-Problem“ ist es deshalb durchaus möglich, mehr oder weniger gut durchdachte Annahmen über die Aktivitätsraten der blauen und der grünen Taxis einzuführen,

welche zu veränderten Basisraten und somit zu einer von der erwarteten Antwort abweichenden, aber in Bezug auf die Annahmen angemessenen Antwort führen können, auch unter Verwendung der Regel von Bayes (Scholz, 1991). Das Hinzunehmen von kompatiblen neuen Informationen wird von Scholz (1987, 1991) als Sonderfall eines Phänomens angesehen, welches „Einführung einer Theorie über die Information“ genannt wird.

Laut Amir, Linchevski und Shefet (1999, S. 28) lässt sich auch folgender Fehlschluss, welcher im Allgemeinen auf die Anwendung der Heuristik der *Repräsentativität* zurückgeführt wird, mit Problemen bezüglich der „Kommunikation“ erklären:

> Beim Einschätzen der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten vorgegebener Sequenzen wird beim sechsmaligen Würfeln mit einem fairen Spielwürfel die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis 6,5,3,6,2,4 als größer eingeschätzt als die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis 2,2,2,2,2,2 oder 6,6,6,6,6,6 und beim sechsmaligen Werfen einer fairen Münze wird die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis A-Z-A-Z-A-Z als größer eingeschätzt als die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis A-A-A-A-A-A oder Z-Z-Z-Z-Z-Z.

Es besteht hier die Möglichkeit, dass jede der aufgeführten Sequenzen als ein Repräsentant einer Klasse von Sequenzen angesehen wird und nicht als spezifische Sequenz – womit die betreffende Antwort zwar formal falsch ist, jedoch auf einem richtigen Gedankengang basiert (Amir et al., 1999, S. 28).

Bezüglich der Konzeption von Aufgaben werden von Scholz (1991, S. 238) vier Typen unterschieden:

- physikalische Stimuli,
- Zufallsgeräte,
- wort- oder buchstabenkodifizierte Probleme sowie
- Alltagsprobleme.

Beispielhaft für physikalische Stimuli lassen sich Glühlampen, akustische Signale oder grafisch zur Schau gestellte Daten ohne ein zufälliges Element, welches offensichtlich ist, anführen. Da die Probanden für gewöhnlich weder über die Funktionsweise der Apparatur noch den Grund oder den Anlass der Untersuchung in Kenntnis gesetzt werden, ist es als zweifelhaft anzusehen, ob solch eine Aufgabe von den Probanden als probabilistisch erachtet wird.

Als typische Beispiele für experimentelle Aufgaben mit zufälligen Elementen, welche auch im Unterricht zum Einsatz kommen, lassen sich Münzen, Spielwürfel, Rouletteräder, Glücksräder und Urnen nennen. Allerdings kommt diesen Elementen nur eine unwesentliche Rolle in der Historie der psychologischen Forschung zu – beispielsweise aufgrund von Problemen der Vergleichbarkeit (unter anderem wegen der Spezifität betreffender Aufgaben).

In den meisten psychologischen Studien zum Verständnis von Wahrscheinlichkeit werden Wortprobleme eingesetzt – entweder buchstabenkodifizierte Versionen von Ergebnissen von Zufallsexperimenten oder Problemgeschichten, die dem Anschein nach aus dem täglichen Leben sind (Scholz, 1991, S. 239). Letztere können oftmals nur unter der Vorstellung einer subjektiven Wahrscheinlichkeit interpretiert werden, da nicht auf eine Stichprobe (und damit eine objektive Vorstellung) zurückgegriffen werden kann. Beispielhaft hierfür lässt sich das zuvor beschriebene „Taxi-Problem“ anführen.

Die Untersuchung des Verhaltens in alltäglichen Situationen gestaltet sich als außerordentlich schwierig – nicht nur aufgrund der Offenheit der Situation, sondern auch wegen der „sozialen Dynamik“, welche schwer zu kontrollieren ist, sodass diesbezüglich für gewöhnlich keine Untersuchungen durchgeführt werden.

Was die Konzeption der Beziehung zwischen Proband und Aufgabe anbelangt, so liegt für Scholz (1991, S. 241) über alle Arten von Aufgaben und Paradigmen hinweg eine erstaunlich einheitliche Konzeption vor – es wird „das Verhalten des Durchschnittsprobanden analysiert gemäß der Standardinterpretation der Situation oder des Problems“. Scholz (1991) merkt hier-

zu unter Bezug auf Gigerenzer (1987) an, dass dies eine Strategie ist, um zwei Sorten des Subjektivismus zu überwinden – den des Experimentators sowie den des Probanden. Von Hawkins und Kapadia (1984, S. 368) wird darauf hingewiesen, dass die Wahl einer bestimmten Forschungsmethode die Art der Phänomene bestimmt, die man zu beobachten und untersuchen erwarten kann.

4.1.2 Ausblick auf die Analyse der Studien

In den folgenden Abschnitten werden die Befunde von fünf ausgewählten Studien zur Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens – insbesondere des intuitiven Verständnisses von Zufall und Wahrscheinlichkeit vorgestellt, betreffend Schülerinnen und Schüler, die der Sekundarstufe I zuzuordnen sind (Alter von 10 bis 16 Jahren). Nach einer jeweils kurzen Beschreibung der Konzeption der Studie werden verschiedene Aufgaben beschrieben und analysiert, die im Rahmen der Studie an die Probanden gestellt wurden. Damit einhergehend werden die Auswertungergebnisse zu den Antworten der Schülerinnen und Schüler vorgestellt und analysiert. Abschließend erfolgt eine Zusammenfassung der zentralen Ergebnisse der jeweiligen Studie einschließlich der Forderungen an den Unterricht, die aus den Ergebnissen zu folgern sind.

4.1.3 Auswahl der Studien

Folgende fünf Studien werden betrachtet:

- Green (1982),
- Fischbein und Schnarch (1997),
- Rasfeld (2004),
- Engel und Sedlmeier (2005) sowie
- Amir und Williams (1999).

Einleitend wird die Studie von Green (1982) beschrieben, die hier als eine Referenz für die anschließend vorgestellten Studien dient, sowohl hinsichtlich der Konzeption der Aufgaben als auch in Bezug auf die Interpretation der Ergebnisse. Dies ist der Fall, „weil *Green* seine Ergebnisse durch eine breit angelegte cross-sektionale Untersuchung an über 3 000 [Schülerinnen und] Schülern im Alter von 11 bis 16 Jahren belegt hat“ (Bentz & Borovcnik, 1991, S. 2).

Daran anschließend wird die Studie von Fischbein und Schnarch (1997) beschrieben, in welcher explizit die Entwicklung von probabilistischen, auf Intuitionen basierenden Fehlvorstellungen mit zunehmendem Alter untersucht wurde.

Da bei der Studie von Green (1982) Schülerinnen und Schüler in England getestet wurden und bei der Studie von Fischbein und Schnarch (1997) Schülerinnen und Schüler in Israel, werden im Anschluss zwei Studien mit deutschen Schülerinnen und Schülern vorgestellt – die Studie von Rasfeld (2004) und die Studie von Engel und Sedlmeier (2005).

Engel und Sedlmeier (2005, S. 175) gehen davon aus, dass es sich bei ihrer Studie um die erste derartige Studie mit deutschen Schülerinnen und Schülern handelt. Somit dürften die Studie von Engel und Sedlmeier (2005) und die Studie von Rasfeld (2004), die einen anderen Schwerpunkt hat, zum gegenwärtigen Zeitpunkt die beiden einzigen Studien mit deutschen Schülerinnen und Schülern im Bereich der Sekundarstufe I bezüglich der Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens darstellen.

Zum Einfluss der in der Theorie des Conceptual Change beschriebenen externalen Variablen wird abschließend die Studie von Amir und Williams (1999) vorgestellt, in welcher kulturelle Einflüsse auf das probabilistische Denken von Kindern im Alter von 11 bis 12 Jahren in England untersucht wurden.

Die genannten Studien werden hierbei, mit Ausnahme der Studie von Amir und Williams (1999), in welcher nicht die Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens, sondern die Auswirkung von kulturellen Einflüssen auf die intuitiven Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler im Zentrum der Untersuchung steht, in chronologischer Reihenfolge aufgeführt, da in den jeweiligen Studien oftmals Querverweise auf die Ergebnisse vorangegangener Studien enthalten sind.

Dem jeweiligen Forschungsgegenstand entsprechend sind die einzelnen Studien wie folgt betitelt: Green (1982): “A survey of probability concepts in 3 000 pupils aged 11-16 years”, übersetzt: „Eine Untersuchung zu Wahrscheinlichkeitsvorstellungen bei 3 000 Schülerinnen und Schülern im Alter von 11 bis 16 Jahren“, Fischbein und Schnarch (1997): “The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions”, übersetzt: „Die Entwicklung von probabilistischen, auf Intuitionen basierenden Fehlvorstellungen mit zunehmendem Alter“, Rasfeld (2004): „Verbessert der Stochastikunterricht intuitives stochastisches Denken? Ergebnisse aus einer empirischen Studie“, Engel und Sedlmeier (2005): “On middle-school students’ comprehension of randomness and chance variability in data”, übersetzt: „Zum Verständnis von Zufall und zufallsbedingter Variabilität in Daten bei Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I“, sowie Amir und Williams (1999): “Cultural influences on children’s probabilistic thinking”, übersetzt: „Kulturelle Einflüsse auf das probabilistische Denken von Kindern“.

4.1.4 Analysekriterien

Die in den einzelnen Studien beschriebenen Aufgaben werden vom Autor, ausgehend von den in den vorangegangenen Abschnitten und Kapiteln dargestellten Erkenntnissen, nach folgenden Kriterien untersucht: Konzeption der Aufgabe, Problemrahmung und (sofern zutreffend) Repräsentationsformat der Wahrscheinlichkeit.

In der folgenden Tabelle sind diese Kriterien differenziert entfaltet dargestellt:

AUFGABENCHARAKTERISTIK	
Konzeption:	· physikalische Stimuli · Zufallsgeräte · wort- oder buchstabenkodifiziertes Problem · Alltagsproblem
Problemrahmung:	· „Problem Solving Framing“ · „Social Judgement Framing“
Repräsentationsformat der Wahrscheinlichkeit:	· Prozente · Dezimalzahlen · Brüche bzw. relative Häufigkeiten · absolute bzw. natürliche Häufigkeiten · Chancenverhältnisse · nicht-numerisch bzw. graphisch

Die Kriterien gewährleisten, dass alle Aufgaben nach einem einheitlichen Raster untersucht werden. Zudem wird bewusst unterschieden zwischen Kriterien, die die Aufgabenstellung an sich betreffen, dies sind die dargestellten Kriterien der Konzeption, Problemrahmung und des Repräsentationsformates der Wahrscheinlichkeit, und Kriterien, die sich auf die erwartete Lösung der Aufgabe beziehen. In welchem Format eine Aufgabe vorliegt, beispielsweise als Multiple-Choice-Aufgabe in einem Fragebogen oder als verbale Frage in einem Interview, wird hierbei nicht extra aufgeführt, dies geht jedoch aus der Beschreibung der jeweiligen Aufgabe hervor.

Zur Analyse der Ergebnisse der Auswertung der Antworten der Schülerinnen und Schüler werden bei den einzelnen Aufgaben die erwarteten Lösungen analysiert. Bei der Analyse der erwarteten Lösungen wird, analog zur Analyse der Aufgaben, nach einem einheitlichen Raster vorgegangen. Die Charakteristik der erwarteten Lösung wird dabei nach folgenden Kriterien untersucht: Interpretation der Wahrscheinlichkeit (sofern zutreffend), Wissensbasis, heuristische Struktur, Intuition und Stufe des probabilistischen Denkens, wobei diesbezüglich von der im Abschnitt 3.3.4 und den darauffolgenden Abschnitten im Zusammenhang mit den verschiedenen Entwicklungsphasen des probabilistischen Denkens beschriebenen Charakterisierung der einzelnen Stufen ausgegangen wird.

Die aufgeführten Kriterien bei der Analyse der erwarteten Lösungen sind in der folgenden Tabelle im Überblick dargestellt:

LÖSUNGSCHARAKTERISTIK	
Interpretation der Wahrscheinlichkeit:	· frequentistische Wahrscheinlichkeit · Wahrscheinlichkeit als Propensität · Laplace-Wahrscheinlichkeit · subjektive Wahrscheinlichkeit · (formale) mathematische Definition
Wissensbasis:	· „direct accessible knowledge“ · „higher order knowledge“
heuristische Struktur:	· „simple everyday heuristic“ · „higher order heuristic“
Intuition:	· Primärintuition · Sekundärintuition
Stufe des probabilistischen Denkens:	· Stufe IA · Stufe IB · Stufe IIA · Stufe IIB · Stufe III

Da laut Scholz (1991) bei nahezu allen Studien einheitlich das Verhalten des Durchschnittsprobanden gemäß der Standardinterpretation, das heißt der erwarteten Lösung der Aufgabe, analysiert wird, werden die daraus erhaltenen Ergebnisse insbesondere im Hinblick auf die intuitive Anwendung von Heuristiken und damit einhergehende kognitive Verzerrungen evaluiert. Zur Evaluation werden folgende Kriterien herangezogen: Vorhersageschema

sowie (sofern zutreffend) angewendete „simple everyday heuristic“, einhergehende kognitive Verzerrung und „typischer Fehlschluss“.

In der folgenden Tabelle sind diese Kriterien wieder im Überblick dargestellt:

EVALUATIONSKRITERIEN	
Vorhersageschema:	· Angabe der Wahrscheinlichkeit · „Outcome Approach“
angewendete „simple everyday heuristic“:	· „Repräsentativität“ · „Verfügbarkeit“ · „Adjustierung von einem Anker aus“ · „kausale Schemata“ · „Gleichwahrscheinlichkeit“ · „Take The Best“
einhergehende kognitive Verzerrung:	· Insensibilität gegenüber der a-priori-Wahrscheinlichkeit der Ergebnisse · Insensibilität gegenüber der Stichprobengröße · Fehlvorstellungen von Zufall · Insensibilität gegenüber der Vorhersagbarkeit · Illusion der Validität · Fehlvorstellungen von Regression · Illusionen aufgrund der Abrufbarkeit von Beispielen · Illusionen aufgrund der Effektivität der Suchstrategie · Illusion der Vorstellbarkeit · illusorische Korrelation · ungenügende Adjustierung · Fehlvorstellungen bei der Bewertung konjunktiver und disjunktiver Ereignisse · Verankerung bei der Einschätzung von subjektiven Wahrscheinlichkeitsverteilungen
„typischer Fehlschluss“:	· „negative recency effect“ bzw. „gambler’s fallacy“ · „positive recency effect“ · „conjunction fallacy“ · „time-axis fallacy“ bzw. „the Falk phenomenon“

In den folgenden Abschnitten werden die im Abschnitt 4.1.3 aufgeführten Studien in der angegebenen Reihenfolge vorgestellt und analysiert. Bei der Analyse der Studie von Amir und Williams (1999) wird, da nur Auszüge aus Interviews und einzelne Elemente des eingesetzten Fragebogens veröffentlicht sind, von dem vorgestellten Schema der Analyse abgewichen.

4.2 Die Studie von Green (1982)

4.2.1 Allgemeines

In der Studie von Green (1982) wurden die Intuitionen von Zufall und die Vorstellungen von Wahrscheinlichkeit bei Schülerinnen und Schülern im Alter von 11 bis 16 Jahren untersucht.

Die getesteten Schülerinnen und Schüler besuchten staatliche koedukative Gesamtschulen in England und waren den Klassenstufen 1 bis 5 der dortigen „normal secondary school“ zuzuordnen (Green, 1982, S. 766). Aus der Veröffentlichung von Green geht hervor (vgl. die Ausführungen zu der als „Question 22“ bezeichneten Aufgabe), dass zumindest bei den Schülerinnen und Schülern der höchsten Klassenstufe, der Klassenstufe 5, das Vorhandensein von Sekundärintuitionen von Zufall und Wahrscheinlichkeit vorausgesetzt werden kann. Der zu bearbeitende Test bestand aus einem „Probability Concepts Test“, also einem Test bezüglich der Vorstellung von Wahrscheinlichkeit, und einem „Test of General Reasoning Ability“, also einem Test bezüglich der allgemeinen Fähigkeit zum logischen Denken. Der Test bezüglich der Vorstellung von Wahrscheinlichkeit umfasste 26 Aufgaben, im Original als „Questions“ („Fragen“) bezeichnet, die sich aus insgesamt 58 Teilaufgaben zusammensetzten. Im Allgemeinen wurde von den Schülerinnen und Schülern zuerst der „Probability Concepts Test“ bearbeitet und dann, im Abstand von ein bis zwei Wochen, der „Test of General Reasoning Ability“.

Beim Test bezüglich der Vorstellung von Wahrscheinlichkeit bekamen die Schülerinnen und Schüler eine vorbereitende Einführung, die von Mitgliedern der Projektgruppe gegeben wurde und in welcher Art und Zweck des Tests erklärt wurden. In den Klassen der Klassenstufen 1, 2 und 3 wurden die Testaufgaben vorgelesen, in den Klassen der Klassenstufen 4 und 5 nur dann, wenn die Lehrkraft der Klasse dies für angebracht hielt. Die genannten Maßnahmen wurden durchgeführt, um mögliche Schwierigkeiten beim Lesen zu minimieren und um sicherzustellen, dass die Schülerinnen und Schüler auf jede der 26 Fragen des Tests bezüglich der Vorstellung von Wahrscheinlichkeit genau achten, und um in allen getesteten Klassen vergleichbare Bedingungen zu gewährleisten (Green, 1982, S. 767). Für den Fall, dass die Aufgaben vorgelesen wurden, betrug die für die Bearbeitung zur Verfügung stehende Zeit 48 Minuten, ansonsten 55 Minuten.

Die Ergebnisse der Studie bezüglich der Vorstellung von Wahrscheinlichkeit beziehen sich nicht auf die Leistungen aller ursprünglich getesteten Schülerinnen und Schüler, sondern auf eine anhand des Tests bezüglich der allgemeinen Fähigkeit zum logischen Denken ermittelte repräsentative Auswahl (N = 2 930), welche die Anteile der verschiedenen intellektuellen Niveaus in der Gesamtheit der Schülerinnen und Schüler widerspiegeln sollte (Green, 1982).

So sind in jeder der fünf Klassenstufen

- 10% der Schülerinnen und Schüler dem höchsten Niveau
  (Note „A“ im „Test of General Reasoning Ability“) zuzuordnen,
- 20% dem darunterliegenden Niveau
  (Note „B“ im „Test of General Reasoning Ability“),
- 40% dem sich daran anschließenden sogenannten mittleren Niveau
  (Note „C“ im „Test of General Reasoning Ability“),
- 20% dem zweituntersten Niveau
  (Note „D“ im „Test of General Reasoning Ability“) und schließlich die restlichen
- 10% dem untersten Niveau
  (Note „E“ im „Test of General Reasoning Ability“).

4.2.2 Aufgaben und Ergebnisse der Auswertung

Von den insgesamt 26 Aufgaben des Tests bezüglich der Vorstellung von Wahrscheinlichkeit werden fünf Aufgaben einschließlich der zugehörigen Untersuchungsergebnisse in der Veröffentlichung von Green (1982) näher erläutert.

„Green: Question 1“. Die Aufgabe lautete übersetzt: „Eine kleine runde Spielmarke ist auf einer Seite rot und auf der anderen Seite grün. Sie wird mit der roten Seite nach oben gehalten und hoch in die Luft geworfen. Sie wirbelt herum und landet dann. Welche der beiden Seiten zeigt mit größerer Wahrscheinlichkeit nach oben, oder gibt es keinen Unterschied? Hake die richtige Antwort ab.“ Die zur Auswahl stehenden Antworten waren: „(A) Die rote Seite ist wahrscheinlicher“, „(B) Die grüne Seite ist wahrscheinlicher“, „(C) Es gibt keinen Unterschied“ und „(D) Weiß nicht“.

Im Original:

> A small round counter is red on one side and green on the other side. It is held with the red face up and tossed high in the air. It spins and then lands. Which side is more likely to be face up, or is there no difference?
> Tick the correct answer:
> (A) The red side is more likely
> (B) The green side is more likely
> (C) There is no difference
> (D) Don’t know

Erwartete Antwort: (C) There is no difference

Es handelt sich also um ein wort- bzw. buchstabenkodifiziertes Problem, auch wenn der Einsatz eines Zufallsgerätes in einer Alltagssituation beschrieben wird. Die Problemrahmung entspricht dem „Problem Solving Framing“, weist aber aufgrund der Formulierung des Aufgabentextes durchaus Züge des „Social Judgement Framing“ auf. Die Wahrscheinlichkeit ist in den vorgegebenen Antwortmöglichkeiten in nicht-numerischer Form repräsentiert.

Die Auswertung der Antworten der Schülerinnen und Schüler – insgesamt hatten nur 61% die erwartete Antwort „(C) Es gibt keinen Unterschied“ abgehakt – führte zu dem Schluss, dass viele Kinder im Alter von 11 bis 16 Jahren eine nicht zutreffende Intuition von Wahrscheinlichkeit haben (Green, 1982, S. 768). Zudem wurde untersucht, ob durch die Betonung, dass vor dem Werfen die rote Seite nach oben zeigt, von den Schülerinnen und Schülern die Antwort „(B) Die grüne Seite ist wahrscheinlicher“ im Vergleich zur Antwort „(A) Die rote Seite ist wahrscheinlicher“ öfter abgehakt werden würde. Dies konnte klar gezeigt werden für die Klassenstufen 1, 2 und 3, jedoch nicht mehr für die Klassenstufen 4 und 5, was von Green (1982) als überraschendes Ergebnis bezeichnet wird. Aus den veröffentlichten Ergebnissen für die einzelnen Klassenstufen ist darüber hinaus ersichtlich (vgl. Green, 1982, S. 768), dass die relative Lösungshäufigkeit mit zunehmender Klassenstufe zunimmt.

Bei der erwarteten Lösung wird die Wahrscheinlichkeit als Laplace-Wahrscheinlichkeit interpretiert. Im Vordergrund steht die Anwendung des Wissens zu Grundraum (es gibt zwei mögliche Ergebnisse) und Symmetrie (die beiden möglichen Ergebnisse sind als gleich wahrscheinlich einzustufen), dem Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit. Dieses Wissen ist dem „higher order knowledge“ zuzuordnen. Die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Gleichwahrscheinlichkeit* führt bei dieser Aufgabe zur richtigen Lösung. Aufgrund des Erwerbs durch Instruktion stellt die zur Lösung erforderliche Intuition eine Sekundärintuition

dar. Das zur Lösung erforderliche Vorgehen kann der Phase der konkreten Operationen, der Stufe IIA des probabilistischen Denkens, zugeordnet werden.

Die Zunahme der relativen Lösungshäufigkeit mit zunehmender Klassenstufe kann auf eine mögliche Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis der Schülerinnen und Schüler zurückzuführen sein: Das Wissen zum Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit, welches anfänglich dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist, kann mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler, nach einer Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis der Schülerinnen und Schüler, im Sinne der Theorie des Conceptual Change, dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden.

Diese Umstrukturierung kann zudem eine Erklärung dafür darstellen, dass der Einfluss der linguistischen Interpretation des Aufgabentextes, wie von Hawkins und Kapadia (1984) und Scholz (1991) beschrieben, ab einer bestimmten Klassenstufe schlagartig zurückgeht. Für Bentz und Borovcnik (1991, S. 3) wird die verbale Interpretation bei der vorliegenden Aufgabe „durch suggestive Elemente des Textes [...] provoziert“, insbesondere durch die Unterstreichungen und die Betonung, dass vor dem Werfen die rote Seite nach oben zeigt; diese suggestiven Elemente provozieren auch „eine Interferenz von kausalen und stochastischen Denkweisen“.

In Bezug auf falsche Antworten wird von Bentz und Borovcnik (1991, S. 3) darauf hingewiesen, dass „durch die *konkrete* Formulierung der Frage (ein ganz konkreter Versuch wird beschrieben)“ die Angabe eines bestimmten Ergebnisses, im Sinne des „Outcome Approach“, begünstigt wird – darüber hinaus sollte die „allgemeine Diskrepanz zwischen Konzepten auf der Ebene des Denkens und Strategien zum Handeln“, der „Denken-Handeln-Konflikt“, berücksichtigt werden. So wird von den betreffenden Schülerinnen und Schülern unter Umständen zwar das Chancenverhältnis mit 50 : 50 (und damit richtig) eingeschätzt, allerdings, begünstigt durch die „Social Judgement Framing“-Züge des Problems, nicht gewusst, welche der vorgegebenen Antwortmöglichkeiten „(A) Die rote Seite ist wahrscheinlicher“, „(B) Die grüne Seite ist wahrscheinlicher“ und „(D) Weiß nicht“ diesbezüglich zu wählen ist.

Zu berücksichtigen ist bei der vorliegenden Aufgabe, dass richtige Lösungen eventuell auch auf die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Gleichwahrscheinlichkeit* zurückzuführen sind.

„Green: Question 6“. Bei den in den fünf Teilaufgaben der als „Question 6“ bezeichneten Aufgabe beschriebenen Situationen waren jeweils zwei Beutel vorgegeben, von denen jeder mit unterschiedlich vielen Spielmarken in den Farben weiß und schwarz gefüllt war. Gegenstand der Betrachtung war jeweils die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer schwarzen Spielmarke.

Die in den Teilaufgaben beschriebene Situation stellte für die Schülerinnen und Schüler einen vertrauten Kontext dar (Green, 1982, S. 768).

Beispielhaft für die Struktur der einzelnen Teilaufgaben wird in der Veröffentlichung von Green (1982) die Teilaufgabe „Question 6(d)“ vorgestellt. Die Aufgabe lautete übersetzt: „In zwei anderen [Anmerkung: dies bezieht sich auf die vorangegangene Teilaufgabe] Beuteln sind schwarze und weiße Spielmarken: Beutel G: 12 schwarze und 4 weiße; Beutel H: 20 schwarze und 10 weiße. Bei welchem der Beutel ist die Wahrscheinlichkeit größer, eine schwarze Spielmarke zu ziehen?“ Die vorgegebenen Antwortmöglichkeiten waren: „(A) Gleiche Wahrscheinlichkeit“, „(B) Beutel G“, „(C) Beutel H“ und „(D) Weiß nicht [Anmerkung: in der englischen Sprache ist hier kein Problem der Doppeldeutigkeit in Bezug auf die Farbe ‚Weiß‘ bzw. das Nichtwissen ‚ich weiß nicht‘ gegeben]“. Zusätzlich sollte die gewählte Antwort kurz begründet werden, hierzu war nach der Frage „Warum?“ eine Zeile zum Ausfüllen vorgegeben.

Im Original:

Two other bags have black and white counters:

Bag G: 12 Black and 4 White
Bag H: 20 Black and 10 White

Which bag gives a better chance of picking a black counter?
(A) Same chance
(B) Bag G
(C) Bag H
(D) Don't know

Why? ……

Erwartete Antwort: (B) Bag G

Mögliche Begründung: Greater Black:White ratio

Auch bei dieser Aufgabe handelt es sich um ein wort- bzw. buchstabenkodifiziertes Problem, wobei wiederum der Einsatz eines Zufallsgerätes in einer Alltagssituation beschrieben wird. Die Problemrahmung entspricht dem „Problem Solving Framing". In den vorgegebenen Antwortmöglichkeiten ist die Wahrscheinlichkeit in nicht-numerischer Form repräsentiert.

Die Anzahl an schwarzen und weißen Spielmarken in den beiden jeweils vorgegebenen Beuteln war bezüglich der einzelnen Teilaufgaben wie folgt verteilt:

- *„Question 6(a)":*
  3 schwarze Spielmarken und eine weiße Spielmarke im ersten Beutel,
  2 schwarze Spielmarken und eine weiße Spielmarke im zweiten Beutel;
- *„Question 6(b)":*
  5 schwarze Spielmarken und 2 weiße Spielmarken im ersten Beutel,
  5 schwarze Spielmarken und 3 weiße Spielmarken im zweiten Beutel;
- *„Question 6(c)":*
  2 schwarze Spielmarken und 2 weiße Spielmarken im ersten Beutel,
  4 schwarze Spielmarken und 4 weiße Spielmarken im zweiten Beutel;
- *„Question 6(d)":* (wie bereits beschrieben)
  12 schwarze Spielmarken und 4 weiße Spielmarken im ersten Beutel,
  20 schwarze Spielmarken und 10 weiße Spielmarken im zweiten Beutel;
- *„Question 6(e)":*
  3 schwarze Spielmarken und eine weiße Spielmarke im ersten Beutel,
  6 schwarze Spielmarken und 2 weiße Spielmarken im zweiten Beutel.

Zusätzlich zum Text war bei den ersten drei Teilaufgaben, „Question 6(a)", „Question 6(b)" und „Question 6(c)", jeweils eine grafische Darstellung gegeben. In der Veröffentlichung von Green wird diese Darstellung zwar erwähnt in Form von „Diagram given" (vgl. abgebildete obere Tabelle in Green, 1982, S. 769), jedoch nicht näher beschrieben. Naheliegend erscheint, dass die jeweils im Text beschriebene Anzahl an schwarzen und weißen Spielmarken im ersten und zweiten Beutel bildlich dargestellt war.

Die veröffentlichten Ergebnisse der Auswertung der Multiple-Choice-Antworten der Schülerinnen und Schüler für die einzelnen Teilaufgaben zeigen (vgl. Green, 1982, S. 769), dass die relative Lösungshäufigkeit bei der als „Question 6" bezeichneten Aufgabe von Teilaufgabe zu Teilaufgabe, das heißt von „Question 6(a)" bis „Question 6(e)", abnimmt. Zudem ist aus dem veröffentlichten Ergebnis der Auswertung der Multiple-Choice-Antworten der Schülerinnen und Schüler für die ausführlich beschriebene Teilaufgabe „Question 6(d)" ersichtlich

(vgl. Green, 1982, S. 769), dass bei dieser Teilaufgabe die relative Lösungshäufigkeit mit zunehmender Klassenstufe zunimmt.

Neben den Multiple-Choice-Antworten wurden auch die schriftlichen Begründungen der Schülerinnen und Schüler bei der Auswertung analysiert. Als Ergebnis beider Analysen wird von Green (1982, S. 770) festgehalten, dass offensichtlich nur verhältnismäßig wenige Schülerinnen und Schüler im Alter von 11 bis 16 Jahren (32%) durchweg ein und dieselbe Strategie bei allen fünf Problemen anwenden. Wurde von einer Schülerin oder einem Schüler bei allen fünf Teilaufgaben konsequent ein und dieselbe Strategie eingesetzt, so handelte es sich hierbei mit Abstand am häufigsten um die korrekte Strategie des Verhältnisvergleichs (Vergleich des Verhältnisses von schwarzen und weißen Spielmarken in den jeweiligen Beuteln).

In Interviews mit einzelnen Schülerinnen und Schülern im Anschluss an den Test bezüglich der Vorstellung von Wahrscheinlichkeit wurde von Green (1982, S. 770) festgestellt, dass selbst Schülerinnen und Schüler, die bei den Teilaufgaben „Question 6(d)“ oder „Question 6(e)“ eine Begründung auf der Basis des Verhältnisvergleichs genannt hatten, bei Teilaufgabe „Question 6(a)“ als Begründung anführten: „Im Beutel A sind mehr schwarze Spielmarken.“ Green sieht in dem mehrheitlich erfolgten Wechsel der Strategie in Abhängigkeit von der Anzahl der gegebenen weißen und schwarzen Spielmarken einen Beleg dafür, wie unwahrscheinlich es ist, dass sich für das Verhalten der Schülerinnen und Schüler ein einfaches „Modell“ entwickeln lässt.

Aus der Analyse der Antwortmuster der Schülerinnen und Schüler zieht Green (1982, S. 771) den Schluss: Viele Schülerinnen und Schüler verwenden eine Mischung verschiedener Strategien, wobei sie mit Problemen, bei denen sich die Anzahl nur bei einer Farbe ändert, kompetent umgehen, sich allerdings in Fällen, in denen sich die Anzahl bei beiden Farben ändert, weniger sicher sind, und im Allgemeinen darauf zurückfallen, den Beutel mit mehr schwarzen oder der größeren Differenz von schwarzen und weißen Spielmarken auszuwählen. Green mutmaßt, dass dieses Verhalten für vielleicht 50% der 11- bis 16-Jährigen zutrifft.

In Bezug auf einzelne Strategien ist festzuhalten, dass mit zunehmendem Alter vermehrt die Strategie des Verhältnisvergleichs angewendet wurde, wohingegen der Einsatz der Strategie des Anzahlvergleichs (Vergleich der Anzahl der schwarzen Spielmarken in den beiden Beuteln) und die Anwendung der Strategie des Differenzvergleichs (Vergleich der Differenz von schwarzen und weißen Spielmarken in den beiden Beuteln) abnahmen. Anzumerken ist, dass der Einsatz der Strategie des Verhältnisvergleichs in weitaus größerem Maße zunimmt als die Anwendung der beiden Strategien Anzahlvergleich und Differenzvergleich zusammen abnimmt.

Veröffentlicht wurde auch eine Auswertung der Antworten der Schülerinnen und Schüler bezüglich des intellektuellen Niveaus. Aus dieser Auswertung geht hervor, dass der Anteil der Schülerinnen und Schüler, die durchgängig den Verhältnisvergleich als Strategie einsetzten, mit steigendem intellektuellem Niveau zunimmt (vgl. Green, 1982, S. 772) und innerhalb der einzelnen intellektuellen Niveaus mit zunehmender Klassenstufe zunimmt (vgl. Green, 1982, S. 772). Hinsichtlich der Strategie des Verhältnisvergleichs kommt Green (1982, S. 771) zusammenfassend zu dem Ergebnis, dass die Anwendung dieser Strategie sehr stark von der Intelligenz abhängt – noch mehr als vom Alter.

Die Wahrscheinlichkeit wird bei den erwarteten Lösungen der einzelnen Teilaufgaben wiederum als Laplace-Wahrscheinlichkeit interpretiert. Bezüglich des zur Lösung erforderlichen Wissens lässt sich festhalten, dass neben dem Wissen zu Grundraum und Symmetrie, dem Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit, welches, wie bei der vorangegangenen Aufgabe beschrieben, dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist und unter Umständen mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler, nach einer Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis der Schülerinnen und Schüler, im Sinne der Theorie des Conceptual Change, dem

„direct accessible knowledge“ zugeordnet werden kann, die Kenntnis des Begriffs des Verhältnisses, der Proportion, erforderlich ist; dieses Wissen ist dem „higher order knowledge“ zuzuordnen. Bei der Teilaufgabe „Question 6(a)“ und der Teilaufgabe „Question 6(b)“ reicht die Kenntnis des Begriffs der Anzahl und bei der Teilaufgabe „Question 6(c)“ die Kenntnis des Begriffs der Differenz, um zur erwarteten Lösung zu gelangen; dieses Wissen kann dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden. Bei der Teilaufgabe „Question 6(d)“ und der Teilaufgabe „Question 6(e)“ ist dagegen die Kenntnis des Begriffs des Verhältnisses, der Proportion, erforderlich, um zur erwarteten Lösung zu gelangen; dieses Wissen ist, wie beschrieben, dem „higher order knowledge“ zuzuordnen. Die Anwendung der „simple everyday heuristic“ des *Take The Best* führt bei der Berücksichtigung eines korrekten Stichwortes jeweils zur richtigen Lösung. Die zur Lösung erforderliche Intuition stellt bei der Teilaufgabe „Question 6(a)“ eine Primärintuition, bei der Teilaufgabe „Question 6(b)“, der Teilaufgabe „Question 6(c)“, der Teilaufgabe „Question 6(d)“ und der Teilaufgabe „Question 6(e)“ dagegen eine Sekundärintuition dar. Bei den einzelnen Teilaufgaben kann das zur Lösung erforderliche Vorgehen folgenden Entwicklungsphasen und Stufen des probabilistischen Denkens zugeordnet werden: Die Teilaufgabe „Question 6(a)“ und die Teilaufgabe „Question 6(b)“ können der Phase der konkreten Operationen, der Stufe IIA des probabilistischen Denkens, zugeordnet werden, wobei „Question 6(a)“ unter Umständen schon von Kindern, die sich noch in der präoperationalen Phase, der Stufe IB des probabilistischen Denkens, befinden, richtig gelöst wird; die Teilaufgabe „Question 6(c)“, die Teilaufgabe „Question 6(d)“ und die Teilaufgabe „Question 6(e)“ können der Phase der formalen Operationen, der Stufe III des probabilistischen Denkens, zugeordnet werden, wobei die Teilaufgabe „Question 6(c)“ aufgrund des gegebenen Diagramms unter Umständen schon von Kindern, die sich noch in der Phase der konkreten Operationen, der Stufe IIB des probabilistischen Denkens, befinden, richtig gelöst wird.

Die Abnahme der relativen Lösungshäufigkeit von Teilaufgabe zu Teilaufgabe, also von „Question 6(a)“ bis „Question 6(e)“, lässt sich damit erklären, dass das zur Lösung erforderliche Vorgehen, wie zuvor beschrieben, zunehmend einer höheren Stufe des probabilistischen Denkens zugeordnet werden kann.

Die Zunahme der relativen Lösungshäufigkeit mit zunehmender Klassenstufe bei der als „Question 6(d)“ bezeichneten Teilaufgabe kann darauf zurückzuführen sein, dass das zur Lösung erforderliche Wissen zum Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit sowie zum Begriff des Verhältnisses, der Proportion, mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler, nach einer Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis der Schülerinnen und Schüler, im Sinne der Theorie des Conceptual Change, jeweils nicht mehr dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist, sondern dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden kann.

Dass nur von verhältnismäßig wenigen Schülerinnen und Schülern bei allen fünf Teilaufgaben durchgängig ein und dieselbe Strategie angewendet wird, kann auf die Anwendung der „simple everyday heuristic“ des *Take The Best* hindeuten. Hierbei wird ein Stichwort, beispielsweise bei der Teilaufgabe „Question 6(a)“ das Stichwort „Anzahl der schwarzen Spielmarken“, berücksichtigt, welches zu einer, in diesem Fall korrekten Lösung führt. Bei der nächsten Teilaufgabe, „Question 6(b)“, führt dieses Stichwort dann nicht mehr zu einer Lösung, sodass gemäß der Heuristik des *Take The Best* ein neues Stichwort, beispielsweise das Stichwort „Differenz zwischen schwarzen und weißen Spielmarken“, welches einer anderen Strategie entspricht, gewählt wird.

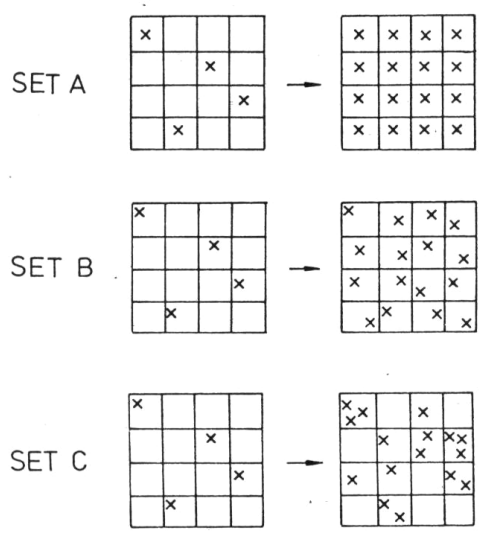
Die Beobachtung, dass von vielen Schülerinnen und Schülern nur Vergleiche mit einer einzigen Variablen durchgängig erfolgreich bewältigt werden, kann darauf zurückzuführen sein, dass sich die betreffenden Schülerinnen und Schüler, was das probabilistische Denken betrifft, noch in der Phase der konkreten Operationen, den Stufen IIA und IIB des probabilistischen Denkens, befinden.

Die Zunahme der Anwendung des Verhältnisvergleichs mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler kann ebenfalls auf die erwähnte Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis der Schülerinnen und Schüler zurückzuführen sein. Liegt das Wissen zum Begriff des Verhältnisses, der Proportion, in Form des „direct accessible knowledge“ vor, so kann davon ausgegangen werden, dass der Begriff des Verhältnisses, der Proportion, auch bei der Anwendung der Heuristik des *Take The Best* vermehrt als Stichwort gewählt wird. Die Abhängigkeit des Einsatzes der Strategie des Verhältnisvergleichs von der Intelligenz der Schülerinnen und Schüler lässt sich damit erklären, dass von Schülerinnen und Schülern, die sich in der Phase der formalen Operationen, der Stufe III des probabilistischen Denkens, befinden, bei Vergleichen mit zwei Variablen eine allgemeine und schnelle Lösung gefunden wird.

„***Green: Question 11*“.** Bei der als dritte vorgestellten Aufgabe lautete die Angabe übersetzt: „Das flache Dach eines Gartenhauses besteht aus 16 quadratischen Teilen. Es beginnt zu schneien. Zuerst fallen nur ein paar Schneeflocken, nach einiger Zeit sind dann mehrere gelandet. Untenstehend sind drei Reihen aus zwei Bildern. Jede Reihe zeigt das sich aufbauende Muster der Schneeflocken – zuerst 4, dann 16 Schneeflocken.“ Unterhalb der abgebildeten Reihen (in der Originaldarstellung mit den Bezeichnungen „SET A“, „SET B“ und „SET C“) folgte die zu beantwortende Frage: „Welche dieser Reihen zeigt am besten die Art des Musters, welches man erwarten würde zu sehen, während die Schneeflocken landen?“ Zur Auswahl standen die Antworten „Reihe A“, „Reihe B“, „Reihe C“, „Reihe B und C“ und „Jede Art von Muster ist gleich wahrscheinlich“.

Im Original:

The flat roof of a garden shed has 16 square sections. It begins to snow.
At first just a few snowflakes fall, then after a while more have landed.
Below are three sets of two pictures. Each set shows the pattern of snowflakes building up – first 4 flakes, then 16 flakes.



QUESTION: Which of these sets best shows the kind of pattern you would expect to see as the snowflakes land?

- Set A ☐
- Set B ☐
- Set C ☐
- Set B and C ☐
- Each kind of pattern is as likely ☐

Erwartete Antwort: Set C

Auch wenn eine grafische Darstellung gegeben ist, so handelt es sich bei der vorliegenden Aufgabe um ein wort- bzw. buchstabenkodifiziertes Problem, bei dem eine Alltagssituation beschrieben wird. Die Problemrahmung kann trotz der vorgegebenen Antwortmöglichkeiten dem „Social Judgement Framing“ zugeordnet werden. Bei der vorliegenden Aufgabe wird nicht die Vorstellung von Wahrscheinlichkeit, sondern die Vorstellung von Zufall untersucht.

Die Auswertung der Antworten der Schülerinnen und Schüler ergab die für Green (1982, S. 774) erstaunliche Tatsache, dass die relative Lösungshäufigkeit mit zunehmendem Alter abnimmt. Als mögliche Erklärung wird angeführt, dass zwei Tendenzen gegeneinander ankämpfen – Reife/Erfahrung einerseits und Dominanz des deduktiven Denkens in der Mathematik und den Naturwissenschaften andererseits, welches die Erwägung des Zufalls im Keim erstickt, indem es versucht, alles zu kodifizieren und erklären (Green, 1982, S. 774). Aus der Veröffentlichung von Green ist zudem ersichtlich (vgl. Green, 1982, S. 774), dass die relative Häufigkeit der Antwort „Jede Art von Muster ist gleich wahrscheinlich“ in den höheren Klassenstufen größer ist als in den niedrigeren Klassenstufen und in allen Klassenstufen, mit Ausnahme der Klassenstufe 3, größer ist als die relative Häufigkeit der anderen Antworten.

Charakteristisch für die erwartete Lösung ist, dass das betreffende Muster im Vergleich zu den beiden anderen Mustern am wenigsten regelmäßig und sortiert und folglich am wenigsten determiniert wirkt. Um die Aufgabe richtig lösen zu können, ist das Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit erforderlich, hier die Landepunkte der einzelnen Schneeflocken betreffend. Dieses Wissen ist dem „higher order knowledge“ zuzuordnen. Die Verfahren, die zur richtigen Lösung führen, sind den „higher order heuristics“ zuzuordnen. Aufgrund des Erwerbs durch Instruktion stellt die zur Lösung erforderliche Intuition eine Sekundärintuition dar. Das zur Lösung erforderliche Vorgehen kann der Phase der formalen Operationen, der Stufe III des probabilistischen Denkens, zugeordnet werden.

Ob das Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit auf die Landepunkte der einzelnen Schneeflocken angewendet wird, hängt unter anderem von der Einführung von Zusatzannahmen ab, welche durch den interpretierbaren Eindruck der Informationen und die Beschreibung einer Alltagssituation aus dem persönlichen Erfahrungsbereich der Schülerinnen und Schüler begünstigt wird. Dabei ist auch der mit zunehmender Klassenstufe wachsende Umfang des naturwissenschaftlichen Wissens zu berücksichtigen, welcher unter Umständen zur Einführung von zusätzlichen Annahmen beiträgt und somit zu einer Abnahme der relativen Lösungshäufigkeit mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler führt.

Die von Green (1982) angeführte Erklärung für die Abnahme der relativen Lösungshäufigkeit mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler kann dahingehend interpretiert werden, dass das zur Lösung erforderliche Wissen, das Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit, mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler unter Umständen zwar dem „direct accessible knowledge“, nach einer Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis der Schülerinnen und Schüler, im Sinne der Theorie des Conceptual Change, zugeordnet werden kann, jedoch die Anwendung dieses Wissens durch die Steuerung des Zielsystems, welches mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler, entsprechend der in den Naturwissenschaften und den nicht-stochastischen Bereichen der Mathematik vorherrschenden Art und Weise des Denkens, zunehmend deterministischer ausgerichtet ist, verhindert wird.

Falsche Lösungen können darüber hinaus auf den Einfluss der linguistischen Interpretation des Aufgabentextes und der Interpretation der grafisch vorgegebenen Muster zurückzuführen sein. So wird durch die Unterstreichung, dass die „Art des Musters, welches man erwarten würde zu sehen“ anzugeben ist, möglicherweise die Wahl der Antwort „Reihe B und C“ begünstigt, da in diesen beiden Reihen im Vergleich zur oberen Reihe jeweils unregelmäßige Muster dargestellt sind. Des Weiteren kann sich die Tatsache, dass in der grafischen Darstel-

lung die Ausgangsmuster in der mittleren und der unteren Reihe, im Gegensatz zum Ausgangsmuster in der oberen Reihe, identisch sind, auf diese Einschätzung unterstützend auswirken.

Falsche Lösungen der Aufgabe können auch auf die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Repräsentativität*, mit der Fehlvorstellungen von Zufall, im Sinne einer kognitiven Verzerrung, einhergehen, zurückgeführt werden. So wird unter Umständen fälschlicherweise aus der globalen Regelmäßigkeit des Phänomens Schneefall auf die lokale Regelmäßigkeit, hier der Landepunkte der einzelnen Schneeflocken, geschlossen. Dass diese Heuristik angewendet wird, lässt sich auf den Einfluss des Zielsystems, durch den die Anwendung des Wissens zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit auf die Landepunkte der einzelnen Schneeflocken verhindert wird, zurückführen.

Eine weitere Erklärung für falsche Lösungen der Aufgabe ist die Vorstellung von Zufall im Sinne von „alles ist möglich“. Diese Vorstellung wird unter Umständen durch das Wissen zu Grundraum und Symmetrie, das, wie beschrieben, anfänglich dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist und mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden kann, begünstigt und führt zur Wahl der Antwort „Jede Art von Muster ist gleich wahrscheinlich“. Da die relative Häufigkeit dieser Antwort in den höheren Klassenstufen größer ist als in den niedrigeren Klassenstufen, kann dies neben der von Green (1982) angeführten Erklärung eine weitere Erklärung für die Abnahme der relativen Lösungshäufigkeit mit zunehmender Klassenstufe darstellen. Anzumerken ist, dass zu der Antwort „Jede Art von Muster ist gleich wahrscheinlich“ auch die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Gleichwahrscheinlichkeit* führt. Die Anwendung dieser Heuristik kann eine Erklärung für die bereits vergleichsweise große relative Häufigkeit der Antwort „Jede Art von Muster ist gleich wahrscheinlich“ in den niedrigeren Klassenstufen, in denen das Wissen zu Grundraum und Symmetrie dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist, darstellen.

Bei der vorliegenden Aufgabe kann zudem nicht ausgeschlossen werden, dass, im Sinne des „Outcome Approach“, von der Situationsbeschreibung „flaches Dach eines Gartenhauses, es beginnt zu schneien“ ausgehend, die Antwort „Reihe A“ gewählt wird, da diese das Resultat des beginnenden Schneefalls, dass das flache Dach des Gartenhauses mit einer dünnen Schneeschicht bedeckt ist, am besten widerspiegelt.

„Green: Question 20“. Bei der als vierte vorgestellten Aufgabe lautete der erste Teil der Angabe übersetzt: „Clare und Susan bekamen beide vom Lehrer den Auftrag, eine große Anzahl an Würfen mit einer Münze durchzuführen, wobei sie jedes Mal notieren sollten, ob Kopf oder Zahl oben war. Für jedes Mal ‚Kopf‘ sollte eine 1 notiert werden und für jedes Mal ‚Zahl‘ sollte eine 0 notiert werden. Hier sind die beiden Reihen der Ergebnisse.“

Unterhalb der beiden gegebenen Reihen der Ergebnisse (in der Originaldarstellung; auf der folgenden Seite abgebildet) folgte der zweite Teil der Angabe: „Nun, eines der beiden Mädchen hat es richtig gemacht, indem es eine Münze geworfen hat. Das andere Mädchen hat gemogelt und sich alles ausgedacht.“ Die zu beantwortenden Fragen lauteten: „(a) Welches der beiden Mädchen hat gemogelt?“ und „(b) Woran erkennt man das?“, wobei bei jeder der beiden Fragen das Wort „Antwort“ mit einer Zeile bzw. zwei Zeilen zum Ausfüllen vorgedruckt war.

Genauso wie bei den vorangegangenen Aufgaben handelt es sich bei der vorliegenden Aufgabe um ein wort- bzw. buchstabenkodifiziertes Problem; hierbei wird der Einsatz eines Zufallsgerätes in einer Alltagssituation beschrieben. Auch wenn bei der Frage „(a) Welches der beiden Mädchen hat gemogelt?“ eine exakte, eindeutige Antwort erwartet wird, entspricht die Problemrahmung dem „Social Judgement Framing“. Bei dieser Aufgabe wird ebenfalls nicht die Vorstellung von Wahrscheinlichkeit, sondern die Vorstellung von Zufall untersucht.

Im Original:

A teacher asked Clare and Susan each to toss a coin a large number of times and to record every time whether the coin landed Heads or Tails. For each 'Heads' a 1 is recorded and for each 'Tails' an 0 is recorded.

Here are the two sets of results:

```
CLARE:   010110011001010110110100011100011011010101100100 01
         010100111001101011001011001011001001011101100110 11
         010100101100101011000100110101100111011101011000 11

SUSAN:   100111011110100111001001110010001110111111101010 1
         111000000100010100100000100011000101000000000011001
         000000011111000011010100100100111111010011000110 00
```

Now one girl did it properly, by tossing the coin. The other girl cheated and just made it up.

(a) Which girl cheated? ANSWER …….

(b) How can you tell?

ANSWER ……
……...

Erwartete Antwort:

(a) Clare

(b) Clare has a too regular pattern, Clare has too short runs

Die Auswertung der Antworten der Schülerinnen und Schüler auf die Frage „(a) Welches der beiden Mädchen hat gemogelt?" ergab, dass in allen Klassenstufen in der Mehrzahl die falsche Antwort „Susan" gegeben worden war und dass hinsichtlich der relativen Lösungshäufigkeit keine Verbesserung mit zunehmender Klassenstufe festzustellen ist (Green, 1982, S. 775). In Bezug auf die Frage „(b) Woran erkennt man das?" führte die Auswertung der Antworten zu dem Ergebnis, dass nur etwa 24% der Schülerinnen und Schüler eine korrekte Antwort – beispielsweise dass „Clare ein zu regelmäßiges Muster" oder dass „Clare zu kurze Runs" hat – gegeben hatten, wobei sich hinsichtlich der relativen Lösungshäufigkeit nur eine leichte Verbesserung mit zunehmender Klassenstufe zeigt (Green, 1982, S. 775).

Charakteristisch für die erwartete Lösung ist, dass die Folge von „Clare" aufgrund zu kurzer Runs und damit zu häufig erfolgender Wechsel als zu regelmäßig einzuschätzen ist. Bei dieser Aufgabe ist, wie bei der vorangegangenen Aufgabe, das Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit erforderlich, hier die Ergebnisse der einzelnen Würfe der Münze betreffend, um zur erwarteten Lösung zu gelangen. Dieses Wissen ist, wie bei der vorangegangenen Aufgabe beschrieben, dem „higher order knowledge" zuzuordnen und kann unter Umständen mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler, nach einer Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis der Schülerinnen und Schüler, im Sinne der Theorie des Conceptual Change, dem „direct accessible knowledge" zugeordnet werden. Bei der Berücksichtigung eines korrekten Stichwortes führt die Anwendung der „simple everyday heuristic" des *Take The Best* zur erwarteten Lösung. Die zur Lösung erforderliche Intuition stellt aufgrund des Erwerbs durch Instruktion eine Sekundärintuition dar. Das zur Lösung erforderliche Vorgehen kann wiederum der Phase der formalen Operationen, der Stufe III des probabilistischen Denkens, zugeordnet werden.

Ob das Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit auf die Ergebnisse der einzelnen Würfe der Münze angewendet wird, hängt bei der vorliegenden Aufgabe, wie bei der vorangegangenen Aufgabe, unter anderem von der Einführung von Zusatzannahmen ab, welche durch das „Social Judgement Framing" des Problems begünstigt wird.

Die geringe relative Häufigkeit der erwarteten Antwort „Clare“ kann darauf zurückzuführen sein, dass das Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit zwar mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler, nach einer Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis der Schülerinnen und Schüler, im Sinne der Theorie des Conceptual Change, dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden kann, aber die Anwendung dieses Wissens durch den Einfluss des Zielsystems, welches, wie beschrieben, mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler zunehmend deterministischer ausgerichtet ist, verhindert wird.

Die große relative Häufigkeit der falschen Antwort „Susan“ lässt sich mit der Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Repräsentativität* und den damit einhergehenden Fehlvorstellungen von Zufall, im Sinne einer kognitiven Verzerrung, erklären. Wird der Zufall als sich selbst regulierender Prozess angesehen, so kann es zu dem als „gambler’s fallacy“ bzw. „negative recency effect“ bezeichneten Fehlschluss kommen, welcher bei der vorliegenden Aufgabe dazu führt, dass die Runs bei der zur falschen Antwort gehörenden Folge fälschlicherweise als zu lang eingeschätzt werden. Diese Tendenz besteht bei etwa 18% der Schülerinnen und Schüler, durch alle Klassenstufen hindurch (vgl. Green, 1982, S. 775). Dass die Heuristik der *Repräsentativität* angewendet wird, lässt sich auf den Einfluss des Zielsystems, durch den die Anwendung des Wissens zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit auf die Ergebnisse der einzelnen Würfe der Münze verhindert wird, zurückführen.

Eine weitere Erklärung für die große relative Häufigkeit der falschen Antwort „Susan“ kann sein, dass zur Lösung der vorliegenden Aufgabe nicht auf das Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit, sondern auf das Wissen zur Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen, dass sich die relativen Häufigkeiten der beiden Ergebnisse „Kopf“ und „Zahl“ mit wachsender Anzahl der Würfe der Münze stabilisieren, zurückgegriffen wird. Wird dieses Wissen fälschlicherweise dahingehend interpretiert, dass die Differenz zwischen der Anzahl der beiden Ergebnisse „Kopf“ und „Zahl“ beliebig klein wird oder dass die relativen Häufigkeiten der beiden Ergebnisse „Kopf“ und „Zahl“ so nah wie möglich am theoretischen Wert von 0,5 liegen, und beispielsweise als Stichwort bei der Anwendung der „simple everyday heuristic“ des *Take The Best* berücksichtigt, so führt dies zur falschen Antwort „Susan“. Die Tendenz dazu ist in den höheren Klassenstufen geringer als in den niedrigeren Klassenstufen (vgl. Green, 1982, S. 775), was eine Erklärung für die geringfügige Zunahme der relativen Lösungshäufigkeit mit zunehmender Klassenstufe in Bezug auf die Frage „(b) Woran erkennt man das?“ darstellen kann.

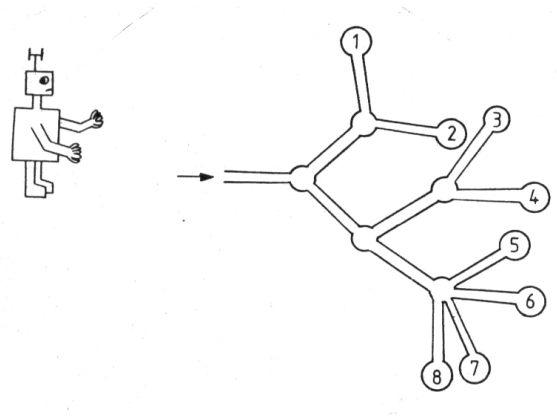
Dass mit zunehmender Klassenstufe keine Verbesserung hinsichtlich der relativen Lösungshäufigkeit der Aufgabe festzustellen ist, obwohl in den höheren Klassenstufen die relative Häufigkeit der falschen Antwort „Susan“ geringer ist als in den niedrigeren Klassenstufen, lässt sich damit erklären, dass in den höheren Klassenstufen die relative Häufigkeit der Antwort „Man kann es nicht sagen“ größer ist als in den niedrigeren Klassenstufen. Dies kann darauf zurückzuführen sein, dass zur Lösung der Aufgabe die „simple everyday heuristic“ der *Repräsentativität* angewendet wird und mit dieser, neben der bereits beschriebenen Fehlvorstellung von Zufall als sich selbst regulierender Prozess, unter Umständen vermehrt die bereits bei der vorangegangenen Aufgabe beschriebene Fehlvorstellung von Zufall im Sinne von „alles ist möglich“ einhergeht.

Die Antwort „Man kann es nicht sagen“ wird eventuell auch durch das „Social Judgement Framing“ des Problems begünstigt: Welches der beiden Mädchen gemogelt hat, lässt sich aufgrund der gegebenen Informationen im Nachhinein nicht mit Sicherheit sagen, sondern nur vermuten. Dass diese Auffassung in den höheren Klassenstufen stärker vertreten ist als in den niedrigeren Klassenstufen, kann auf die von Green (1982) angeführte Dominanz des deduktiven Denkens zurückzuführen sein, welches mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler stärker ausgeprägt ist.

„Green: Question 22“. Die als fünfte vorgestellte Aufgabe lautete übersetzt: „Ein Roboter wird in einen Irrgarten gestellt, den er zu erforschen beginnt. An jeder Kreuzung geht der Roboter den einen oder einen anderen Pfad mit der gleichen Wahrscheinlichkeit weiter (außer dass er den Weg, auf dem er gekommen ist, nicht zurückgeht). Es gibt acht Fallen an den Enden der acht Pfade (siehe Bild). In welcher Falle oder welchen Fallen wird der Roboter am wahrscheinlichsten enden, oder sind alle Fallen gleich wahrscheinlich?“ Unterhalb des Bildes (in der Originaldarstellung) war das Wort „Antwort“ mit einer halben Zeile zum Eintragen der Antwort vorgegeben.

Im Original:

A robot is put into a maze, which it begins to explore. At each junction the robot is as likely to go down any one path as any other (except it does not go back the way it came). There are eight traps at the ends of the eight paths (see picture). In which trap or traps is the robot most likely to finish up, or are all traps equally alike?



ANSWER: ……..

Erwartete Antwort: 1 and 2

Bei der vorliegenden Aufgabe handelt es sich, wie bei allen vorangegangenen Aufgaben, um ein wort- bzw. buchstabenkodifiziertes Problem, trotz der grafischen Darstellung. Die Problemrahmung entspricht dem „Problem Solving Framing“. Die Wahrscheinlichkeit ist in nicht-numerischer Form repräsentiert.

Das Ergebnis der Auswertung der Antworten der Schülerinnen und Schüler war, dass die relative Lösungshäufigkeit selbst bei Einbeziehung der Antworten „Falle 1“ und „Falle 2“ zusätzlich zur richtigen Antwort „Falle 1 und 2“ in den einzelnen Klassenstufen 17% nicht überstieg (Green, 1982, S. 776). Im Gegensatz hierzu lag die relative Häufigkeit der falschen Antwort, dass alle Fallen gleich wahrscheinlich sind, bei um die 60% in jeder Altersstufe.

Gemäß Green (1982, S. 776 f.) wurde die als „Question 22“ bezeichnete Aufgabe als beträchtlich weniger schwierig für Schülerinnen und Schüler der Klassenstufe 5, denen Baumdiagramme und die Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten schon begegnet waren, angesehen. Nach der Auswertung der Antworten der Schülerinnen und Schüler wurde die Aufgabe als extrem schwierig für *alle* Klassenstufen eingestuft, wobei in Interviews mit einzelnen Schülerinnen und Schülern im Anschluss an den Test bezüglich der Vorstellung von Wahrscheinlichkeit zum Ausdruck kam, dass das Wissen zu Baumdiagrammen scheinbar keine Hilfe war.

Abschließend weist Green (1982, S. 777) darauf hin, dass das „abgrundtiefe Versagen“ aller Klassenstufen bei dieser Aufgabe im auffälligen Widerspruch zu den Ergebnissen von

Fischbein, Pampu und Mînzat (1967) steht, welche in einem entsprechenden, jedoch praktischen Rahmen relative Lösungshäufigkeiten im Bereich von 58% bis 69% verzeichneten.

Bei der erwarteten Lösung wird die Wahrscheinlichkeit als Laplace-Wahrscheinlichkeit interpretiert. Im Vordergrund steht die Anwendung des Wissens zur Multiplikationsregel von Wahrscheinlichkeiten, welches dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist. Dieses Wissen steht bei der vorliegenden Aufgabe im engen Zusammenhang mit dem Wissen zu Grundraum (es gibt an jeder Kreuzung 2 bzw. 4 mögliche Pfade, die der Roboter weitergehen kann) und Symmetrie (die 2 bzw. 4 möglichen Pfade sind als gleich wahrscheinlich einzustufen), dem Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit, welches, wie beschrieben, anfänglich dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist und mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler, nach einer Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis der Schülerinnen und Schüler, im Sinne der Theorie des Conceptual Change, dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden kann. Zur Lösung der Aufgabe ist die Anwendung der Heuristik des Baumdiagramms erforderlich. Diese Heuristik ist, als Mittel der Informationsverarbeitung, welches durch formale Erziehung erworben wird, den „higher order heuristics“ zuzuordnen. Bei der zur Lösung erforderlichen Intuition handelt es sich aufgrund des Erwerbs durch Instruktion um eine Sekundärintuition. Das zur Lösung erforderliche Vorgehen ist im Allgemeinen der Phase der formalen Operationen, der Stufe III des probabilistischen Denkens, zuzuordnen, wobei es, wie im Abschnitt 3.3.6 beschrieben, nach der entsprechenden Instruktion auch dem Ende der Phase der konkreten Operationen, der Stufe IIB des probabilistischen Denkens, zugeordnet werden kann.

Die in den einzelnen Klassenstufen nahezu durchgängig gleich große relative Häufigkeit der falschen Antwort, dass alle acht Fallen gleich wahrscheinlich sind, kann auf die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Gleichwahrscheinlichkeit* zurückzuführen sein. Durch die linguistische Interpretation des Aufgabentextes, dass der Roboter den einen oder einen anderen Pfad mit der gleichen Wahrscheinlichkeit weitergeht, sowie dadurch, dass das zur Lösung erforderliche Wissen zur Multiplikationsregel von Wahrscheinlichkeiten dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist, wird die Anwendung dieser Heuristik unter Umständen begünstigt.

Dass die Heuristik des Baumdiagramms nicht zum Einsatz kommt, kann zum einen daran liegen, dass diese Heuristik den „higher order heuristics“ zuzuordnen ist, und zum anderen daran, dass sich aus der Interpretation der grafischen Darstellung kein Bezug zu einem Baumdiagramm ergibt: Die Darstellung wirkt ungeordnet, die Pfade sind aufgrund der geringen Länge und vergleichsweise großen Breite nicht intuitiv als Äste erkennbar und die Blätter liegen nicht, wie oftmals üblich, auf einer imaginären geraden Linie wie die Knoten.

Dies kann auch eine Erklärung dafür sein, dass die bei der vorliegenden Aufgabe festgestellten relativen Lösungshäufigkeiten im Vergleich zu den von Fischbein et al. (1967) festgestellten relativen Lösungshäufigkeiten bei denjenigen Aufgaben, in denen diese, für Baumdiagramme typischen Anforderungen in den grafischen Darstellungen erfüllt waren (vgl. Fischbein et al., 1967, S. 159), weitaus geringer sind. Darüber hinaus ist zu berücksichtigen, dass es sich bei den von Fischbein et al. verwendeten Aufgaben nicht um wort- bzw. buchstabenkodifizierte Probleme, sondern um Zufallsgeräte handelt, bei denen das zur Lösung erforderliche Vorgehen aufgrund der Enaktivität in größerem Maße dem Ende der Phase der konkreten Operationen, der Stufe IIB des probabilistischen Denkens, als der Phase der formalen Operationen, der Stufe III des probabilistischen Denkens, zugeordnet werden kann.

Bei der vorliegenden Aufgabe ist außerdem nicht auszuschließen, dass in Übereinstimmung mit dem „Outcome Approach“, im Sinne der im Abschnitt 3.5.1 im Zusammenhang mit dem „Münzproblem“ beschriebenen Vorstellung, die Antwort, dass alle acht Fallen gleich wahrscheinlich sind, nur deswegen gegeben wird, da die Wahrscheinlichkeit für jede der acht

Fallen als gering angesehen wird, und nicht, weil die Wahrscheinlichkeiten für die acht Fallen tatsächlich als gleich groß eingeschätzt werden.

Für eine weitere Auswertung wurde jede der 26 Aufgaben des Tests bezüglich der Vorstellung von Wahrscheinlichkeit („Probability Concepts Test“) einer der drei Unter-Kategorien „Verbal“, „Kombinatorisch“ und „Probabilistisch“ zugeordnet. Richtig gelöste Teilaufgaben wurden mit einem Punkt, falsch gelöste Teilaufgaben mit null Punkten bewertet. Für jede Schülerin und jeden Schüler wurden die Punktsummen in den einzelnen Unter-Kategorien – wobei die maximal erreichbare Punktsumme in der Unter-Kategorie „Verbal“ 15 Punkte betrug, in der Unter-Kategorie „Kombinatorisch“ 6 Punkte und in der Unter-Kategorie „Probabilistisch“ 29 Punkte (Green, 1982, S. 777) – sowie die Punktsumme insgesamt – maximal 50 Punkte – berechnet.

Aus der Veröffentlichung von Green (1982) geht hervor, dass von den Schülerinnen und Schülern in allen drei Unter-Kategorien mit zunehmender Klassenstufe im Durchschnitt bessere Ergebnisse erreicht werden (vgl. Green, 1982, S. 777). In den Unter-Kategorien „Verbal“ und „Kombinatorisch“ besteht zwischen den von Jungen und Mädchen im Durchschnitt erzielten Ergebnissen in allen Klassenstufen nahezu kein Unterschied, wohingegen in der Unter-Kategorie „Probabilistisch“ die von den Jungen im Durchschnitt erreichten Ergebnisse in allen Klassenstufen besser sind als die von den Mädchen im Durchschnitt erzielten Ergebnisse (vgl. Green, 1982, S. 777). Eine mögliche Erklärung hierfür wird von Green nicht gegeben.

Die Antworten der Schülerinnen und Schüler beim „Probability Concepts Test“ wurden zusätzlich nach den Kriterien „Alter“, „Geschlecht“, „Intelligenz“ und „mathematische Fähigkeiten“ analysiert – dabei wurde festgestellt, dass Alter, Intelligenz und Geschlecht bedeutende Faktoren sind, wobei die Varianz des Faktors „Intelligenz“ als dreimal so groß wie die des Faktors „Alter“ angegeben wird (Green, 1982, S. 777). Anteilsmäßig wird die Varianz der Intelligenz mit 44%, die des Alters mit 14% und die des Geschlechts mit 0,5% aufgeführt. Bei Ersetzung des Kriteriums „Intelligenz“ durch das Kriterium „mathematische Fähigkeiten“ ergab sich gemäß Green (1982, S. 777) ungefähr das gleiche Ergebnis. Die Varianz des Faktors „mathematische Fähigkeiten“ wird mit 40% angegeben, womit die mathematischen Fähigkeiten nahezu eine gleich gute Richtlinie für die Testleistung darstellen wie die Intelligenz. Dies ist für Green nicht verwunderlich in Anbetracht der hohen Korrelation (+0,72) zwischen den beiden Faktoren.

Bezüglich der Vorstellung der Schülerinnen und Schüler von Wahrscheinlichkeit wurde von Green (1982, S. 778) eine Einteilung in drei Kompetenzstufen, plus einer nullten Stufe, welche „totales Versagen“ repräsentieren sollte, vorgenommen. Um jede Schülerin und jeden Schüler eindeutig einer Kompetenzstufe zuordnen zu können, wurden die Fragen des Tests bezüglich der Vorstellung von Wahrscheinlichkeit einer sogenannten „Guttman Scalogram Analysis“ unterzogen. Ausgewählte Fragen des Tests bezüglich der Vorstellung von Wahrscheinlichkeit wurden in Unter-Tests gruppiert, welche unterschiedliche Kompetenzstufen repräsentieren sollten; für das Erreichen einer bestimmten Kompetenzstufe mussten die Stufe selbst sowie alle darunterliegenden Kompetenzstufen erreicht sein. Das Ergebnis der Auswertung war ein fortlaufender Anstieg der im Durchschnitt erreichten Kompetenzstufe mit zunehmendem Alter (Green, 1982, S. 778). Zudem wird festgehalten, dass die Jungen den Mädchen durchgehend überlegen sind in Bezug auf die durchschnittlich erreichte Kompetenzstufe, wobei sich der Abstand zwischen Jungen und Mädchen nicht vergrößert in der Altersspanne von 11 bis 16 Jahren. Für den Einfluss des intellektuellen Niveaus auf die durchschnittliche Kompetenzstufe wird von Green (1982, S. 778) festgehalten: Die kompetenteren Schülerinnen und Schüler gewinnen im 5-Jahres-Zeitraum in etwa eine Kompetenzstufe hinzu, die am wenigsten kompetenten, die zu Beginn eine Kompetenzstufe zurück sind, fallen im selben Zeitraum noch weiter zurück, indem sie nur etwa eine halbe Kompetenzstufe hinzugewinnen.

Die einzelnen Kompetenzstufen werden in der vorliegenden Veröffentlichung von Green nicht näher charakterisiert.

Bei den Teilaufgaben der als „Question 6“ bezeichneten Aufgabe wurden die Antworten der Schülerinnen und Schüler von Green (1982) einem Quervergleich mit den von Piaget und Inhelder (1951) aufgeführten Stufen des probabilistischen Denkens unterzogen: Die Antworten bei der als „Question 6(a)“ bezeichneten Teilaufgabe wurden hinsichtlich des Erreichens der Stufe IB analysiert, die Antworten bei der als „Question 6(b)“ bezeichneten Teilaufgabe hinsichtlich des Erreichens der Stufe IIA, die Antworten bei der als „Question 6(c)“ bezeichneten Teilaufgabe hinsichtlich des Erreichens der Stufe IIB und die Antworten bei den als „Question 6(d)“ und „Question 6(e)“ bezeichneten Teilaufgaben hinsichtlich des Erreichens der Stufe III. Aus der Veröffentlichung von Green (1982) geht hervor, dass diejenigen Schülerinnen und Schüler, die im „Test of General Reasoning Ability“ die Note „A“ oder „B“ hatten, im Durchschnitt die Stufe IB mit weniger als 11 Jahren, die Stufe IIA mit 11 Jahren, die Stufe IIB mit 12 Jahren und die Stufe III mit 14 Jahren erreichen (vgl. Green, 1982, S. 779). Diejenigen Schülerinnen und Schüler, die im „Test of General Reasoning Ability“ die Note „C“ hatten, erreichen im Durchschnitt die Stufe IB ebenfalls mit weniger als 11 Jahren, die Stufe IIA mit 13 Jahren und die Stufe IIB mit 14 Jahren. Die Stufe III wird von diesen Schülerinnen und Schülern nicht erreicht. Die verbleibenden Schülerinnen und Schüler, also diejenigen, die im „Test of General Reasoning Ability“ die Note „D“ oder „E“ hatten, erreichen im Durchschnitt die Stufe IB mit 11 Jahren und die Stufe IIA mit 16 Jahren; die Stufe IIB und die Stufe III werden nicht erreicht. Zusammenfassend kommt Green (1982, S. 779) zu dem Schluss, dass die meisten der englischen Schülerinnen und Schüler die Stufe der formalen Operationen nicht erreichen. Diese Auffassung stimmt gemäß Green (1982) mit den Ergebnissen einer Studie von Shayer, Kuchemann und Wylam (1976) bezüglich der naturwissenschaftlichen Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern überein.

4.2.3 Zusammenfassung der Ergebnisse von Green

Insgesamt werden die Ergebnisse der verschiedenen Auswertungen des Tests bezüglich der Vorstellung von Wahrscheinlichkeit („Probability Concepts Test“) von Green (1982) wie folgt zusammengefasst:

- Die relative Lösungshäufigkeit nimmt bei fast allen Teilaufgaben des Tests mit zunehmendem Alter und mit zunehmenden intellektuellen Fähigkeiten zu. Die Antwortmuster in den Klassenstufen 1 und 2 sind oftmals noch sehr ähnlich, wohingegen in den Klassenstufen 3, 4 und 5 deutliche Steigerungen feststellbar sind. Bei Aufgaben, die mit der Strategie des Anzahlvergleichs gelöst werden können, ist die relative Lösungshäufigkeit in allen Klassenstufen sehr groß. Dagegen weisen Aufgaben, deren Lösung die Anwendung der Strategie des Verhältnisvergleichs erfordert, eine sehr geringe relative Lösungshäufigkeit auf, besonders in den Klassenstufen 1 bis 3.
- Für den Vergleich von Wahrscheinlichkeiten wird von den Schülerinnen und Schülern eine Vielzahl an Strategien eingesetzt. Beliebte Strategien sind hierbei die Strategie des Anzahlvergleichs und die Strategie des Differenzvergleichs, wobei von den Schülerinnen und Schülern nur selten durchgängig ein und dieselbe Strategie angewendet wird. Ob die Berechnung von Verhältnissen durchgeführt wird, hängt stark von der Intelligenz und vom Alter ab. Aufgaben, die das Schätzen von Wahrscheinlichkeiten, die Stabilität von Häufigkeiten oder das Ziehen von Schlussfolgerungen beinhalten, wurden im Allgemeinen schlecht gelöst, wobei die relative Lösungshäufigkeit mit zunehmendem Alter nur geringfügig zunimmt.

- Mit Aufgaben aus der Kombinatorik, die der Phase der konkreten Operationen zuzuordnen sind, kamen die meisten der Schülerinnen und Schüler gut zurecht (relative Lösungshäufigkeit für die Permutation von 3 Objekten: 75%). Mit Aufgaben, die der Phase der formalen Operationen zuzuordnen sind, kamen dagegen nur noch wenige der Schülerinnen und Schüler zurecht (relative Lösungshäufigkeit für die Permutation von 4 Objekten: 12%; relative Lösungshäufigkeit für die Permutation von 5 Objekten: 4%).
- Die sprachlichen Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler reichen oftmals nicht aus, um probabilistische Situationen genau beschreiben zu können. Sehr oft wurden von Schülerinnen und Schülern die Wahrscheinlichkeiten von sicheren Ereignissen und sehr wahrscheinlichen Ereignissen gleichgesetzt, genauso wie die Wahrscheinlichkeiten von unmöglichen Ereignissen und sehr unwahrscheinlichen Ereignissen. Konnten mehr als zwei Ereignisse eintreten, so wurde eine Wahrscheinlichkeit von 50% sowohl mit Ereignissen, die eintreten oder nicht eintreten können, als auch mit gleich wahrscheinlichen Ereignissen in Verbindung gebracht.
- Im Allgemeinen hatten Jungen beim Test bezüglich der Vorstellung von Wahrscheinlichkeit ein besseres Gesamtergebnis als Mädchen. Dies trifft jedoch nicht für Aufgaben aus der Kombinatorik zu. Die Mädchen schnitten nur bei einer einzigen Aufgabe, „Question 20“, bedeutend besser ab als die Jungen. Im Allgemeinen schnitten die Jungen bei vielen der Aufgaben des Tests bezüglich der Vorstellung von Wahrscheinlichkeit besser ab.
- Die allgemeine Fähigkeit zum logischen Denken ist der bestimmende Faktor (44%) bezüglich des Testergebnisses, wobei ihr Einfluss dreimal so groß ist wie der der Klassenstufe (14%). Das Geschlecht spielt eine untergeordnete Rolle (0,5%). Die durchschnittlich erreichte Kompetenzstufe erhöht sich fortlaufend mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler sowie zunehmendem intellektuellen Niveau. Im Allgemeinen sind Jungen auf einer höheren Kompetenzstufe als Mädchen. Die meisten der Schülerinnen und Schüler erreichen in Klassenstufe 5 nicht die Phase der formalen Operationen und verlassen somit die Schule auf der Stufe der konkreten Operationen. Die Art und Weise des Unterrichts, bezogen auf das Spektrum vom lehrerzentrierten Unterricht bis hin zum individualisierten Lernen, scheint keinen bedeutenden Einfluss auf das Testergebnis zu haben.

4.2.4 Folgerungen aus den Befunden von Green

Von Green (1982, S. 781) selbst werden, von den Ergebnissen der Auswertung der Antworten der Schülerinnen und Schüler ausgehend, einige Empfehlungen für den Unterricht formuliert. Das Thema Wahrscheinlichkeit wird von Green als geeignet angesehen, um den Prozess des mathematischen Modellierens hervorzuheben: Ausgehend von einer realen Problemstellung wird ein mathematisches Modell konstruiert, anschließend wird im mathematischen Modell gearbeitet und letztlich werden die mathematischen Ergebnisse wieder auf die Realität übertragen. Dies ist in der folgenden Abbildung dargestellt:

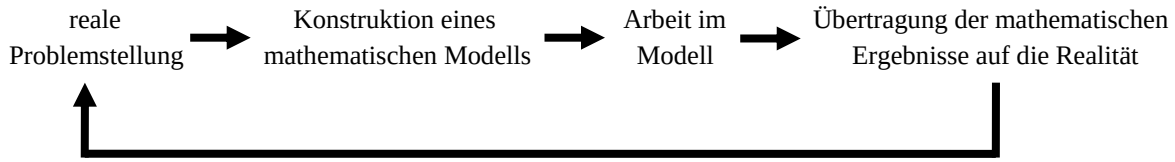


Abb. 4.1. Prozess des mathematischen Modellierens nach Green (vgl. Green, 1982, S. 781)

Green (1982, S. 781) erachtet es als wichtig, die Schülerin bzw. den Schüler bei einer vorgegebenen Problemstellung als Erstes zu fragen, was *sie* bzw. *er* als geeignetes Modell ansieht, da alle weiteren Überlegungen der Schülerin bzw. des Schülers in Bezug auf die vorgegebene Problemstellung implizit auf diesem Modell basieren werden. Da die Schulmathematik mathematische Berechnungen sehr stark hervorhebt und sowohl dem Modellieren als auch dem Interpretieren von Modellen sehr wenig Gewicht beimisst, hat der Stochastikunterricht auch die Aufgabe, zu versuchen, diesbezüglich das Gleichgewicht wieder herzustellen. Anhand von Interviews mit einzelnen Schülerinnen und Schülern kommt Green zu dem Schluss, dass einige der Schülerinnen und Schüler Fragen sehr schnell intuitiv beantworten, ohne dass offensichtlich mathematische Prozesse eingreifen.

Daher wird es von Green (1982) für Lehrerinnen und Lehrer als ratsam angesehen, sich zum einen bewusst zu machen, dass nicht alle Schülerinnen und Schüler sofort erkennen, was scheinbar offensichtlich ist, auch wenn einige der Schülerinnen und Schüler in der Klasse sofort die richtige Antwort parat haben, und zum anderen im Unterricht mehr Gewicht auf „Beweis und Erfahrung“ zu legen. Festgestellt wurde, dass das Bereitstellen von grafischen Darstellungen den Schülerinnen und Schülern beim Verstehen zu helfen scheint. Folglich sollten, wann immer möglich, bei Problemstellungen grafische Darstellungen mit angeboten werden oder Schülerinnen und Schüler dazu ermutigt werden, sich in Textform vorliegende Problemstellungen bildlich zu veranschaulichen, bevor sie mit der Lösung der betreffenden Probleme anfangen.

Bezogen darauf, dass Schülerinnen und Schüler nur in den seltensten Fällen auf ein und dieselbe Strategie zur Problemlösung zurückgreifen, wird von Green (1982) die explizite Diskussion von geeigneten Strategien für bestimmte Arten von Problemstellungen im Unterricht als zentral angesehen. Diese Diskussion sollte mit Blick auf die Entwicklung der Fähigkeit, verschiedene Arten von Problemstellungen unterscheiden zu können, und die Beherrschung einer universal einsetzbaren Strategie (des Verhältnisvergleichs) erfolgen. Im Hinblick auf die unterschiedlichen Abstufungen der verschiedenen Wahrscheinlichkeitsbegriffe wird das Diskutieren über Ereignisse, die das Element des Zufalls beinhalten, als wichtig erachtet im Unterricht – die Geläufigkeit der Bedeutungen erscheint hierbei am erstrebenswertesten und sollte nicht stillschweigend angenommen werden.

In Bezug auf die von der Wissenschaft und Technologie dominierte westliche Gesellschaft mit ihrem deterministisch ausgerichteten Bildungssystem warnt Green (1982) davor, die Vorstellung von Zufall und Wahrscheinlichkeit zu vernachlässigen, und verweist darauf, dass wir umgeben sind von zufälligen Ereignissen an jedem Tag in unserem Leben.

Anhand der Auswertung der Antworten der Schülerinnen und Schüler zu der als „Question 22“ bezeichneten Aufgabe ist erkennbar, dass bezüglich des Multiplikationsprinzips eindeutig nur ein geringes konzeptuelles Verständnis erreicht wurde und der Gebrauch von Baumdiagrammen mechanisch abzulaufen scheint. Als zentral für die Verankerung des Multiplikationsprinzips bei den Schülerinnen und Schülern wird es von Green (1982) angesehen, eine Art Grundintuition zu schaffen, auf welcher dieses Prinzip aufgebaut werden kann. Das Ziehen von Schlussfolgerungen aus den Ergebnissen von Stichproben und das Einschätzen der Stabilität von Häufigkeiten sind für Green zwei weitere grundlegende Konzepte – anhand der Auswertung der Antworten der Schülerinnen und Schüler sowie der anschließenden Interviews lautet das Fazit von Green (1982, S. 782): Eine große Anzahl an praktischen Aktivitäten und Gesprächen ist nötig, um ein zutreffendes Verständnis dieser Konzepte bei der Mehrzahl der Schülerinnen und Schüler zu entwickeln.

4.3 Die Studie von Fischbein und Schnarch (1997)

4.3.1 Allgemeines

Gegenstand der Studie von Fischbein und Schnarch (1997) war die Untersuchung der Entwicklung von probabilistischen, auf Intuitionen basierenden Fehlvorstellungen mit zunehmendem Alter. Dazu wurden insgesamt 80 Schülerinnen und Schüler in Israel getestet, von denen

- 20 im Alter von 10 bis 11 Jahren in der Klassenstufe 5,
- 20 im Alter von 12 bis 13 Jahren in der Klassenstufe 7,
- 20 im Alter von 14 bis 15 Jahren in der Klassenstufe 9 und
- 20 im Alter von 16 bis 17 Jahren in der Klassenstufe 11 waren.

Neben den Schülerinnen und Schülern wurden in der vorliegenden Studie auch 18 Studentinnen und Studenten, zukünftige Lehrerinnen und Lehrer mit der Spezialisierung auf Mathematik, getestet.

Die Zusammensetzung der Stichprobe wird von Fischbein und Schnarch (1997, S. 97) in Bezug auf das sozioökonomische Niveau und den kulturellen Hintergrund als repräsentativ für eine Reihe von Schülerinnen und Schülern bzw. Studentinnen und Studenten angesehen – trotz des geringen Stichprobenumfangs.

Die getesteten Schülerinnen und Schüler waren ohne probabilistische Vorkenntnisse, was die unterrichtliche Instruktion betrifft. Gemäß Fischbein und Schnarch (1997) sind die in der Klassenstufe 11 getesteten Schülerinnen und Schüler dem mittleren der drei unterrichtlichen Fähigkeitsniveaus an israelischen High-Schools zuzuordnen. Der Zweck der vorliegenden Studie wurde weder den getesteten Schülerinnen und Schülern noch den getesteten Studentinnen und Studenten mitgeteilt.

Von den an der Studie teilnehmenden Gruppen an Schülerinnen und Schülern ($N_1 = 80$) und Studentinnen und Studenten ($N_2 = 18$) musste während des stundenplanmäßigen Unterrichts unter üblichen Bedingungen im Klassenzimmer in ungefähr einer Stunde ein Fragebogen bearbeitet werden, wobei die Antworten schriftlich zu notieren waren. Der Fragebogen beinhaltete sieben probabilistische Probleme, von denen jedes auf eine probabilistische Fehlvorstellung bezogen ist (Fischbein & Schnarch, 1997, S. 97).

In Bezug auf die Auswertung der Fragebögen wird von Fischbein und Schnarch (1997, S. 101) darauf hingewiesen, dass zwar beispielhaft Begründungen von den Schülerinnen und Schülern gesammelt wurden, diese jedoch bewusst nicht in die vorliegende Auswertung mit einbezogen wurden. Begründet wird dies damit, dass zwischen der direkt gegebenen Antwort und der anschließenden Rechtfertigung der Antwort eine komplexe Beziehung besteht: Die anfängliche Antwort drückt die sofortige Intuition aus, wohingegen die Rechtfertigung, welche nach der ausgedrückten Intuition kommt, die Gründe der Versuchsperson für die Wahl widerspiegeln kann, oder auch nicht; es kann eine anschließende logische Konstruktion sein.

4.3.2 Aufgaben und Ergebnisse der Auswertung

In der Veröffentlichung von Fischbein und Schnarch (1997) werden alle sieben Probleme des Fragebogens, die sieben probabilistischen Probleme, einschließlich der zugehörigen Untersuchungsergebnisse erläutert.

„Fischbein & Schnarch: Representativeness“. Die als erste vorgestellte Aufgabe lautete übersetzt: „In einem Lotteriespiel muss man 6 Zahlen aus insgesamt 40 auswählen. Vered hat 1, 2, 3, 4, 5, 6 gewählt. Ruth hat 39, 1, 17, 33, 8, 27 gewählt. Wer hat eine größere Chance zu gewinnen?“ Als Antwortmöglichkeiten standen zur Auswahl: „Vered hat eine größere Chance zu gewinnen“, „Ruth hat eine größere Chance zu gewinnen“ und „Vered und Ruth haben die gleiche Chance zu gewinnen“.

Im Original:

> In a lotto game, one has to choose 6 numbers from a total of 40. Vered has chosen 1, 2, 3, 4, 5, 6. Ruth has chosen 39, 1, 17, 33, 8, 27. Who has a greater chance of winning?
>
> Vered has a greater chance of winning.
> Ruth has a greater chance of winning.
> Vered and Ruth have the same chance to win.

Erwartete Antwort: Vered and Ruth have the same chance to win.

Hierbei handelt es sich um ein wort- bzw. buchstabenkodifiziertes Problem, bei dem eine Alltagssituation aus dem Erfahrungsbereich der Schülerinnen und Schüler beschrieben wird. Die Problemrahmung entspricht dem „Problem Solving Framing“. Bei der vorliegenden Aufgabe wird nicht die Vorstellung von Wahrscheinlichkeit, sondern die Vorstellung von Zufall untersucht.

Von Fischbein und Schnarch (1997, S. 100) wurde diese Aufgabe zur Untersuchung der Fehlvorstellung der „Repräsentativität“ eingesetzt – hierzu wird angemerkt, dass, wie im Abschnitt 3.2.5 beschrieben, im Allgemeinen die Tendenz dazu besteht, die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses einzuschätzen, indem in Betracht gezogen wird, wie gut es Merkmale der Grundgesamtheit repräsentiert. Bei der vorliegenden Aufgabe geht aus der Veröffentlichung von Fischbein und Schnarch hervor (vgl. „Table 1“ in Fischbein & Schnarch, 1997, S. 98), dass die relative Häufigkeit der korrekten Antwort „Vered und Ruth haben die gleiche Chance zu gewinnen“ mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler zunimmt und die relative Häufigkeit der falschen Antwort „Ruth hat eine größere Chance zu gewinnen“, welche auf die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Repräsentativität* zurückgeführt werden kann, mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler abnimmt; bei der Gruppe der Studentinnen und Studenten ist im Vergleich zu den Gruppen an Schülerinnen und Schülern die relative Häufigkeit der korrekten Antwort am größten und die relative Häufigkeit der falschen Antwort „Ruth hat eine größere Chance zu gewinnen“ am geringsten. Von Fischbein und Schnarch wird diesbezüglich festgehalten, dass die Fehlvorstellung der „Repräsentativität“ mit zunehmendem Alter abnimmt.

Die erwartete Lösung ist dadurch charakterisiert, dass die beiden Zahlenfolgen im Sinne von konkreten Ergebnissen des Lotteriespiels als gleich wahrscheinlich einzuschätzen sind. Um die vorliegende Aufgabe richtig lösen zu können, ist das Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit erforderlich, hier die Ergebnisse der einzelnen Ziehungen einer Zahl betreffend. Dieses Wissen ist, wie bei der Studie von Green (1982) im Abschnitt 4.2.2 beschrieben, dem „higher order knowledge“ zuzuordnen, kann jedoch unter Umständen mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler, nach einer Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis der Schülerinnen und Schüler, im Sinne der Theorie des Conceptual Change, dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden. Bei der vorliegenden Aufgabe führt die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Gleichwahrscheinlichkeit* zur richtigen Lösung. Aufgrund des Erwerbs durch Instruktion stellt die zur Lösung erforderliche Intuition

eine Sekundärintuition dar. Das zur Lösung erforderliche Vorgehen kann der Phase der formalen Operationen, der Stufe III des probabilistischen Denkens, zugeordnet werden.

Die Zunahme der relativen Häufigkeit der korrekten Antwort „Vered und Ruth haben die gleiche Chance zu gewinnen“ mit zunehmender Klassenstufe kann darauf zurückzuführen sein, dass eine Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis der Schülerinnen und Schüler stattfindet: Das zur Lösung erforderliche Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit, welches anfänglich dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist, kann ab einem bestimmten Alter der Schülerinnen und Schüler, nach einer Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis, im Sinne der Theorie des Conceptual Change, dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden.

Diese Umstrukturierung kann auch eine Erklärung dafür darstellen, dass mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Repräsentativität*, mit der Fehlvorstellungen von Zufall, im Sinne einer kognitiven Verzerrung, einhergehen, wie die Vorstellung, dass das Ergebnis der Ziehung beim Lotteriespiel den zufälligen Charakter des Lotteriespiels widerspiegeln muss, zurückgeht.

Zu berücksichtigen ist bei der vorliegenden Aufgabe, dass richtige Lösungen eventuell auch auf die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Gleichwahrscheinlichkeit* zurückzuführen sind. Die Anwendung dieser Heuristik kann eine Erklärung für die bereits vergleichsweise große relative Häufigkeit der korrekten Antwort „Vered und Ruth haben die gleiche Chance zu gewinnen“ in den niedrigeren Klassenstufen darstellen.

Dass die Anwendung des zur Lösung erforderlichen Wissens zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit bei der vorliegenden Aufgabe nicht durch das Zielsystem beeinflusst wird, lässt sich damit erklären, dass die Problemrahmung bei der vorliegenden Aufgabe dem „Problem Solving Framing“ und nicht dem „Social Judgement Framing“, wie bei den beiden, was das zur Lösung erforderliche Wissen betrifft, entsprechenden Aufgaben der Studie von Green (1982), entspricht.

„Fischbein & Schnarch: Negative and Positive Recency Effects“. Die als zweite vorgestellte Aufgabe lautete übersetzt: „Beim Werfen einer Münze gibt es zwei mögliche Ergebnisse: entweder Kopf oder Zahl. Ronni warf eine Münze drei Mal und jedesmal war Kopf oben. Ronni beabsichtigt, die Münze nochmals zu werfen. Wie groß ist die Chance, Kopf das vierte Mal zu bekommen?“ Zur Auswahl standen folgende Antworten: „Kleiner als die Chance, Zahl zu bekommen“, „Gleich groß wie die Chance, Zahl zu bekommen“ und „Größer als die Chance, Zahl zu bekommen“.

Im Original:

> When tossing a coin, there are two possible outcomes: either heads or tails. Ronni flipped a coin three times and in all cases heads came up. Ronni intends to flip the coin again. What is the chance of getting heads the fourth time?
>
> Smaller than the chance of getting tails
> Equal to the chance of getting tails
> Greater than the chance of getting tails

Erwartete Antwort: Equal to the chance of getting tails

Es handelt sich also um ein wort- bzw. buchstabenkodifiziertes Problem, bei dem der Einsatz eines Zufallsgerätes in einer Alltagssituation beschrieben wird. Die Problemrahmung entspricht wiederum dem „Problem Solving Framing“. Bei der vorliegenden Aufgabe wird ebenfalls nicht die Vorstellung von Wahrscheinlichkeit, sondern die Vorstellung von Zufall untersucht.

Im Zentrum der Untersuchung standen bei dieser Aufgabe die beiden als „recency effects“ bezeichneten Fehlschlüsse, der „negative recency effect“ und der „positive recency effect“ – diesbezüglich wird von Fischbein und Schnarch (1997, S. 100) darauf hingewiesen, dass der als „negative recency effect“ oder „gambler’s fallacy“ bezeichnete Fehlschluss, wie in den Abschnitten 3.2.6 und 3.2.7 beschrieben, auf die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Repräsentativität* zurückgeführt werden kann: Intuitiv scheinen abwechselnde Ergebnisse eine zufällige Folge besser zu repräsentieren. Im Gegensatz dazu kann bei der vorliegenden Aufgabe die explizite oder implizite Annahme, dass die Bedingungen nicht fair waren, ein Grund dafür sein, dass es zu dem als „positive recency effect“ bezeichneten Fehlschluss kommt. Aus der Veröffentlichung von Fischbein und Schnarch ist ersichtlich (vgl. Fischbein & Schnarch, 1997, S. 98), dass die relative Häufigkeit der korrekten Antwort „Gleich groß wie die Chance, Zahl zu bekommen“ mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler zunimmt; die relative Häufigkeit der falschen Antwort „Kleiner als die Chance, Zahl zu bekommen“, welche mit der Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Repräsentativität* und den damit einhergehenden Fehlvorstellungen von Zufall, im Sinne einer kognitiven Verzerrung, die zu dem als „negative recency effect“ oder „gambler’s fallacy“ bezeichneten Fehlschluss führen, erklärt werden kann, nimmt dagegen mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler ab; auch bei dieser Aufgabe ist bei der Gruppe der Studentinnen und Studenten im Vergleich zu den Gruppen an Schülerinnen und Schülern die relative Häufigkeit der korrekten Antwort am größten und die relative Häufigkeit der falschen Antwort „Kleiner als die Chance, Zahl zu bekommen“ am geringsten. Fischbein und Schnarch (1997, S. 101) halten zu der vorliegenden Aufgabe fest, dass die Auswirkung des als „negative recency effect“ bezeichneten Fehlschlusses mit zunehmendem Alter geringer wird – zudem wird darauf hingewiesen, dass der als „positive recency effect“ bezeichnete Fehlschluss fast nicht vorhanden war.

Charakteristisch für die erwartete Lösung ist, dass die beiden Möglichkeiten für das Ergebnis des vierten Wurfes der Münze, „Kopf“ und „Zahl“, als gleich wahrscheinlich einzuschätzen sind. Um die vorliegende Aufgabe richtig lösen zu können, ist das Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit erforderlich, hier die Ergebnisse der einzelnen Würfe der Münze betreffend. Dieses Wissen ist, wie bei der vorangegangenen Aufgabe beschrieben, anfänglich dem „higher order knowledge“ zuzuordnen und kann mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler, nach einer Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis der Schülerinnen und Schüler, im Sinne der Theorie des Conceptual Change, dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden. Die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Gleichwahrscheinlichkeit* führt bei der vorliegenden Aufgabe zur richtigen Lösung. Aufgrund des Erwerbs durch Instruktion stellt die zur Lösung erforderliche Intuition eine Sekundärintuition dar. Das zur Lösung erforderliche Vorgehen kann der Phase der formalen Operationen, der Stufe III des probabilistischen Denkens, zugeordnet werden.

Dass die relative Häufigkeit der falschen Antwort „Kleiner als die Chance, Zahl zu bekommen“ mit zunehmender Klassenstufe abnimmt, kann darauf zurückzuführen sein, dass die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Repräsentativität*, mit der Fehlvorstellungen von Zufall, im Sinne einer kognitiven Verzerrung, einhergehen, mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler abnimmt. Eine Erklärung hierfür kann sein, dass das zur Lösung erforderliche Wissen ab einem bestimmten Alter der Schülerinnen und Schüler, nach einer Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis der Schülerinnen und Schüler, im Sinne der Theorie des Conceptual Change, nicht mehr dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist, sondern dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden kann.

Diese Umstrukturierung kann auch eine Erklärung für die Zunahme der relativen Häufigkeit der korrekten Antwort „Gleich groß wie die Chance, Zahl zu bekommen“ mit zunehmender Klassenstufe darstellen.

Da die falsche Antwort „Größer als die Chance, Zahl zu bekommen“ so gut wie nicht gegeben wurde, kann darauf geschlossen werden, dass die in der Problemstellung beschriebene Münze von nahezu allen Schülerinnen und Schülern intuitiv als fair angesehen wurde.

Auch bei dieser Aufgabe ist zu berücksichtigen, dass richtige Lösungen eventuell auf die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Gleichwahrscheinlichkeit* zurückzuführen sind. Die Anwendung dieser Heuristik kann dabei wiederum eine Erklärung für die bereits vergleichsweise große relative Häufigkeit der korrekten Antwort „Gleich groß wie die Chance, Zahl zu bekommen“ in den niedrigeren Klassenstufen darstellen.

Dass die Anwendung des zur Lösung erforderlichen Wissens zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit bei der vorliegenden Aufgabe nicht durch das Zielsystem beeinflusst wird, lässt sich, wie bei der vorangegangenen Aufgabe, damit erklären, dass die Problemrahmung dem „Problem Solving Framing“ entspricht.

„Fischbein & Schnarch: Compound and Simple Events“. Die als dritte vorgestellte Aufgabe lautete übersetzt: „Angenommen, man würfelt mit zwei Spielwürfeln gleichzeitig. Welches der folgenden Ereignisse hat eine größere Chance vorzukommen?“ Folgende Antworten standen zur Auswahl: „Das Paar 5-6 zu bekommen“, „Das Paar 6-6 zu bekommen“ und „Beide haben die gleiche Chance“.

Im Original:

> Suppose one rolls two dice simultaneously. Which of the following has a greater chance of happening?
> Getting the pair 5-6
> Getting the pair 6-6
> Both have the same chance.

Erwartete Antwort: Getting the pair 5-6

Bei der vorliegenden Aufgabe handelt es sich um ein wort- bzw. buchstabenkodifiziertes Problem, bei dem der Einsatz eines Zufallsgerätes beschrieben wird. Die Rahmung des Problems entspricht dem „Problem Solving Framing“. Die Wahrscheinlichkeit ist in nicht-numerischer Form repräsentiert.

Von Fischbein und Schnarch (1997, S. 100) wurde die vorliegende Aufgabe zur Untersuchung des Verständnisses von einfachen und zusammengesetzten Ereignissen eingesetzt – diesbezüglich wird darauf hingewiesen, dass beim gleichzeitigen Würfeln mit zwei Spielwürfeln allgemein die Tendenz dazu besteht, zu sagen, dass zwei Sechsen zu erhalten gleich wahrscheinlich ist wie eine Fünf und eine Sechs zu erhalten. Aus der Veröffentlichung von Fischbein und Schnarch geht hervor (vgl. Fischbein & Schnarch, 1997, S. 98), dass die relative Häufigkeit der korrekten Antwort „Das Paar 5-6 zu bekommen“ in allen Klassenstufen nicht größer als 25% und in der Gruppe der Studentinnen und Studenten im Vergleich zu den Gruppen an Schülerinnen und Schülern am geringsten ist; die relative Häufigkeit der falschen Antwort „Beide haben die gleiche Chance“, welche auf ein falsches Verständnis von einfachen und zusammengesetzten Ereignissen zurückgeführt werden kann, ist dagegen in allen Klassenstufen größer als 70% und in der Gruppe der Studentinnen und Studenten im Vergleich zu den Gruppen an Schülerinnen und Schülern am größten. Fischbein und Schnarch (1997, S. 101) stellen daher fest, dass die zugrunde liegende Fehlvorstellung häufig und stabil ist, durch alle Altersgruppen hindurch.

Es handelt sich hierbei um die einzige stabile Fehlvorstellung, die in der vorliegenden Studie erkannt werden konnte.

Bei der erwarteten Lösung wird die Wahrscheinlichkeit als Laplace-Wahrscheinlichkeit interpretiert. Im Vordergrund steht die Anwendung des Wissens zur Multiplikationsregel und zur Additionsregel von Wahrscheinlichkeiten, welches dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist. Dieses Wissen steht bei der vorliegenden Aufgabe im engen Zusammenhang mit dem Wissen zu Grundraum (es gibt bei jedem der Würfel 6 mögliche Ergebnisse) und Symmetrie (die 6 möglichen Ergebnisse sind als gleich wahrscheinlich einzustufen), dem Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit, welches, wie beschrieben, anfänglich dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist und mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler, nach einer Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis der Schülerinnen und Schüler, im Sinne der Theorie des Conceptual Change, dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden kann. Zur richtigen Lösung führt die Anwendung der Heuristik des Baumdiagramms, welche, wie bei der Studie von Green (1982) im Abschnitt 4.2.2 beschrieben, den „higher order heuristics“ zuzuordnen ist. Die zur Lösung erforderliche Intuition stellt aufgrund des Erwerbs durch Instruktion eine Sekundärintuition dar. Das zur Lösung erforderliche Vorgehen ist im Allgemeinen der Phase der formalen Operationen, der Stufe III des probabilistischen Denkens, zuzuordnen, kann aber, nach der entsprechenden Instruktion, auch dem Ende der Phase der konkreten Operationen, der Stufe IIB des probabilistischen Denkens, zugeordnet werden.

Die in allen Klassenstufen nahezu konstant große relative Häufigkeit der falschen Antwort „Beide haben die gleiche Chance“ kann insbesondere in den niedrigeren Klassenstufen auf die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Gleichwahrscheinlichkeit* und in den höheren Klassenstufen auf die nicht korrekte Anwendung des Wissens zum Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit, welches, nach einer Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis der Schülerinnen und Schüler, im Sinne der Theorie des Conceptual Change, nicht mehr dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist, sondern dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden kann, zurückzuführen sein: Die beiden zur Auswahl stehenden Wurfkombinationen werden als gleich wahrscheinlich angesehen; die Anzahl der Möglichkeiten für jede der beiden Wurfkombinationen wird dabei nicht berücksichtigt.

Dass die Anzahl der Möglichkeiten für jede der beiden Wurfkombinationen nicht berücksichtigt wird, kann zum einen damit erklärt werden, dass die Heuristik des Baumdiagramms nicht angewendet wird, und zum anderen damit, dass das Wissen zur Multiplikationsregel und zur Additionsregel von Wahrscheinlichkeiten dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist. Dass die Heuristik des Baumdiagramms nicht angewendet wird, lässt sich darauf zurückführen, dass diese Heuristik den „higher order heuristics“ zuzuordnen ist.

Bei der vorliegenden Aufgabe ist zudem der Einfluss der linguistischen Interpretation des Aufgabentextes zu berücksichtigen. So wird die Anzahl der Möglichkeiten für jede der beiden Wurfkombinationen eventuell außer Acht gelassen, da bei der vorgegebenen, als richtig eingestuften Antwort ein spezielles Paar, das „Paar 5-6“, aufgeführt ist.

Darüber hinaus ist bei der vorliegenden Aufgabe nicht auszuschließen, dass in Übereinstimmung mit dem „Outcome Approach“ die falsche Antwort „Beide haben die gleiche Chance“ gegeben wird, weil die Wahrscheinlichkeit für jedes der beiden zur Auswahl stehenden Paare als sehr gering angesehen wird, und nicht, weil die beiden Wahrscheinlichkeiten tatsächlich als gleich groß eingeschätzt werden.

„***Fischbein & Schnarch: The Conjunction Fallacy*“.** Die als vierte vorgestellte Aufgabe lautete übersetzt: „Dan träumt davon, Arzt zu werden. Er hilft Menschen gerne. Als er in der High-School war, hat er sich freiwillig beim Roten Kreuz gemeldet. Er hat die Schule mit Auszeichnung geschafft und diente in der Armee als Krankenpfleger. Nach Beendigung seines Armeedienstes schrieb Dan sich an der Universität ein. Was erscheint dir als wahrscheinlicher?“ Zur Auswahl standen als Antwort: „Dan ist ein Student an der medizinischen Hochschule“ und „Dan ist ein Student“.

Im Original:

Dan dreams of becoming a doctor. He likes to help people. When he was in high school, he volunteered for the Red Cross organization. He accomplished his studies with high performance and served in the army as a medical attendant. After ending his army service, Dan registered at the university. Which seems to you to be more likely?

Dan is a student of the medical school.
Dan is a student.

Erwartete Antwort: Dan is a student.

Es handelt sich hierbei um ein wort- bzw. buchstabenkodifiziertes Problem, bei dem eine Alltagssituation beschrieben wird. Die Problemrahmung entspricht dem „Social Judgement Framing“. Die Wahrscheinlichkeit ist in nicht-numerischer Form repräsentiert.

Die vorliegende Aufgabe wurde von Fischbein und Schnarch (1997, S. 100) eingesetzt, um den als „conjunction fallacy“ bezeichneten Fehlschluss zu untersuchen – angemerkt wird, dass hierbei, wie im Abschnitt 3.2.7 beschrieben, die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses unter bestimmten Bedingungen größer zu sein scheint als die Wahrscheinlichkeit der Schnittmenge desselben Ereignisses mit einem anderen. Fischbein und Schnarch (1997) verweisen diesbezüglich unter anderem auf Tversky und Kahneman (1983). Die relative Häufigkeit der korrekten Antwort „Dan ist ein Student“ ist, wie aus der Veröffentlichung von Fischbein und Schnarch hervorgeht (vgl. Fischbein & Schnarch, 1997, S. 98), in den Klassenstufen 5 bis 9 nicht größer als 30% und damit geringer als die relative Häufigkeit der falschen Antwort „Dan ist ein Student an der medizinischen Hochschule“, welche mit dem als „conjunction fallacy“ bezeichneten Fehlschluss, der sich auf die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Repräsentativität* zurückführen lässt, erklärt werden kann; in der Klassenstufe 11 und in der Gruppe der Studentinnen und Studenten ist die relative Häufigkeit der korrekten Antwort „Dan ist ein Student“ dagegen größer als 55% und somit größer als die relative Häufigkeit der falschen Antwort „Dan ist ein Student an der medizinischen Hochschule“. Von Fischbein und Schnarch (1997, S. 101) wird daher festgestellt, dass die zugrunde liegende Fehlvorstellung bis zur Klassenstufe 9 sehr ausgeprägt ist, im Bereich der High-School und des College jedoch nur noch etwa halb so stark und damit weniger ausgeprägt.

Bei der erwarteten Lösung wird die Wahrscheinlichkeit als frequentistische Wahrscheinlichkeit interpretiert. Zur Lösung ist das Wissen erforderlich, dass die Wahrscheinlichkeit eines konjunktiven Ereignisses nie größer als die Wahrscheinlichkeit der einzelnen elementaren Ereignisse sein kann. Dieses Wissen ist dem „higher order knowledge“ zuzuordnen. Bei der Berücksichtigung eines korrekten Stichwortes führt die Anwendung der „simple everyday heuristic“ des *Take The Best* zur richtigen Lösung. Aufgrund des Erwerbs durch Instruktion stellt die zur Lösung erforderliche Intuition eine Sekundärintuition dar. Das zur Lösung erforderliche Vorgehen kann, in Anlehnung an die Ergebnisse von Inhelder und Piaget (1964), der Phase der konkreten Operationen, der Stufe IIA des probabilistischen Denkens, zugeordnet werden.

Ob das Wissen, dass die Wahrscheinlichkeit eines konjunktiven Ereignisses nie größer als die Wahrscheinlichkeit der einzelnen elementaren Ereignisse sein kann, bei der vorliegenden Aufgabe zur Lösung angewendet wird, hängt unter anderem davon ab, ob Zusatzannahmen eingeführt werden; dies wird jedoch durch das Vorliegen des „Social Judgement Framing“, einhergehend mit dem interpretierbaren Eindruck der Informationen und der Formulierung „Was erscheint *dir* als wahrscheinlicher?“, begünstigt.

Die geringe relative Häufigkeit der richtigen Antwort „Dan ist ein Student“ in den niedrigeren Klassenstufen lässt sich darauf zurückführen, dass das zur Lösung erforderliche Wissen, dass die Wahrscheinlichkeit eines konjunktiven Ereignisses nie größer als die Wahrscheinlichkeit der einzelnen elementaren Ereignisse sein kann, dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist.

Die größere relative Häufigkeit der richtigen Antwort „Dan ist ein Student“ ab einer bestimmten Klassenstufe kann auf eine Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis der Schülerinnen und Schüler, im Sinne der Theorie des Conceptual Change, zurückzuführen sein, sodass das zur Lösung erforderliche Wissen ab einem bestimmten Alter der Schülerinnen und Schüler nicht mehr dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist, sondern dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden kann.

Die große relative Häufigkeit der falschen Antwort „Dan ist ein Student an der medizinischen Hochschule“ in den niedrigeren Klassenstufen lässt sich mit der Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Repräsentativität*, welche, wie im Abschnitt 3.2.7 beschrieben, aufgrund der Inkonsistenz zwischen der Logik der Wahrscheinlichkeit und der Logik der Repräsentativität zu dem als „conjunction fallacy“ bezeichneten Fehlschluss führt, erklären. Dass die Heuristik der *Repräsentativität* angewendet wird, kann darauf zurückzuführen sein, dass, wie beschrieben, das zur Lösung erforderliche Wissen, dass die Wahrscheinlichkeit eines konjunktiven Ereignisses nie größer als die Wahrscheinlichkeit der einzelnen elementaren Ereignisse sein kann, bei den Schülerinnen und Schülern in den niedrigeren Klassenstufen dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist.

***„Fischbein & Schnarch: Effect of Sample Size“*.** Die als fünfte vorgestellte Aufgabe lautete übersetzt: „In einer bestimmten Stadt gibt es zwei Krankenhäuser, ein kleines, in welchem es durchschnittlich etwa 15 Geburten pro Tag gibt, und ein großes, in welchem es durchschnittlich etwa 45 Geburten pro Tag gibt. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Junge geboren wird, ist etwa 50%. (Trotzdem gab es Tage, an denen mehr als 50% der Babys Jungen waren, und es gab Tage, an denen weniger als 50% der Babys Jungen waren.) Im kleinen Krankenhaus wurden das Jahr über Aufzeichnungen über die Tage geführt, an denen die Gesamtzahl der geborenen Jungen größer als 9 war, was insgesamt mehr als 60% der Geburten im kleinen Krankenhaus darstellt. Im großen Krankenhaus haben sie das Jahr über Aufzeichnungen über die Tage geführt, an denen mehr als 27 Jungen geboren wurden, was mehr als 60% der Geburten darstellt.“ Gefragt war: „In welchem der beiden Krankenhäuser gab es mehr solcher Tage?“ Folgende Antwortmöglichkeiten standen zur Auswahl: „Im großen Krankenhaus wurden mehr Tage aufgezeichnet, an denen mehr als 60% Jungen geboren wurden“, „Im kleinen Krankenhaus wurden mehr Tage aufgezeichnet, an denen mehr als 60% Jungen geboren wurden“ und „Die Anzahl der Tage, an denen mehr als 60% Jungen geboren wurden, war in beiden Krankenhäusern gleich“.

Im Original:

> In a certain town there are two hospitals, a small one in which there are, on the average, about 15 births a day and a big one in which there are, on the average, about 45 births a day. The likelihood of giving birth to a boy is about 50%. (Nevertheless, there were days on which more than 50% of the babies born were boys, and there were days on which fewer than 50% of the babies born were boys.) In the small hospital a record has been kept during the year of the days in which the total number of boys born was greater than 9, which represents more than 60% of the total births in the small hospital. In the big hospital, they have kept a record during the year of the days in which there were more than 27 boys born, which represents more than 60% of the births. In which of the two hospitals were there more such days?

In the big hospital there were more days recorded where more than 60% boys were born.
In the small hospital there were more days recorded where more than 60% boys were born.
The number of days for which more than 60% boys were born was equal in the two hospitals.

Erwartete Antwort: In the small hospital there were more days recorded where more than 60% boys were born.

Bei dieser Aufgabe handelt es sich ebenfalls um ein wort- bzw. buchstabenkodifiziertes Problem, bei dem eine Alltagssituation beschrieben wird. Die Rahmung des Problems entspricht dem „Social Judgement Framing“. Die Wahrscheinlichkeit ist in Form von Prozenten repräsentiert.

Anhand der vorliegenden Aufgabe, welche mit der nachfolgenden Aufgabe, „The Effect of Sample Size“, einhergeht, sollte der Effekt der Stichprobengröße untersucht werden. Von Fischbein und Schnarch (1997, S. 100) wird angemerkt, dass die Tendenz dazu besteht, den Einfluss des Ausmaßes einer Stichprobe bei der Einschätzung von Wahrscheinlichkeiten zu vernachlässigen. Fischbein und Schnarch (1997) verweisen diesbezüglich auf Tversky und Kahneman (1982b). Aus der Veröffentlichung von Fischbein und Schnarch geht hervor (vgl. Fischbein & Schnarch, 1997, S. 99), dass durch alle Klassenstufen hindurch nur ein einziges Mal, in Klassenstufe 9, die korrekte Antwort „Im kleinen Krankenhaus wurden mehr Tage aufgezeichnet, an denen mehr als 60% Jungen geboren wurden“ gegeben wurde; mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler verringert sich die relative Häufigkeit von „keine Antwort gegeben“, von 60% in Klassenstufe 5 über 30% in Klassenstufe 7 und 15% in Klassenstufe 9 auf 0% in Klassenstufe 11, wohingegen sich die relative Häufigkeit der falschen Antwort „Die Anzahl der Tage, an denen mehr als 60% Jungen geboren wurden, war in beiden Krankenhäusern gleich“ mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler von 10% in Klassenstufe 5 über 30% in Klassenstufe 7 und 70% in Klassenstufe 9 auf 80% in Klassenstufe 11 vergrößert; in der Gruppe der Studentinnen und Studenten beträgt die relative Häufigkeit der falschen Antwort „Die Anzahl der Tage, an denen mehr als 60% Jungen geboren wurden, war in beiden Krankenhäusern gleich“ sogar fast 90%. Fischbein und Schnarch (1997, S. 101) stellen daher bezüglich der Insensibilität gegenüber der Stichprobengröße, welche mit der Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Repräsentativität* einhergeht, fest, dass sich diese Fehlvorstellung in einer überraschend gleichmäßigen Art und Weise mit zunehmendem Alter *entwickelte*.

Für Fischbein und Schnarch (1997) basiert die grundsätzliche Überzeugung, die in dieser Fehlvorstellung zum Ausdruck kommt, auf der Vorstellung, dass ein Verhältnis für eine unbestimmte Anzahl an Paaren von Zahlen repräsentativ ist; eine Überzeugung, die so stark ist, dass sie eine subtilere Vorstellung verbirgt: Indem die betrachtete Stichprobe größer wird, tendiert die Wahrscheinlichkeit, ein bestimmtes empirisches Ergebnis zu bekommen, dazu, die theoretische Vorhersage besser zu approximieren. Diesbezüglich ist anzunehmen, dass die intuitive Interpretation durch einen bestimmten logischen Standpunkt, welcher als ein Ergebnis der Instruktion und intellektuellen Entwicklung mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler verstärkt eingenommen wird, beeinflusst wird (Fischbein & Schnarch, 1997, S. 101 f.). Der Einfluss dieses logischen Standpunktes kann zum einen förderlich sein, wenn er adäquat ist, wie zum Beispiel zur Vermeidung des als „negative recency effect“ bezeichneten Fehlschlusses, zum anderen aber auch destruktiv, wie bei der vorliegenden Problemstellung.

Die Wahrscheinlichkeit wird bei der erwarteten Lösung als frequentistische Wahrscheinlichkeit interpretiert. Im Vordergrund steht die Anwendung des Wissens zur Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen, welches dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist. Bei der Berücksichtigung eines korrekten Stichwortes führt die Anwendung der „simple everyday heuristic“ des *Take The Best* zur erwarteten Lösung. Die zur Lösung erforderliche Intuition stellt aufgrund des Erwerbs durch Instruktion eine Sekundärintuition dar. Das zur Lösung erforderliche Vorgehen kann der Phase der formalen Operationen, der Stufe III des probabilistischen Denkens, zugeordnet werden.

Mit dem vergleichsweise umfangreichen Aufgabentext und der Vielzahl an Angaben, in denen die Wahrscheinlichkeit in Form von Prozenten repräsentiert ist, kann die in den niedrigeren Klassenstufen große relative Häufigkeit von „keine Antwort gegeben“ erklärt werden. Die Abnahme der relativen Häufigkeit von „keine Antwort gegeben“ mit zunehmender Klassenstufe lässt sich auf den Zuwachs an allgemeinen mathematischen Kompetenzen, insbesondere im Bereich des Kommunizierens, welcher im Allgemeinen mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler einhergeht, zurückführen.

Die Zunahme der relativen Häufigkeit der falschen Antwort „Die Anzahl der Tage, an denen mehr als 60% Jungen geboren wurden, war in beiden Krankenhäusern gleich“ mit zunehmender Klassenstufe kann, wie von Fischbein und Schnarch (1997) beschrieben, damit erklärt werden, dass mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler vermehrt die „simple everyday heuristic“ der *Repräsentativität*, mit der die Insensibilität gegenüber der Stichprobengröße, im Sinne einer kognitiven Verzerrung, einhergeht, angewendet wird. Die Anwendung dieser Heuristik lässt sich darauf zurückführen, dass zum einen das zur Lösung erforderliche Wissen zur Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist und zum anderen das Wissen zum Prinzip der Verhältnisgleichheit, welches mit der Kenntnis des Begriffs des Verhältnisses, der Proportion, einhergeht und anfänglich dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist, ab einem bestimmten Alter der Schülerinnen und Schüler, wie bei der Studie von Green (1982) im Abschnitt 4.2.2 beschrieben, nach einer Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis der Schülerinnen und Schüler, im Sinne der Theorie des Conceptual Change, dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden kann, sodass sich dieses Wissen als relevant zur Lösung bei der vorliegenden Aufgabe anbietet. Dass das Wissen zur Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen nicht zur Lösung angewendet wird, wird unter Umständen durch das Format der Darstellung der Informationen begünstigt, so wie im Abschnitt 3.4.1 beschrieben.

„***Fischbein & Schnarch: The Effect of Sample Size“.*** Die als sechste vorgestellte Aufgabe lautete übersetzt kurz und knapp: „Die Wahrscheinlichkeit, Kopf mindestens zweimal zu bekommen beim Wurf dreier Münzen ist: kleiner als, gleich groß wie, größer als die Wahrscheinlichkeit, Kopf mindestens 200 von 300 Mal zu bekommen.“

Im Original:

The likelihood of getting heads at least twice when tossing three coins is:
Smaller than
Equal to
Greater than
the likelihood of getting heads at least 200 times out of 300 times.

Erwartete Antwort: Greater than

Es handelt sich bei der vorliegenden Aufgabe, die, wie erwähnt, mit der vorangegangenen Aufgabe, „Effect of Sample Size“, einhergeht, um ein wort- bzw. buchstabenkodifiziertes

Problem, bei dem der Einsatz eines Zufallsgerätes beschrieben wird. Die Problemrahmung entspricht dem „Problem Solving Framing“. Die Wahrscheinlichkeit ist in nicht-numerischer Form repräsentiert.

Mit der vorliegenden Aufgabe sollte ebenfalls der Effekt der Stichprobengröße untersucht werden. Aus der Veröffentlichung von Fischbein und Schnarch ist ersichtlich (vgl. Fischbein & Schnarch, 1997, S. 99), dass die relative Häufigkeit der korrekten Antwort „größer als“ mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler abnimmt, von 35% in Klassenstufe 5 über 30% in Klassenstufe 7 und 10% in Klassenstufe 9 auf 5% in Klassenstufe 11, wohingegen die relative Häufigkeit der falschen Antwort „gleich groß wie“, welche auf die Nichtberücksichtigung des Einflusses der Stichprobengröße zurückgeführt werden kann, mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler von 30% in Klassenstufe 5 über 45% in Klassenstufe 7 und 60% in Klassenstufe 9 auf 75% in Klassenstufe 11 zunimmt; im Gegensatz dazu beträgt die relative Häufigkeit der falschen Antwort „gleich groß wie“ in der Gruppe der Studentinnen und Studenten nur 44%, die relative Häufigkeit der korrekten Antwort „größer als“ hingegen 50%. Fischbein und Schnarch (1997, S. 101) halten bezüglich der vorliegenden Aufgabe fest, dass die Häufigkeit der hauptsächlichen Fehlvorstellung wiederum mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler zunahm, abgesehen von der Gruppe der Studentinnen und Studenten.

Auch bei dieser Aufgabe wird die Wahrscheinlichkeit bei der erwarteten Lösung als frequentistische Wahrscheinlichkeit interpretiert. Im Vordergrund steht ebenfalls die Anwendung des Wissens zur Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen, welches, wie bei der vorangegangenen Aufgabe beschrieben, dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist. Die Anwendung der „simple everyday heuristic“ des *Take The Best* führt, bei der Berücksichtigung eines korrekten Stichwortes, wiederum zur richtigen Lösung. Aufgrund des Erwerbs durch Instruktion stellt die zur Lösung erforderliche Intuition eine Sekundärintuition dar. Das zur Lösung erforderliche Vorgehen kann der Phase der formalen Operationen, der Stufe III des probabilistischen Denkens, zugeordnet werden.

Ebenso wie bei der vorangegangenen Aufgabe, so kann auch bei der vorliegenden Aufgabe die Zunahme der relativen Häufigkeit der falschen Antwort „gleich groß wie“ mit zunehmender Klassenstufe damit erklärt werden, dass mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler vermehrt die „simple everyday heuristic“ der *Repräsentativität*, mit der die Insensibilität gegenüber der Stichprobengröße, im Sinne einer kognitiven Verzerrung, einhergeht, angewendet wird. Die Anwendung der Heuristik der *Repräsentativität* lässt sich, wie bei der vorangegangenen Aufgabe, darauf zurückführen, dass zum einen das zur Lösung erforderliche Wissen zur Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist und zum anderen das Wissen zum Prinzip der Verhältnisgleichheit, welches anfänglich dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist, ab einem bestimmten Alter der Schülerinnen und Schüler, nach einer Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis der Schülerinnen und Schüler, im Sinne der Theorie des Conceptual Change, dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden kann, sodass sich dieses Wissen als relevant zur Lösung bei der vorliegenden Aufgabe anbietet. Dass das Wissen zum Prinzip der Verhältnisgleichheit ab einem bestimmten Alter der Schülerinnen und Schüler vermehrt angewendet wird, weil dieses Wissen in Form des „direct accessible knowledge“ vorliegt, kann auch eine Erklärung für die Abnahme der relativen Häufigkeit der korrekten Antwort „größer als“ mit zunehmender Klassenstufe darstellen.

***„Fischbein & Schnarch: The Heuristic of Availability“*.** Die als siebte vorgestellte Aufgabe lautete übersetzt: „Beim Auswählen zwischen 10 Kandidaten für ein Komitee aus 2 Mitgliedern ist die Anzahl der Möglichkeiten kleiner als, gleich groß wie, größer als die Anzahl der Möglichkeiten beim Auswählen zwischen 10 Kandidaten für ein Komitee aus 8 Mitgliedern.“

Im Original:

When choosing a committee composed of 2 members from among 10 candidates the number of possibilities is

Smaller than
Equal to
Greater than

the number of possibilities when choosing a committee of 8 members from among 10 candidates.

Erwartete Antwort: Equal to

Bei dieser Aufgabe handelt es sich um ein wort- bzw. buchstabenkodifiziertes Problem, bei dem eine Alltagssituation beschrieben wird. Die Rahmung des Problems entspricht dem „Problem Solving Framing“. Bei der vorliegenden Aufgabe wird nicht die Vorstellung von Wahrscheinlichkeit, sondern die Vorstellung von Häufigkeit untersucht.

Von Fischbein und Schnarch (1997, S. 100) wurde diese Aufgabe zur Untersuchung der Fehlvorstellung der „Verfügbarkeit“ eingesetzt – hierzu wird angemerkt, dass die Wahrscheinlichkeit oder die Häufigkeit oftmals, wie im Abschnitt 3.2.6 beschrieben, anhand der Leichtigkeit, mit der Beispiele ins Gedächtnis gerufen werden können, eingeschätzt wird. Wie aus der Veröffentlichung von Fischbein und Schnarch hervorgeht (vgl. Fischbein & Schnarch, 1997, S. 99), ist die relative Häufigkeit der korrekten Antwort „gleich groß wie“ mit zunehmender Klassenstufe geringfügig zunehmend, durch alle Klassenstufen hindurch sowie in der Gruppe der Studentinnen und Studenten jedoch nicht größer als 15%; die relative Häufigkeit der falschen Antwort „größer als“, welche mit der Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Verfügbarkeit* und der damit einhergehenden Illusion der Vorstellbarkeit erklärt werden kann, nimmt dagegen mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler zu, von 10% in Klassenstufe 5 über 20% in Klassenstufe 7 und 65% in Klassenstufe 9 auf 85% in Klassenstufe 11; in der Gruppe der Studentinnen und Studenten beträgt die relative Häufigkeit der falschen Antwort „größer als“ mehr als 70%; die relative Häufigkeit von „keine Antwort gegeben“ nimmt im Gegensatz dazu mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler ab, von 55% in Klassenstufe 5 über 40% in Klassenstufe 7 und 5% in Klassenstufe 9 auf 0%. Fischbein und Schnarch (1997, S. 102) halten bezüglich der vorliegenden Aufgabe fest, dass wiederum die Häufigkeit der Fehlvorstellung mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler zunahm – die einzige Erklärung, die hierfür gegeben werden kann, ist, dass die Schülerinnen und Schüler mit zunehmendem Alter besser dazu in der Lage sind, mögliche Kombinationen zu identifizieren. Da es aufgrund der „Verfügbarkeit“ einfacher ist, unterschiedliche Kombinationen aus zwei Elementen als aus acht Elementen zu bilden, wird *zwei Elemente* als Antwort ausgewählt – dass die gebildeten Komitees jeweils komplementär sind und sich demzufolge die gleiche Anzahl ergibt, wird nicht intuitiv begriffen (Fischbein & Schnarch, 1997, S. 102).

Charakteristisch für die erwartete Lösung ist, dass sie die Erkenntnis repräsentiert, dass bei der Bildung eines Komitees aus 2 Mitgliedern von den verbleibenden, nicht ausgewählten 8 Kandidaten automatisch ein Komitee aus 8 Mitgliedern gebildet wird, und umgekehrt. Im Vordergrund steht daher die Anwendung des Wissens zur Komplementarität von Mengen. Dieses Wissen ist dem „higher order knowledge“ zuzuordnen. Die zur korrekten Lösung führenden Verfahren sind den „higher order heuristics“ zuzuordnen. Aufgrund des Erwerbs durch Instruktion stellt die zur Lösung erforderliche Intuition eine Sekundärintuition dar. Das zur Lösung erforderliche Vorgehen kann der Phase der formalen Operationen, der Stufe III des probabilistischen Denkens, zugeordnet werden.

Die Abnahme der relativen Häufigkeit von „keine Antwort gegeben“ mit zunehmender Klassenstufe lässt sich auf den von Fischbein und Schnarch (1997) angeführten Zuwachs an allgemeinen mathematischen Kompetenzen, insbesondere im Bereich des mathematischen Problemlösens, welcher im Allgemeinen mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler einhergeht, zurückführen: So fällt es den Schülerinnen und Schülern mit zunehmendem Alter leichter, einzelne mögliche Kombinationen für die Zusammensetzung von Komitees aus 2 Mitgliedern beziehungsweise aus 8 Mitgliedern zu erkennen, beispielsweise, dass aus den 10 Kandidaten, getrennt betrachtet, zugleich fünf verschiedene Komitees aus 2 Mitgliedern gebildet werden können, aber nur ein Komitee aus 8 Mitgliedern gebildet werden kann.

Die Zunahme der relativen Häufigkeit der falschen Antwort „größer als“ mit zunehmender Klassenstufe kann mit der Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Verfügbarkeit*, mit der die Illusion der Vorstellbarkeit, im Sinne einer kognitiven Verzerrung, einhergeht, erklärt werden. Dass die Heuristik der *Verfügbarkeit* angewendet wird, lässt sich darauf zurückführen, dass das zur Lösung erforderliche Wissen zur Komplementarität von Mengen dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist.

Die geringfügige Zunahme der relativen Häufigkeit der korrekten Antwort „gleich groß wie“ mit zunehmender Klassenstufe lässt sich ebenfalls auf den beschriebenen Zuwachs an allgemeinen mathematischen Kompetenzen mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler zurückführen.

„Fischbein & Schnarch: The Effect of the Time Axis (The Falk Phenomenon)“. Die als achte vorgestellte Aufgabe lautete übersetzt: „Yoav und Galit erhalten jeder eine Schachtel, die zwei weiße Murmeln und zwei schwarze Murmeln enthält.“ Die erste Frage dazu lautete: „(A.) Yoav nimmt eine Murmel aus seiner Schachtel heraus und stellt fest, dass es eine weiße ist. Ohne die erste Murmel zurückzulegen, nimmt er eine zweite Murmel heraus. Ist die Möglichkeit, dass diese zweite Murmel auch weiß ist, kleiner als, gleich groß wie, oder größer als die Möglichkeit, dass es eine schwarze Murmel ist?“ Die zweite Frage dazu lautete: „(B.) Galit nimmt eine Murmel aus ihrer Schachtel heraus und legt sie beiseite, ohne sie anzuschauen. Sie nimmt dann eine zweite Murmel heraus und sieht, dass es eine weiße ist. Ist die Möglichkeit, dass die erste Murmel, die sie herausgenommen hat, weiß ist, kleiner als, gleich groß wie, oder größer als die Möglichkeit, dass sie schwarz ist?“

Im Original:

> Yoav and Galit each receive a box containing two white marbles and two black marbles.
>
> (A.) Yoav extracts a marble from his box and finds out that it is a white one. Without replacing the first marble, he extracts a second marble. Is the likelihood that this second marble is also white smaller than, equal to, or greater than the likelihood that it is a black marble?
>
> (B.) Galit extracts a marble from her box and puts it aside without looking at it. She then extracts a second marble and sees that it is white. Is the likelihood that the first marble she extracted is white smaller than, equal to, or greater than the likelihood that it is black?

Erwartete Antwort: (A.) smaller than
(B.) smaller than

Hierbei handelt es sich um ein wort- bzw. buchstabenkodifiziertes Problem, bei dem der Einsatz eines Zufallsgerätes in einer Alltagssituation beschrieben wird. Die Rahmung des Problems entspricht dem „Problem Solving Framing“. Die Wahrscheinlichkeit ist in nichtnumerischer Form repräsentiert.

Die vorliegende Aufgabe diente zur Untersuchung des als „time-axis fallacy“ oder „the Falk phenomenon“ bezeichneten Fehlschlusses – bei der Formulierung der Problemstellung wurde von Fischbein und Schnarch (1997, S. 102) bewusst der Begriff „probability“, übersetzt „Wahrscheinlichkeit“, vermieden und stattdessen der Begriff „likelihood“ verwendet, welcher mit „Möglichkeit“ übersetzt werden kann. Bezüglich der vorliegenden Aufgabe wird darauf hingewiesen, dass es wahrscheinlich ist, dass die als „(A.)“ bezeichnete Frage korrekt beantwortet wird, die als „(B.)“ bezeichnete Frage hingegen nicht, da auf der Grundlage des Prinzips, dass ein Ereignis nicht rückwirkend auf seine Ursache einwirken kann, geschlossen wird. Gemäß Fischbein und Schnarch (1997, S. 100) widerspricht es einer unserer elementaren Intuitionen, die Zeitachse, und damit das Ursache-Wirkung-Prinzip, zu invertieren. Diesbezüglich wird von Fischbein und Schnarch (1997) unter anderem auf Falk (1979) verwiesen.

Bei der vorliegenden Aufgabe wurden die Antworten auf die Fragen „(A.)“ und „(B.)“ von Fischbein und Schnarch (1997) in drei Kategorien unterteilt:

- Kategorie 1, welche der korrekten Beantwortung beider Fragen entspricht,
- Kategorie 2, welche der korrekten Beantwortung der Frage „(A.)“ und der falschen Beantwortung der Frage „(B.)“ entspricht, und
- Kategorie 3, welche der falschen Beantwortung beider Fragen entspricht.

Hierbei kennzeichnet die Kategorie 2 das Vorliegen der hauptsächlichen Fehlvorstellung (Fischbein & Schnarch, 1997, S. 102). Die relative Häufigkeit der Kategorie 1 beträgt, wie aus der Veröffentlichung von Fischbein und Schnarch ersichtlich ist (vgl. Fischbein & Schnarch, 1997, S. 100), 45% in Klassenstufe 5, 50% in Klassenstufe 7, 35% in Klassenstufe 9 und 30% in Klassenstufe 11; in der Gruppe der Studentinnen und Studenten beträgt die relative Häufigkeit der Kategorie 1 knapp 40%; im Gegensatz dazu nimmt die relative Häufigkeit der Kategorie 2 von 5% in Klassenstufe 5 über 30% in Klassenstufe 7 und 35% in Klassenstufe 9 auf 70% in Klassenstufe 11 zu; in der Gruppe der Studentinnen und Studenten beträgt die relative Häufigkeit der Kategorie 2 knapp 45%; die relative Häufigkeit der Kategorie 3 nimmt von 25% in Klassenstufe 5 über 15% in Klassenstufe 7 und 25% in Klassenstufe 9 auf 0% ab. Von Fischbein und Schnarch (1997, S. 102) wird angemerkt, dass diese Problemstellung ein weiteres Beispiel für eine auf Intuitionen basierende Fehlvorstellung darstellt, bei der die Häufigkeit mit zunehmendem Alter zunimmt – außer im Fall der Studentinnen und Studenten.

Als mögliche Erklärung wird angeführt, dass zum einen das allgemeine Prinzip der Kausalität, mit seiner offensichtlichen einseitigen Ausrichtung, mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler effektiver zu werden scheint beim Strukturieren der intuitiven Interpretation und dass zum anderen die anscheinend kausale Ordnung der Geschichte, wie sie in einer Abfolge von Ereignissen erzählt wird, den stochastischen Charakter des Problems verbirgt. Fischbein und Schnarch (1997) erläutern hierzu, dass im Allgemeinen nur festgestellt wird, dass das Ergebnis der zweiten Ziehung keinen rückwirkenden Einfluss auf das Ergebnis der ersten Ziehung haben kann. Dabei wird nicht erkannt, dass die *Kenntnis* des zweiten Ergebnisses verwendet werden sollte zum Bestimmen der Wahrscheinlichkeit des ersten Ergebnisses: Wenn bekannt ist, dass bei der zweiten Ziehung eine weiße Murmel gezogen wurde, dann sind von den verbliebenen drei Murmeln, von denen eine Murmel bei der ersten Ziehung gezogen wurde, zwei schwarz und eine weiß, womit es wahrscheinlicher ist, dass bei der ersten Ziehung eine schwarze Murmel gezogen wurde. Fischbein und Schnarch (1997, S. 102) weisen in Bezug auf die vorliegende Aufgabe darauf hin, dass es sich bei den beiden Fragen „(A.)“ und „(B.)“ um dieselbe Problemstellung handelt – die nicht zutreffende Intuition wird durch die stillschweigende Einbettung des Prinzips der Kausalität bei der intuitiven Evaluation verursacht.

Bei der erwarteten Lösung wird die Wahrscheinlichkeit als Laplace-Wahrscheinlichkeit interpretiert. Im Vordergrund steht bei der vorliegenden Aufgabe, aufgrund der geringen Kom-

plexität der beiden Problemstellungen des Typs „bedingte Wahrscheinlichkeit“, die Anwendung des Wissens zu Grundraum (es gibt bei den zu betrachtenden Ziehungen jeweils drei mögliche Ergebnisse) und Symmetrie (die drei möglichen Ergebnisse sind jeweils als gleich wahrscheinlich einzustufen), dem Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit. Dieses Wissen ist, wie beschrieben, anfänglich dem „higher order knowledge“ zuzuordnen und kann mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler, nach einer Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis der Schülerinnen und Schüler, im Sinne der Theorie des Conceptual Change, dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden. Die Anwendung der „simple everyday heuristic“ des *Take The Best* führt, bei der Berücksichtigung eines korrekten Stichwortes, jeweils zur richtigen Lösung. Aufgrund des Erwerbs durch Instruktion stellt die zur Lösung erforderliche Intuition eine Sekundärintuition dar. Das zur Lösung erforderliche Vorgehen kann der Phase der konkreten Operationen, der Stufe IIA des probabilistischen Denkens, zugeordnet werden.

Die der Kategorie 3 zugeordneten Antworten können mit der Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Gleichwahrscheinlichkeit*, mit der die nicht zutreffende Annahme einhergeht, dass „schwarz“ und „weiß“ gleich wahrscheinlich sind, erklärt werden. Die Abnahme der relativen Häufigkeit der Kategorie 3 ab einer bestimmten Klassenstufe lässt sich darauf zurückführen, dass das Wissen zum Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit ab einem bestimmten Alter der Schülerinnen und Schüler, nach einer Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis der Schülerinnen und Schüler, im Sinne der Theorie des Conceptual Change, nicht mehr dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist, sondern dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden kann, was dazu führt, dass die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Gleichwahrscheinlichkeit* abnimmt.

Dass die relative Häufigkeit der Kategorie 1 in den höheren Klassenstufen geringer ist als in den niedrigeren Klassenstufen, lässt sich darauf zurückführen, dass die korrekte Anwendung des zur Lösung erforderlichen Wissens zum Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit durch die Steuerung durch die evaluative Struktur, auf die das allgemeine Prinzip der Kausalität, welches mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler, entsprechend der in den Naturwissenschaften und den nicht-stochastischen Bereichen der Mathematik vorherrschenden Art und Weise des Denkens, einen zunehmend größeren Einfluss hat, verhindert wird.

Die Zunahme der relativen Häufigkeit der Kategorie 2 mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler kann mit der vermehrten Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *kausalen Schemata* und dem damit einhergehenden, als „time-axis fallacy“ oder „the Falk phenomenon“ bezeichneten Fehlschluss erklärt werden. Dass die Heuristik der *kausalen Schemata* angewendet wird, lässt sich, wie von Fischbein und Schnarch (1997) angeführt, auf den Einfluss des allgemeinen Prinzips der Kausalität auf die evaluative Struktur, durch den die korrekte Anwendung des Wissens zum Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit verhindert wird, zurückführen.

4.3.3 Zusammenfassung der Ergebnisse von Fischbein und Schnarch

Fischbein und Schnarch (1997, S. 102) gingen davon aus, dass sich mit dem Übergang in die Phase der formalen Operationen, ungefähr im Alter von 12 Jahren, die Intuitionen tendenziell stabilisieren und gegenüber dem Einfluss des Alters und der Instruktion resistent werden. Die in der vorliegenden Studie erhaltenen Ergebnisse widersprechen jedoch der allgemeinen Annahme über die Stabilität von Intuitionen.

So konnten nur bei der als „Compound and Simple Events“ bezeichneten Aufgabe, dem gleichzeitigen Würfeln mit zwei Spielwürfeln, über alle Altersstufen hinweg stabile Häufig-

keiten bezüglich der betreffenden Fehlvorstellung festgestellt werden (Fischbein & Schnarch, 1997, S. 103). Bei allen anderen Aufgaben ergaben sich je nach Alter unterschiedliche Häufigkeiten für die betreffenden Fehlvorstellungen: So nahmen bei den als „Representativeness“ und „Negative and Positive Recency Effects“ bezeichneten Aufgaben die Häufigkeiten der betreffenden Fehlvorstellungen mit zunehmendem Alter ab, wohingegen bei den als „Effect of Sample Size“, „The Effect of Sample Size“, „The Heuristic of Availability“ und „The Effect of the Time Axis (The Falk Phenomenon)“ bezeichneten Aufgaben die Häufigkeiten der betreffenden Fehlvorstellungen mit zunehmendem Alter zunahmen, wenn von der untersuchten Gruppe der Studentinnen und Studenten, bei der die Häufigkeiten der betreffenden Fehlvorstellungen in den meisten Fällen geringer waren, abgesehen wird. Bei der als „The Conjunction Fallacy“ bezeichneten Aufgabe war die Häufigkeit der betreffenden Fehlvorstellung bis zum Alter von 14 bis 15 Jahren nahezu konstant groß und nahm dann mit zunehmendem Alter vergleichsweise stark ab. Eine Erklärung für die Abnahme der Häufigkeiten der Fehlvorstellungen bei der Gruppe der Studentinnen und Studenten könnte sein, dass die größere mathematische Erfahrung, möglicherweise einhergehend mit der größeren Reife des logischen Denkens, stark genug war, um sich der Wirkung der betreffenden Fehlvorstellungen zu widersetzen (Fischbein & Schnarch, 1997, S. 103). Zusammenfassend wird festgehalten, dass das sich ergebende Bild ziemlich komplex ist: Einige der Fehlvorstellungen verringerten sich mit zunehmendem Alter, eine war stabil und einige gewannen einen größeren Einfluss (Fischbein & Schnarch, 1997, S. 103).

Als mögliche Erklärung für die Ergebnisse der vorliegenden Studie wird von Fischbein und Schnarch (1997, S. 103) angeführt, dass, wie im Abschnitt 3.3.3 ausführlich beschrieben, das in jede Intuition eingebettete Schema stillschweigend agiert und die betreffende Intuition aus dem Inneren heraus manipuliert – da die allgemeinen Schemata (welche den allgemeinen Rahmentheorien im Sinne der Theorie des Conceptual Change entsprechen) mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler besser in die Intuitionen eingebettet und ausgeprägter sind, ergibt sich ein größerer Einfluss auf die theoretischen Entscheidungen. Als besonders einflussreich werden in diesem Zusammenhang das Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit, das (allgemeine) Prinzip der Verhältnisgleichheit und das (allgemeine) Prinzip der Kausalität hervorgehoben. In Bezug auf die intuitive Lösung von Problemstellungen wird von Fischbein und Schnarch (1997, S. 104) hinzugefügt: Wenn die Beschränkungen des Problems genügend einfach sind, sodass das allgemeine Prinzip adäquat ist um sie anzugehen, dann verringern sich die Häufigkeiten der betreffenden Fehlvorstellungen, wenn die Schülerin oder der Schüler älter wird – im Gegensatz dazu nehmen in anderen Situationen, wenn das allgemeine Prinzip hinsichtlich der vorliegenden Beschränkungen des Problems nicht adäquat ist, die Häufigkeiten der betreffenden Fehlvorstellungen mit zunehmendem Alter der Schülerin oder des Schülers zu.

4.3.4 Folgerungen aus den Befunden von Fischbein und Schnarch

Fischbein und Schnarch (1997, S. 104) sind überzeugt davon, dass es sich als hilfreich erweisen kann, im Rahmen der Instruktion von Wahrscheinlichkeit über Problemstellungen, wie die in der vorliegenden Studie verwendeten, explizit zu diskutieren. Zudem wird angemerkt, dass es angebracht sein könnte, nicht nur das Problem und seine korrekte Lösung zu präsentieren, sondern auch psychologisch die Struktur der entsprechenden Fehlvorstellungen zu analysieren. Für Fischbein und Schnarch (1997, S. 104) besteht der Begriff der Wahrscheinlichkeit nicht aus rein technischer Information und Verfahren, die zu Lösungen führen – vielmehr ist es von Bedeutung, einen Weg des Denkens aufzuzeigen, der wirklich verschieden ist von demjenigen, den der Großteil der Schulmathematik erfordert.

4.4 Die Studie von Rasfeld (2004)

4.4.1 Allgemeines

Rasfeld (2004) untersuchte das intuitive stochastische Denken bei Schülerinnen und Schülern der Jahrgangsstufe 10 an vier Gymnasien einer nordrhein-westfälischen Stadt. Über das Alter der Schülerinnen und Schüler werden keine Angaben gemacht – es kann jedoch aufgrund des Schulsystems in Nordrhein-Westfalen davon ausgegangen werden, dass die meisten der betreffenden Schülerinnen und Schüler zwischen 15 und 16 Jahre alt waren.

Die zentrale Frage der Studie von Rasfeld (2004, S. 35) war, „inwieweit [Schülerinnen und] Schüler am Ende der Sekundarstufe I (Gymnasium) durch die nach dem Lehrplan [...] zu behandelnden stochastischen Inhalte gelernt haben, [...] *stochastische Fragestellungen angemessen intuitiv zu beurteilen*“. Folgende Lehrplaninhalte zur Stochastik waren bis zum Zeitpunkt der Untersuchung kurz vor Schuljahresende zur Behandlung vorgeschrieben (vgl. Rasfeld, 2004, S. 36 f.):

- *Klasse 5/6:*
  Vorbereitung des Lernbereichs Stochastik in den obligatorisch zu behandelnden Gebieten Algebra und Geometrie.
  Hierzu gehören die quantitative Erfassung von Daten und die Veranschaulichung der Ergebnisse sowie der Vergleich von arithmetischem Mittel und Median.
- *Klasse 7/8:*
  Zur Stochastik ist eine eigene Unterrichtseinheit vorgesehen.
  Kernthemen sind Zufallsexperimente, relative Häufigkeiten, Wahrscheinlichkeiten als Prognosen relativer Häufigkeiten auf lange Sicht, Binomialverteilungen für kleine Stufenzahlen, Anwendungen und, nicht verpflichtend, Simulationen.
- *Klasse 9/10:*
  Von den drei Themen „Bernoulli-Experimente, Eins-durch-Wurzel-n-Gesetz“, „Regel von Bayes“ und „Lottoprobleme, kombinatorische Elemente“ ist ein Thema wahlweise zu behandeln.

Die Ergebnisse der Studie von Rasfeld (2004, S. 37) beziehen sich zum einen auf die Leistungen aller getesteten Schülerinnen und Schüler ($N_1 = 243$) und zum anderen, in Form einer weiteren Differenzierung bei der Auswertung, auf die Leistungen derjenigen Schülerinnen und Schüler ($N_2 = 136$), bei denen der Umfang des tatsächlich erteilten Stochastikunterrichts „mit einiger Sicherheit festgestellt werden [konnte]“. Hierzu wird festgehalten, dass nur 58 Schülerinnen und Schüler tatsächlich in Stochastik unterrichtet wurden, wobei „offen bleibt [...], in welchem *Umfang* die Inhalte des Curriculums [...] bearbeitet wurden“ (Rasfeld, 2004, S. 37). Von den 136 Schülerinnen und Schülern, auf die sich die Ergebnisse der weiteren Differenzierung bei der Auswertung beziehen, wurden also 78 Schülerinnen und Schüler trotz der verbindlich vorgeschriebenen Lehrplaninhalte mit einiger Sicherheit gar nicht in Stochastik unterrichtet.

Rasfeld (2004) weist darauf hin, dass die vorliegende Studie unter anderem auf den (im vorangegangenen Kapitel vorgestellten) Erkenntnissen von Fischbein (1975) und Kahneman, Slovic und Tversky (1982) zur Rolle von Intuitionen und kognitiven Verzerrungen beim intuitiven probabilistischen Denken aufbaut. Der Begriff der Intuition wird von Rasfeld (2004) diesbezüglich als „eine spezifische Form unmittelbar verfügbaren Wissens definiert“ – wie im Abschnitt 3.3.1 beschrieben.

Der Test bestand aus vierzehn Aufgaben, wobei die meisten Aufgaben (das heißt elf Aufgaben) so konzipiert waren, dass zwei mögliche Ereignisse eines bestimmten Zufallsexperiments vorgegeben waren und eingeschätzt werden sollte, welches der beiden Ereignisse wahrscheinlicher ist beziehungsweise ob beide Ereignisse gleich wahrscheinlich sind. Eine Berechnung der Wahrscheinlichkeiten unter Anwendung umfangreicher Formeln war hierbei nicht erforderlich – jedoch sollte die gegebene Antwort von den Schülerinnen und Schülern jeweils kurz begründet werden. Dies wird von Rasfeld (2004, S. 38) als nötig angesehen, um „typische Muster und Fehlvorstellungen“ erkennen zu können, obwohl dadurch die Gefahr des Einwandes gegeben ist, „dass die Reflexion über die eigene Lösung dem Charakter einer spontanen, intuitiven Antwort widerspricht“ (vgl. Fischbein & Schnarch, 1997).

Auf eine stärkere inhaltliche Einkleidung der Aufgaben wurde bewusst verzichtet. Damit sollte das Problem verschiedener stochastischer Modellierungsmöglichkeiten vermieden werden. Rasfeld (2004) verweist diesbezüglich auf Scholz (1981), der belegt, dass bei einem Teil der von Kahneman et al. (1982) verwendeten Aufgaben nicht nur ein (einziger) Ansatz plausibel ist.

4.4.2 Aufgaben und Ergebnisse der Auswertung

In der Veröffentlichung von Rasfeld (2004, S. 41 f.) werden vier der vierzehn Aufgaben einschließlich der zugehörigen Untersuchungsergebnisse näher dargestellt – die ausgewählten Aufgaben beinhalten „möglichst verschiedene zentrale Begriffe des Stochastikcurriculums (z. B. Gleichwahrscheinlichkeit, Gesetz der großen Zahlen)“ und lassen erkennen, „in welchem Umfang tragfähige Intuitionen zu richtigen Lösungen geführt haben und *wie* sich solche Intuitionen in den Begründungen niederschlagen bzw. *welche* Fehlvorstellungen zu falschen Lösungen geführt haben“.

„Rasfeld: Aufgabe 1“. Die Aufgabenstellung lautete: „Zwei faire Münzen (d. h. Wappen bzw. Zahl treten bei einem Wurf einer solchen Münze gleich wahrscheinlich auf) werden gleichzeitig geworfen. Hältst du es für wahrscheinlicher, dass zweimal Wappen oder dass einmal Wappen und einmal Zahl erscheint?“ Als Auswahlantworten waren vorgegeben: „Es ist wahrscheinlicher, dass zweimal Wappen erscheint“, „Es ist wahrscheinlicher, dass einmal Wappen und einmal Zahl erscheint“, „Beide Ereignisse sind gleich wahrscheinlich“ und „Weiß ich nicht“. Zudem sollte die gegebene Antwort begründet werden, hierzu war „Begründung:“ vorgedruckt.

Erwartete Antwort:	Es ist wahrscheinlicher, dass einmal Wappen und einmal Zahl erscheint
Mögliche Begründung:	Beim gleichzeitigen Werfen von zwei fairen Münzen gibt es vier mögliche Ergebnisse, die gleich wahrscheinlich sind: WW, WZ, ZW, ZZ. Zum Ereignis „Es erscheint zweimal Wappen“ gehört nur das Ergebnis „WW“, zum Ereignis „Es erscheint einmal Wappen und einmal Zahl“ gehören dagegen zwei Ergebnisse, „WZ“ und „ZW“, sodass dieses Ereignis wahrscheinlicher ist.

Es handelt sich bei der vorliegenden Aufgabe um ein wort- bzw. buchstabenkodifiziertes Problem, bei dem der Einsatz eines Zufallsgerätes beschrieben wird. Die Rahmung des Problems entspricht dem „Problem Solving Framing“; auf eine stärkere inhaltliche Einkleidung des Problems ist, wie erwähnt, bewusst verzichtet worden. In den vorgegebenen Antwortmöglichkeiten ist die Wahrscheinlichkeit in nicht-numerischer Form repräsentiert.

Die Auswertung der Antworten der Schülerinnen und Schüler ergab, dass nur von 16% aller getesteten Schülerinnen und Schüler die richtige Antwort „Es ist wahrscheinlicher, dass einmal Wappen und einmal Zahl erscheint“ gegeben wurde. Der Anteil der Schülerinnen und Schüler, die die vorliegende Aufgabe lösen konnten, ist in der Gruppe mit Vorkenntnissen und in der Gruppe ohne Vorkenntnisse gleich groß, also unabhängig davon, ob Stochastikunterricht erteilt worden ist oder nicht. Jedoch weist Rasfeld (2004, S. 44) darauf hin, dass die vorliegende Aufgabe in der Gruppe mit Vorkenntnissen nur von 3% der Schülerinnen und Schüler nicht bearbeitet wurde, wohingegen der Anteil in der Gruppe ohne Vorkenntnisse 9% beträgt. Auch wenn der Unterschied bei der vorliegenden Aufgabe nicht signifikant ist, so lässt sich „über alle Aufgaben hinweg [...] [sehr wohl] eine deutlich stärker ausgeprägte Haltung [erkennen], die Bearbeitung stochastischer Problemstellungen abzulehnen“ (Rasfeld, 2004, S. 44), für den Fall, dass nicht auf Vorkenntnisse zurückgegriffen werden kann.

Eine korrekte Begründung wurde von etwa einem Drittel der Schülerinnen und Schüler mit richtiger Aufgabenlösung gegeben – von nahezu allen anderen Schülerinnen und Schülern mit richtiger Aufgabenlösung wurde keine Begründung gegeben. Die richtige Lösung der Aufgabe wird von Schülerinnen und Schülern mit Vorkenntnissen signifikant häufiger korrekt begründet als von Schülerinnen und Schülern ohne Vorkenntnisse, was „auch über alle Testaufgaben“ (Rasfeld, 2004, S. 44) hinweg gilt. Aus der Veröffentlichung von Rasfeld geht hervor (vgl. „Abb. 5“ in Rasfeld, 2004, S. 44), dass in der Gruppe mit Vorkenntnissen der Anteil falscher Begründungen in etwa doppelt so groß ist wie der Anteil fehlender Begründungen, wohingegen in der Gruppe ohne Vorkenntnisse beide Anteile in etwa gleich groß sind. Über alle Testaufgaben hinweg sind in der Gruppe ohne Vorkenntnisse signifikant häufiger fehlende Begründungen feststellbar als in der Gruppe mit Vorkenntnissen, was für Rasfeld (2004, S. 45) darauf hindeutet, dass „stochastisch unerfahrene [Schülerinnen und] Schüler [...] nur in einem deutlich eingeschränkten Ausmaß Begründungen ihrer (Auswahl)antworten [wagen]“.

Bezüglich der vorliegenden Aufgabe wird von Rasfeld (2004, S. 43) angemerkt, dass von 79% aller getesteten Schülerinnen und Schüler die falsche Antwort „Beide Ereignisse sind gleich wahrscheinlich“ gegeben wurde – die Begründungen dieser Schülerinnen und Schüler weisen dabei im Allgemeinen auf folgende Fehlvorstellung hin: Es „wird davon ausgegangen, dass sich der Ergebnisraum aus den *drei* beobachtbaren Ergebnissen ‚0-mal Wappen‘, ‚1-mal Wappen‘ und ‚2-mal Wappen‘ zusammensetzt, [...] [und] fälschlicherweise die *Laplace-Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit* zur Lösung herangezogen“. Als typische richtige Begründungen werden Begründungen unter Zuhilfenahme eines Baumdiagramms angeführt.

Bei der erwarteten Lösung wird die Wahrscheinlichkeit als Laplace-Wahrscheinlichkeit interpretiert. Im Vordergrund steht die Anwendung des Wissens zur Multiplikationsregel und zur Additionsregel von Wahrscheinlichkeiten, welches, wie bei der Studie von Fischbein und Schnarch (1997) im Abschnitt 4.3.2 beschrieben, dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist. Dieses Wissen steht bei der vorliegenden Aufgabe im engen Zusammenhang mit dem Wissen zu Grundraum (es gibt bei jeder Münze zwei mögliche Ergebnisse) und Symmetrie (die beiden möglichen Ergebnisse sind als gleich wahrscheinlich einzustufen), dem Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit, welches, wie bei den zuvor vorgestellten Studien beschrieben, anfänglich dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist und mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler, nach einer Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis der Schülerinnen und Schüler, im Sinne der Theorie des Conceptual Change, dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden kann. Zur richtigen Lösung führt die Anwendung der Heuristik des Baumdiagramms. Diese Heuristik ist, wie auch bei den anderen vorgestellten Studien beschrieben, den „higher order heuristics“ zuzuordnen. Die zur Lösung erforderliche Intuition stellt aufgrund des Erwerbs durch Instruktion eine Sekundärintuition dar. Das zur Lösung erforderliche Vorgehen ist im Allgemeinen der Phase der formalen Operationen, der Stufe III des probabilistischen Denkens, zuzuordnen, kann aber, nach der entsprechenden In-

struktion, auch dem Ende der Phase der konkreten Operationen, der Stufe IIB des probabilistischen Denkens, zugeordnet werden.

Die große relative Häufigkeit der falschen Antwort „Beide Ereignisse sind gleich wahrscheinlich“, mit der die geringe relative Lösungshäufigkeit der Aufgabe einhergeht, kann, wie von Rasfeld (2004) beschrieben, auf die nicht korrekte Anwendung des Wissens zum Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit, welches ab einem bestimmten Alter der Schülerinnen und Schüler, nach einer Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis der Schülerinnen und Schüler, im Sinne der Theorie des Conceptual Change, nicht mehr dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist, sondern dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden kann, zurückzuführen sein: Die beiden zur Auswahl stehenden Ereignisse werden als gleich wahrscheinlich angesehen; die Anzahl der Möglichkeiten für jedes der beiden Ereignisse wird dabei nicht berücksichtigt. Dass die Anzahl der Möglichkeiten für jedes der beiden Ereignisse nicht berücksichtigt wird, kann zum einen damit erklärt werden, dass die Heuristik des Baumdiagramms nicht angewendet wird, und zum anderen damit, dass das Wissen zur Multiplikationsregel und zur Additionsregel von Wahrscheinlichkeiten dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist. Dass die Heuristik des Baumdiagramms nicht angewendet wird, lässt sich darauf zurückführen, dass diese Heuristik den „higher order heuristics“ zuzuordnen ist.

Die große relative Häufigkeit der falschen Antwort „Beide Ereignisse sind gleich wahrscheinlich“ kann auch mit der Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Gleichwahrscheinlichkeit* erklärt werden. Die Anwendung dieser Heuristik wird unter Umständen durch die Formulierung „Hältst *du* es für wahrscheinlicher, dass ...“ begünstigt. Für Bentz und Borovcnik (1991, S. 3) liegt bei dieser Formulierung „die Vorstellungswelt des Einzelnen [...] näher zum konkreten Ergebnis des Versuchs [...] als zu einer abstrakten Einschätzung von Wahrscheinlichkeiten für Möglichkeiten“. Die Hauptschwierigkeit bei dieser Art von Problemstellung wird jedoch auch von Bentz und Borovcnik (1991, S. 4) in der Abstraktion gesehen, also im „Erkennen, in welcher Hinsicht das Experiment symmetrisch ist; d. h. welche Menge [...] als Grundraum genommen werden“ soll. Durch den Einfluss der linguistischen Interpretation des Aufgabentextes, dass Wappen bzw. Zahl „bei einem Wurf einer solchen Münze gleich wahrscheinlich“ auftreten, wird die Anwendung der Heuristik der *Gleichwahrscheinlichkeit* eventuell ebenfalls begünstigt.

Von Rasfeld (2004, S. 43) wird angemerkt, dass für Schülerinnen und Schüler, die mit Hilfe eines Baumdiagramms richtig argumentieren, im Sinne einer zustimmenden Sekundärintuition klar ist, „dass man von *zwei unterscheidbaren* Münzen (‚1. Münze, 2. Münze‘) und *vier gleich wahrscheinlichen Ergebnissen* auszugehen hat“. Dass von ungefähr zwei Drittel der Schülerinnen und Schüler mit richtiger Aufgabenlösung keine Begründung gegeben wurde, kann zumindest bei einem Teil der betreffenden Schülerinnen und Schüler darauf zurückzuführen sein, dass die Heuristik des Baumdiagramms zwar intuitiv angewendet wird, aber aufgrund der subjektiven *Offensichtlichkeit* der Anwendung eine Darstellung in Form eines Baumdiagramms als nicht ausreichend zur Begründung der erhaltenen Lösung angesehen wird.

„Rasfeld: Aufgabe 2“. Die Aufgabe lautete: „Eine faire Münze wird sechsmal geworfen. Welche der beiden Versuchsfolgen, I oder II, hältst du für wahrscheinlicher (W steht für Wappen und Z für Zahl)? I: WZZWZW. II: WWWWZW.“ Die zur Auswahl stehenden Antwortmöglichkeiten lauteten: „Ich halte I für wahrscheinlicher“, „Ich halte II für wahrscheinlicher“, „Ich halte I und II für gleich wahrscheinlich“ und „Weiß ich nicht“. Auch hier sollte die gewählte Antwort begründet werden, wozu wiederum „Begründung:“ vorgedruckt war.

Erwartete Antwort: Ich halte I und II für gleich wahrscheinlich

Mögliche Begründung: Bei jedem einzelnen der sechs Würfe ist die Wahrscheinlichkeit für Wappen und für Zahl gleich groß, jeweils 50%. Die Ergebnisse der einzelnen Würfe sind voneinander stochastisch unabhängig, sodass alle $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$ möglichen Ergebnisse des sechsmaligen Werfens gleich wahrscheinlich sind, womit auch die beiden vorgegebenen Versuchsfolgen „I: WZZWZW“ und „II: WWWWZW“ gleich wahrscheinlich sind.

Auch bei dieser Aufgabe handelt es sich um ein wort- bzw. buchstabenkodifiziertes Problem, bei dem der Einsatz eines Zufallsgerätes beschrieben wird. Die Problemrahmung entspricht dem „Problem Solving Framing“. Bei der vorliegenden Aufgabe wird nicht die Vorstellung von Wahrscheinlichkeit, sondern die Vorstellung von Zufall untersucht.

Bei der zweiten Aufgabe ergab die Auswertung der Antworten der Schülerinnen und Schüler, dass von 35% aller getesteten Schülerinnen und Schüler die richtige Antwort „Ich halte I und II für gleich wahrscheinlich“ ausgewählt wurde. Bezüglich der Gruppe mit Vorkenntnissen und der Gruppe ohne Vorkenntnisse wird festgehalten, dass sich die beiden Gruppen „in ihrem Antwortverhalten bei dieser Aufgabe nicht unterscheiden“ (Rasfeld, 2004, S. 48).

Von der Hälfte der Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe richtig gelöst hatten, wurde auch eine korrekte Begründung gegeben. Für die Gruppe mit Vorkenntnissen und die Gruppe ohne Vorkenntnisse ergab die Auswertung der Begründungen, dass sich die beiden Gruppen „bezüglich ihrer Fähigkeiten, Antworten zu begründen, ähnlich verhalten wie in Aufgabe 1“ (Rasfeld, 2004, S. 48). So werden richtige Lösungen in der Gruppe mit Vorkenntnissen häufiger korrekt begründet als in der Gruppe ohne Vorkenntnisse, zudem sind in der Gruppe mit Vorkenntnissen mehr falsche als fehlende Begründungen feststellbar. Rasfeld (2004, S. 48) betont hierbei, dass bei der vorliegenden Aufgabe bei Schülerinnen und Schülern ohne Vorkenntnisse „abermals eine deutlich ausgeprägtere Haltung, ihre Antwortwahl *nicht* zu begründen“, erkennbar ist.

Bezüglich der falschen Aufgabenlösungen wird angemerkt, dass von 57% aller getesteten Schülerinnen und Schüler die Antwort „Ich halte I für wahrscheinlicher“ gegeben wurde. Aus den Begründungen der betreffenden Schülerinnen und Schüler lassen sich für Rasfeld (2004, S. 46) typische Fehlvorstellungen erkennen – eine davon ist die „in der Literatur manchmal mit ‚Gesetz der kleinen Zahlen‘“ umschriebene Fehlvorstellung, welche „auf einer Fehlinterpretation des *Gesetzes der großen Zahlen* [beruht]“. Bei dieser wird eine Serie von Münzwürfen, bei der Wappen und Zahl in der gleichen Anzahl vorkommen, für wahrscheinlicher gehalten als eine Serie, bei der dies nicht der Fall ist. Diese Fehlvorstellung trifft laut Rasfeld auf die meisten der Schülerinnen und Schüler zu, von denen die Antwort „Ich halte I für wahrscheinlicher“ gegeben wurde. Eine weitere Fehlvorstellung, die festgestellt werden konnte, ist die mit der „Repräsentativität“ einhergehende Fehlvorstellung, „dass der Zufall in aller Regel etwas ‚Ungeordnetes‘ hervorbringt“ (Rasfeld, 2004, S. 34).

Neben den beiden genannten Fehlvorstellungen werden noch zwei weitere Typen von Fehlschlüssen aufgeführt. Zum einen wird laut Rasfeld (2004, S. 47) ausgehend von der Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen darauf geschlossen, dass die „*Differenz* der Anzahlen von Wappen und Zahl“ in einer Münzwurfserie beliebig klein werden muss, und zum anderen wird „nicht sorgfältig unterschieden [...] zwischen den Wahrscheinlichkeiten für ganz bestimmte Folgen und denjenigen einer Zufallsvariablen X, die die Anzahl der Wappen angibt“. Der Vergleich zwischen der Gruppe mit Vorkenntnissen und der Gruppe ohne Vorkenntnisse zeigt, dass Schülerinnen und Schüler mit Vorkenntnissen „in demselben Ausmaß“ (Rasfeld, 2004, S. 48) Fehlvorstellungen unterliegen wie Schülerinnen und Schüler ohne Vorkenntnisse. In typischen korrekten Begründungen wird bei der Argumentation in der Regel auf das Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit zurückgegriffen (dass die Wahrscheinlich-

keit für Wappen und für Zahl bei jedem einzelnen der sechs Würfe der Münze jeweils 50% beträgt, unabhängig von den Ergebnissen der vorangegangenen Münzwürfe).

Zusammenfassend stellt Rasfeld (2004, S. 48) bezüglich der vorliegenden Aufgabe fest, dass aus der geringen Anzahl an korrekten Begründungen deutlich wird, „dass viele [Schülerinnen und] Schüler am Ende der Sekundarstufe I primäre intuitive Fehlvorstellungen zum Unabhängigkeitskonzept besitzen, die durch den Stochastikunterricht weder beseitigt noch durch adäquate sekundäre Intuitionen ersetzt werden“.

Charakteristisch für die erwartete Lösung ist, dass die beiden Versuchsfolgen im Sinne von konkreten Ergebnissen des sechsmaligen Werfens einer fairen Münze als gleich wahrscheinlich einzuschätzen sind. Um die vorliegende Aufgabe richtig lösen zu können, ist das Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit erforderlich, hier die Ergebnisse der einzelnen Würfe der Münze betreffend. Dieses Wissen ist, wie bei den zuvor vorgestellten Studien beschrieben, anfänglich dem „higher order knowledge“ zuzuordnen und kann mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler, nach einer Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis der Schülerinnen und Schüler, im Sinne der Theorie des Conceptual Change, dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden. Die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Gleichwahrscheinlichkeit* führt zur richtigen Lösung. Aufgrund des Erwerbs durch Instruktion stellt die zur Lösung erforderliche Intuition eine Sekundärintuition dar. Das zur Lösung erforderliche Vorgehen kann der Phase der formalen Operationen, der Stufe III des probabilistischen Denkens, zugeordnet werden.

Die geringe relative Häufigkeit der richtigen Antwort „Ich halte I und II für gleich wahrscheinlich“ kann darauf zurückzuführen sein, dass, wie bei der Studie von Green (1982) im Abschnitt 4.2.2 beschrieben, das Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit zwar, nach einer Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis der Schülerinnen und Schüler, im Sinne der Theorie des Conceptual Change, nicht mehr dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist, sondern dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden kann, aber die Anwendung dieses Wissens durch den Einfluss des Zielsystems, welches mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler zunehmend deterministischer ausgerichtet ist, verhindert wird.

Die große relative Häufigkeit der falschen Antwort „Ich halte I für wahrscheinlicher“ lässt sich, wie von Rasfeld (2004) beschrieben, damit erklären, dass zum einen nicht das Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit angewendet wird, sondern das Wissen zur Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen, dass sich die relativen Häufigkeiten der beiden Ergebnisse „Wappen“ und „Zahl“ mit wachsender Anzahl der Würfe der Münze stabilisieren, welches fälschlicherweise dahingehend interpretiert wird, dass die Differenz zwischen der Anzahl der beiden Ergebnisse „Wappen“ und „Zahl“ beliebig klein wird oder dass die relativen Häufigkeiten der beiden Ergebnisse „Wappen“ und „Zahl“ so nah wie möglich am theoretischen Wert von 0,5 liegen, und zum anderen die „simple everyday heuristic“ der *Repräsentativität*, mit der Fehlvorstellungen von Zufall, im Sinne einer kognitiven Verzerrung, einhergehen, angewendet wird. Dass die Heuristik der *Repräsentativität* angewendet wird, lässt sich darauf zurückführen, dass, wie beschrieben, das Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit, welches, nach einer Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis der Schülerinnen und Schüler, im Sinne der Theorie des Conceptual Change, nicht mehr dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist, sondern dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden kann, nicht angewendet wird, da die Anwendung dieses Wissens durch den Einfluss des Zielsystems verhindert wird.

Wird der Zufall als sich selbst regulierender Prozess angesehen, bei dem die grundlegende Charakteristik des Prozesses sowohl global in der ganzen Sequenz als auch lokal in jedem Teil davon repräsentiert wird, so spiegelt die zweite der beiden vorgegebenen Sequenzen

nicht wider, dass bei einer fairen Münze „Wappen“ und „Zahl“ gleich wahrscheinlich sind, was neben der von Rasfeld (2004) angeführten Erklärung in Bezug auf die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Repräsentativität* eine weitere Erklärung für die Wahl der Antwort „Ich halte I für wahrscheinlicher“ darstellt.

Dass diese Antwort gewählt wird, kann auch auf die Anwendung der „simple everyday heuristic“ des *Take The Best* zurückzuführen sein, wenn beispielsweise das Stichwort „Anzahl von ‚Wappen‘ und ‚Zahl‘ in der Versuchsfolge“ herangezogen wird.

Wie bereits bei der vorangegangenen Aufgabe, so ist auch bei der vorliegenden Aufgabe zu berücksichtigen, dass aufgrund der Formulierung „Welche ... hältst *du* für wahrscheinlicher ...?“ unter Umständen die Vorstellungswelt der Schülerinnen und Schüler näher zum *konkreten* Ergebnis des Versuchs als zur abstrakten Einschätzung der Wahrscheinlichkeiten für *mögliche* Ergebnisse des Versuchs liegt. In diesem Zusammenhang darf auch die Möglichkeit nicht außer Acht gelassen werden, dass, im Zuge der linguistischen Interpretation des Aufgabentextes, wie von Amir et al. (1999) angeführt, die beiden vorgegebenen Sequenzen jeweils als Repräsentant einer Klasse von Sequenzen, und nicht als spezifische Sequenz, angesehen werden, womit die Antwort „Ich halte I für wahrscheinlicher“ zwar formal falsch ist, jedoch auf einem richtigen Gedankengang basiert. Hierauf wird auch von Rasfeld (2004) hingewiesen.

Darüber hinaus kann nicht ausgeschlossen werden, dass zwar die richtige Antwort „Ich halte I und II für gleich wahrscheinlich“ gewählt wird, allerdings, im Sinne des „Outcome Approach“, damit nicht gemeint ist, dass die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der beiden vorgegebenen Sequenzen tatsächlich gleich groß sind, sondern nur, dass die Wahrscheinlichkeit des Auftretens für jede der beiden Sequenzen beim sechsmaligen Werfen einer Münze sehr gering ist.

Zu berücksichtigen ist bei der vorliegenden Aufgabe zudem, dass richtige Lösungen eventuell auch auf die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Gleichwahrscheinlichkeit* zurückzuführen sind.

„Rasfeld: Aufgabe 6“. Die Aufgabenstellung bei der als dritte vorgestellten Aufgabe lautete: „Eine faire Münze wird wiederholt geworfen. Welches der beiden folgenden Ereignisse ist deiner Meinung nach wahrscheinlicher? I: In den ersten 10 Würfen erscheint Wappen mindestens 7mal. II: In den ersten 100 Würfen erscheint Wappen mindestens 70mal.“ Als Antwortmöglichkeiten standen zur Auswahl: „Ich halte I für wahrscheinlicher als II“, „Ich halte II für wahrscheinlicher als I“, „Ich halte I und II für gleich wahrscheinlich“ und „Weiß ich nicht“. Die gegebene Antwort sollte ebenfalls begründet werden, hierzu war „Begründung:“ vorgedruckt.

Erwartete Antwort:	Ich halte I für wahrscheinlicher als II
Mögliche Begründung:	Gemäß der Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen stabilisiert sich die relative Häufigkeit eines beobachteten Ergebnisses mit wachsender Anzahl der Versuche. Mit zunehmender Anzahl an Münzwürfen wird daher eine Abweichung der relativen Häufigkeit des Ergebnisses „Wappen“ vom theoretisch zu erwartenden Wert 0,5 immer unwahrscheinlicher, sodass das Ereignis I wahrscheinlicher ist als das Ereignis II.

Es handelt sich wiederum um ein wort- bzw. buchstabenkodifiziertes Problem, bei dem der Einsatz eines Zufallsgerätes beschrieben wird. Die Rahmung des Problems entspricht dem „Problem Solving Framing“. In den vorgegebenen Antwortmöglichkeiten ist die Wahrscheinlichkeit in nicht-numerischer Form repräsentiert.

Die Auswertung der Antworten der Schülerinnen und Schüler ergab, dass die richtige Antwort „Ich halte I für wahrscheinlicher als II“ nur von 26% aller getesteten Schülerinnen und Schüler gegeben wurde. Bezüglich der Gruppe mit Vorkenntnissen und der Gruppe ohne Vorkenntnisse wird angemerkt, dass von Schülerinnen und Schülern ohne Vorkenntnisse bei dieser Aufgabe häufiger die richtige Antwort ausgewählt wurde als von Schülerinnen und Schülern mit Vorkenntnissen – allerdings wird der Unterschied nicht als signifikant eingestuft.

Eine als korrekt gewertete Begründung wurde von 49% der Schülerinnen und Schüler mit richtiger Aufgabenlösung gegeben. Für die Gruppe mit Vorkenntnissen und die Gruppe ohne Vorkenntnisse ergab die Auswertung der Begründungen der Schülerinnen und Schüler in den Kategorien „fehlende Begründung“, „falsche Begründung“ und „richtige Begründung“, dass sich zwischen der Gruppe mit Vorkenntnissen und der Gruppe ohne Vorkenntnisse „in keiner Kategorie [...] ein signifikanter Unterschied“ (Rasfeld, 2004, S. 52) zeigt.

Rasfeld (2004, S. 51) merkt zur vorliegenden Aufgabe an, dass von 58% aller getesteten Schülerinnen und Schüler die falsche Antwort „Ich halte I und II für gleich wahrscheinlich“ gewählt wurde – die Begründungen dieser falschen Aufgabenlösung sind im Wesentlichen dadurch gekennzeichnet, dass „der Größe des Stichprobenumfangs keine Bedeutung beigemessen [wird]“; typische richtige Begründungen zeichnen sich dagegen durch „ein ‚Gespür‘ vom Zusammenspiel zwischen relativer Häufigkeit und Stichprobenumfang [aus]“, wobei für die betreffenden Schülerinnen und Schüler „intuitiv klar [ist], dass ein Unterschied [...] zwischen relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit mit wachsender Anzahl von Münzwürfen immer unwahrscheinlicher wird“. Zusammenfassend wird bezüglich der Auswertung der Begründungen zur vorliegenden Aufgabe festgehalten, dass eine (grundlegende) Einsicht in die Beziehung zwischen der relativen Häufigkeit, der Wahrscheinlichkeit und dem Stichprobenumfang bei der Mehrzahl der getesteten Schülerinnen und Schüler intuitiv nicht vorhanden ist. Dies erscheint für Rasfeld umso erstaunlicher, da, wie im Abschnitt 4.4.1 beschrieben, im zugrunde liegenden Lehrplan eine Einführung von „Wahrscheinlichkeiten als Prognosen relativer Häufigkeiten auf lange Sicht“, also ein frequentistischer Zugang, empfohlen wird. Anhand der Auswertung der Antworten und der Begründungen der Schülerinnen und Schüler ist davon auszugehen, dass bei der vorliegenden Problemstellung zwischen Schülerinnen und Schülern mit Vorkenntnissen und Schülerinnen und Schülern ohne Vorkenntnisse weder im Antwort- noch im Begründungsverhalten ein (nennenswerter) Unterschied besteht. Rasfeld (2004, S. 53) kommt daher zu dem Ergebnis, dass „tragfähige Intuitionen zum empirischen Gesetz der großen Zahlen [...] trotz entsprechender Bemühungen bei einem großen Teil der [Schülerinnen und] Schüler nicht aufgebaut [werden]“.

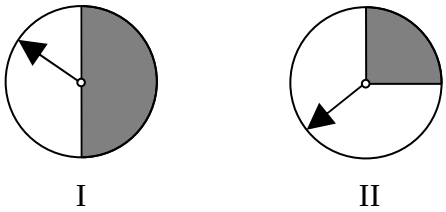
Die Wahrscheinlichkeit wird bei der erwarteten Lösung als frequentistische Wahrscheinlichkeit interpretiert. Im Vordergrund steht die Anwendung des Wissens zur Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen. Dieses Wissen ist, wie bei der Studie von Fischbein und Schnarch (1997) im Abschnitt 4.3.2 beschrieben, dem „higher order knowledge“ zuzuordnen. Bei der Berücksichtigung eines korrekten Stichwortes führt die Anwendung der „simple everyday heuristic“ des *Take The Best* zur richtigen Lösung. Die zur Lösung erforderliche Intuition stellt aufgrund des Erwerbs durch Instruktion eine Sekundärintuition dar. Das zur Lösung erforderliche Vorgehen kann der Phase der formalen Operationen, der Stufe III des probabilistischen Denkens, zugeordnet werden.

Eine Erklärung für die geringe relative Häufigkeit der richtigen Antwort „Ich halte I für wahrscheinlicher als II“ kann sein, dass das zur Lösung erforderliche Wissen zur Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist.

Die große relative Häufigkeit der falschen Antwort „Ich halte I und II für gleich wahrscheinlich“ kann damit erklärt werden, dass von den Schülerinnen und Schülern die „simple everyday heuristic“ der *Repräsentativität*, mit der, wie von Rasfeld (2004) beschrieben, die

Insensibilität gegenüber der Stichprobengröße, im Sinne einer kognitiven Verzerrung, einhergeht, angewendet wird. Die Anwendung der Heuristik der *Repräsentativität* lässt sich darauf zurückführen, dass zum einen das zur Lösung erforderliche Wissen zur Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist und zum anderen, wie bei der Studie von Fischbein und Schnarch (1997) im Abschnitt 4.3.2 beschrieben, das Wissen zum Prinzip der Verhältnisgleichheit, welches anfänglich dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist, ab einem bestimmten Alter der Schülerinnen und Schüler, nach einer Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis der Schülerinnen und Schüler, im Sinne der Theorie des Conceptual Change, dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden kann, sodass sich dieses Wissen als relevant zur Lösung bei der vorliegenden Aufgabe anbietet: bei Schülerinnen und Schülern ohne stochastische Vorkenntnisse, da es in anderen Bereichen der Mathematik zur Ermittlung einer korrekten Lösung führt, und bei Schülerinnen und Schülern mit stochastischen Vorkenntnissen auch deswegen, weil es erfolgreich zum Vergleich von Chancen, beispielsweise bei Urnenexperimenten, eingesetzt werden kann. Hierauf wird auch von Rasfeld (2004) und, wie im Abschnitt 3.3.3 beschrieben, von Greer (2001) hingewiesen. Zudem ist bei der vorliegenden Aufgabe, wie bei den beiden vorangegangenen Aufgaben, der Einfluss der Formulierung „Welches der ... Ereignisse ist *deiner Meinung nach* wahrscheinlicher?“ auf die Vorstellungswelt der Schülerinnen und Schüler zu berücksichtigen.

„Rasfeld: Aufgabe 9“. Bei der als vierte vorgestellten Aufgabe waren die beiden nachfolgend abgebildeten „Glücksräder“ vorgedruckt.



Die Aufgabenstellung lautete: „Du hast die Wahl zwischen den beiden Glücksrädern I und II. Wählt man I, so hat man genau einen Versuch und gewinnt, wenn der Zeiger im schwarzen Bereich [Anmerkung: dieser ist in der (Original-)Abbildung dunkelgrau] stehen bleibt. Bei II gewinnt man, wenn der Zeiger bei zwei Versuchen mindestens einmal in dem schwarzen Bereich zum Stehen kommt. Für welches Rad würdest du dich entscheiden?“ Zur Auswahl standen folgende Antwortmöglichkeiten: „Es ist wahrscheinlicher, mit einem Versuch bei I zu gewinnen“, „Es ist wahrscheinlicher, mit zwei Versuchen mindestens einmal bei II zu gewinnen“, „Die Wahrscheinlichkeiten sind gleich groß. Es spielt keine Rolle, ob man I oder II wählt“ und „Weiß ich nicht“. Die gegebene Antwort sollte wiederum begründet werden, wozu „Begründung:“ vorgedruckt war.

Erwartete Antwort:	Es ist wahrscheinlicher, mit einem Versuch bei I zu gewinnen
Mögliche Begründung:	Die Wahrscheinlichkeit, mit einem Versuch bei I zu gewinnen, ist 0,5. Die Wahrscheinlichkeit, mit dem *ersten* Versuch bei II zu gewinnen, ist 0,25 und die Wahrscheinlichkeit, mit dem *zweiten* Versuch bei II zu gewinnen, ist ebenfalls 0,25. Da die beiden Ereignisse „Gewinn mit dem *ersten* Versuch bei II“ und „Gewinn mit dem *zweiten* Versuch bei II“ nicht unvereinbar sind, folgt, dass die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Versuchen mindestens einmal bei II zu gewinnen, kleiner ist als 0,25 + 0,25 = 0,5. Es ist also wahrscheinlicher, mit einem Versuch bei I zu gewinnen.

Auch hier handelt es sich um ein wort- bzw. buchstabenkodifiziertes Problem, bei dem der Einsatz eines Zufallsgerätes beschrieben wird. Die Problemrahmung entspricht dem „Problem Solving Framing“. Die Wahrscheinlichkeit ist in den vorgegebenen Antwortmöglichkeiten in nicht-numerischer Form repräsentiert.

Bei dieser Aufgabe ergab die Auswertung, dass sich 38% aller getesteten Schülerinnen und Schüler für die richtige Antwort „Es ist wahrscheinlicher, mit einem Versuch bei I zu gewinnen“ entschieden hatten. Ein Vergleich zwischen der Gruppe mit Vorkenntnissen und der Gruppe ohne Vorkenntnisse zeigt, dass in der Gruppe mit Vorkenntnissen von prozentual weniger Schülerinnen und Schülern die richtige Antwort gewählt wurde als in der Gruppe ohne Vorkenntnisse, auch wenn der Unterschied nicht als signifikant eingestuft wird. In der Gruppe ohne Vorkenntnisse wird jedoch von den Schülerinnen und Schülern „eine Bearbeitung dieser Aufgabe in einem deutlich stärkeren Ausmaß“ (Rasfeld, 2004, S. 56) abgelehnt als in der Gruppe mit Vorkenntnissen – dies wird darauf zurückgeführt, dass „Ideen für eine Lösung, seien sie nun falsch oder richtig, [...] bei einem Teil aus der Gruppe ‚ohne‘ nicht vorhanden [sind]“.

Eine korrekte Begründung der richtigen Antwort wurde nur von zwei der insgesamt 243 getesteten Schülerinnen und Schüler gegeben. Sowohl in der Gruppe mit Vorkenntnissen als auch in der Gruppe ohne Vorkenntnisse fehlen korrekte Begründungen somit nahezu komplett, was darauf hindeutet, „dass die Wahl der richtigen Antwort [...] durchweg in beiden Gruppen auf falschen Intuitionen beruht“ (Rasfeld, 2004, S. 56).

Bezüglich der falschen Aufgabenlösungen wird angemerkt, dass von 47% aller getesteten Schülerinnen und Schüler die Antwort „Die Wahrscheinlichkeiten sind gleich groß. Es spielt keine Rolle, ob man I oder II wählt“ gegeben wurde. Rasfeld (2004, S. 55) sieht es als bemerkenswert an, dass sich in der Gruppe mit Vorkenntnissen mehr als die Hälfte der Schülerinnen und Schüler für diese Antwort entschieden hat – die Begründungen dieser falschen Aufgabenlösung zeichnen sich durchgängig durch die fälschliche Annahme einer „Proportionalitätsregel“ aus: „Es wird davon ausgegangen, dass die *Halbierung* der Trefferwahrscheinlichkeit beim Übergang zum Glücksrad II durch die *Verdopplung* der Versuchsdurchführungen gerade ausgeglichen wird.“ Jedoch wird angemerkt, dass „in einigen Begründungen [...] auch die Unsicherheit“ (Rasfeld, 2004, S. 55) zwischen falscher proportionaler rechnerischer Überlegung und richtiger Intuition deutlich wird. Bei den beiden korrekten Begründungen der richtigen Antwort wurden die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten der in der Aufgabenstellung beschriebenen Ereignisse *berechnet*. Typische falsche Begründungen der richtigen Antwort beruhen vermutlich im Wesentlichen „auf der Vorstellung, dass es bei einer extrem kleinen Trefferwahrscheinlichkeit auch in noch so vielen Versuchen kaum gelingt, zufällig einen Treffer zu landen (‚Lottoerfahrung‘)“ (Rasfeld, 2004, S. 54). Dem gegenüber wird von dem relativ geringen Anteil an Schülerinnen und Schülern, die die Antwort „Es ist wahrscheinlicher, mit zwei Versuchen mindestens einmal bei II zu gewinnen“ gewählt hatten, 9% aller getesteten Schülerinnen und Schüler, „in der Regel gerade umgekehrt [argumentiert], indem [...] die Anzahl der Versuchsdurchführungen für ausschlaggebend und die des günstigen Flächenanteils für unbedeutsam“ (Rasfeld, 2004, S. 55) angesehen wird. Zusammenfassend wird von Rasfeld (2004, S. 56) für die vorliegende Aufgabe festgehalten, dass sowohl bei den Schülerinnen und Schülern mit Vorkenntnissen als auch bei den Schülerinnen und Schülern ohne Vorkenntnisse „trotz relativ vieler Entscheidungen für die richtige Antwort [...] eine intuitiv richtig verankerte Vorstellung vom Wirken der Additionsregel“ fehlt.

Bei der erwarteten Lösung wird die Wahrscheinlichkeit als geometrische Wahrscheinlichkeit, welche als eine Verallgemeinerung der Laplace-Wahrscheinlichkeit aufgefasst werden kann, so wie im Abschnitt 2.2.3 beschrieben, interpretiert. Im Vordergrund steht die Anwendung des Wissens zur allgemeinen Additionsregel für die Wahrscheinlichkeiten konjunktiver Ereignisse, welches dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist. Die zur korrekten Lösung

führenden Verfahren sind den „higher order heuristics“ zuzuordnen. Aufgrund des Erwerbs durch Instruktion stellt die zur Lösung erforderliche Intuition eine Sekundärintuition dar. Das zur Lösung erforderliche Vorgehen kann der Phase der formalen Operationen, der Stufe III des probabilistischen Denkens, zugeordnet werden.

Die große relative Häufigkeit der falschen Antwort „Die Wahrscheinlichkeiten sind gleich groß. Es spielt keine Rolle, ob man I oder II wählt“ kann mit der Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Adjustierung von einem Anker aus* und den damit einhergehenden Fehlvorstellungen bei der Bewertung konjunktiver und disjunktiver Ereignisse, im Sinne einer kognitiven Verzerrung, erklärt werden. Dabei wird, von der leicht bestimmbaren Wahrscheinlichkeit von 50% für einen Gewinn beim Glücksrad I beim einmaligen Versuch ausgehend, die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn beim Glücksrad II beim zweimaligen Versuch beispielsweise durch die von Rasfeld (2004) beschriebene, nicht zutreffende Annahme einer Proportionalitätsregel eingeschätzt, wobei die Wahrscheinlichkeit dieses konjunktiven Ereignisses, wie von Tversky und Kahneman (1982a) beschrieben, überschätzt wird. Dass die Heuristik der *Adjustierung von einem Anker aus* angewendet wird, lässt sich damit erklären, dass das zur Lösung erforderliche Wissen zur allgemeinen Additionsregel für die Wahrscheinlichkeiten konjunktiver Ereignisse dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist. Die Formulierung „Für welches Rad würdest *du* dich entscheiden?“ trägt eventuell auch bei der vorliegenden Aufgabe dazu bei, dass die Vorstellungswelt der Schülerinnen und Schüler eine größere Nähe zum *konkreten* Ergebnis der beiden Versuche als zur abstrakten Einschätzung der Wahrscheinlichkeiten für die *möglichen* Ergebnisse dieser Versuche aufweist.

Die vergleichsweise geringe relative Häufigkeit der richtigen Antwort „Es ist wahrscheinlicher, mit einem Versuch bei I zu gewinnen“ kann damit erklärt werden, dass das zur Lösung erforderliche Wissen zur allgemeinen Additionsregel für die Wahrscheinlichkeiten konjunktiver Ereignisse, wie beschrieben, dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist. Die geringe Anzahl richtiger Begründungen lässt sich darauf zurückführen, dass die zur korrekten Lösung führenden Verfahren den „higher order heuristics“ zuzuordnen sind.

Für eine Gesamtauswertung wurde bei jeder der 14 Aufgaben ein Punkt für jede richtig gegebene Antwort vergeben. Gemäß Rasfeld (2004, S. 57) liegt das arithmetische Mittel unter Berücksichtigung der Ergebnisse aller getesteten Schülerinnen und Schüler bei 5,22 Punkten, die Standardabweichung beläuft sich auf 1,89 Punkte. Für die Ergebnisse der Schülerinnen und Schüler aus der Gruppe mit Vorkenntnissen ergibt sich ein arithmetisches Mittel von 5,69 Punkten, bei einer Standardabweichung von ebenfalls 1,89 Punkten. Das arithmetische Mittel für die Ergebnisse der Schülerinnen und Schüler aus der Gruppe ohne Vorkenntnisse beträgt 4,73 Punkte, die Standardabweichung beläuft sich auf 1,93 Punkte. Rasfeld (2004, S. 59) hält hierzu fest, dass die Aufgaben des Tests von den Schülerinnen und Schülern aus der Gruppe mit stochastischen Vorkenntnissen im Vergleich zu den Schülerinnen und Schülern aus der Gruppe ohne stochastische Vorkenntnisse zwar im Durchschnitt besser gelöst wurden, hebt jedoch hervor, dass die 0,96 Punkte Differenz, welche in etwa einer richtigen Antwort mehr im ganzen Test entsprechen, „sicherlich nicht als *bedeutsamer* Lernzuwachs“ betrachtet werden können.

Für jede korrekte Begründung wurde ebenfalls ein Punkt vergeben. Unter Berücksichtigung der Leistungen aller getesteten Schülerinnen und Schüler ergibt sich ein arithmetisches Mittel von 2,70 Punkten und eine Standardabweichung von 2,05 Punkten (Rasfeld, 2004, S. 57). Das arithmetische Mittel für die Ergebnisse der Schülerinnen und Schüler aus der Gruppe mit Vorkenntnissen beträgt 3,71 Punkte, die Standardabweichung 2,25 Punkte. Für die Ergebnisse der Schülerinnen und Schüler aus der Gruppe ohne Vorkenntnisse liegt das arithmetische Mittel bei 1,97 Punkten, die Standardabweichung beläuft sich auf 1,76 Punkte. Diesbezüglich wird von Rasfeld (2004, S. 59) festgehalten, dass Schülerinnen und Schüler aus der Gruppe ohne stochastische Vorkenntnisse Antworten signifikant weniger häufig kor-

rekt begründen als Schülerinnen und Schüler aus der Gruppe mit stochastischen Vorkenntnissen, wobei hinzugefügt wird, „dass durchschnittlich 3,71 richtige Begründungen bei 14 möglichen in der Gruppe der [Schülerinnen und] Schüler mit Vorkenntnissen nicht überzeugen“. Das arithmetische Mittel für die Anzahl der fehlenden Begründungen unter Berücksichtigung der Leistungen aller getesteten Schülerinnen und Schüler ergibt sich zu 5,33, bei einer Standardabweichung von 4,38, und wird als recht hoch eingestuft. Rasfeld (2004, S. 57) erläutert hierzu, dass fehlende Begründungen nur teilweise durch nicht bearbeitete Aufgaben bedingt sind, da „die Anzahl der [Schülerinnen und] Schüler, die jeweils keine Begründung abgeben, immer deutlich über der Anzahl derjenigen liegt, die die Bearbeitung des jeweiligen Problems von vornherein ablehnt“. Dies legt den Schluss nahe, dass das Begründen einer Lösung „offenbar eine Leistung [darstellt], die ungewohnt ist und im alltäglichen Mathematikunterricht keinen festen Platz besitzt“ (Rasfeld, 2004, S. 57).

Gemäß Rasfeld (2004) kommen die Schülerinnen und Schüler aus der Gruppe mit Vorkenntnissen aus drei verschiedenen Schulklassen, also Klassen, in denen Stochastikunterricht stattgefunden hat, wie auch die Schülerinnen und Schüler aus der Gruppe ohne Vorkenntnisse aus drei verschiedenen Schulklassen kommen, Klassen, in denen kein Stochastikunterricht durchgeführt worden ist. In den Klassen mit Stochastikunterricht liegen die Mediane bei 4,5 Punkten, 5,5 Punkten und 7 Punkten, in den Klassen ohne Stochastikunterricht jeweils bei 5 Punkten, wobei die Spannweiten und die Größe der Quartilabstände in den Klassen ohne Stochastikunterricht allesamt größer sind als in den Klassen mit Stochastikunterricht (Rasfeld, 2004, S. 57). Rasfeld folgert daraus, dass bei den Klassen mit Stochastikunterricht „die Art und Weise, *wie* Stochastik unterrichtet wird, für den Lernerfolg von entscheidender Bedeutung [ist]“ (Rasfeld, 2004, S. 58) und bei den Klassen ohne Stochastikunterricht „mit deutlich größeren Unterschieden in den Fähigkeiten, Situationen mit Zufallscharakter intuitiv einzuschätzen, [zu] rechnen [ist]“ (Rasfeld, 2004, S. 57).

4.4.3 Zusammenfassung der Ergebnisse von Rasfeld

Zusammenfassend kommt Rasfeld (2004, S. 59) zu dem Schluss, dass sich das intuitive stochastische Denken zwar durch den Stochastikunterricht verbessert, jedoch „nicht im erwünschten Ausmaß“. Neben den bereits bei der Analyse der einzelnen Aufgaben beschriebenen Fehlvorstellungen, die für Rasfeld (2004, S. 59) trotz des Stochastikunterrichts „noch im erheblichen, teilweise unverändert großen Umfang“ fortbestehen, werden folgende Defizite der Schülerinnen und Schüler aufgeführt: „Sie haben z. B. Schwierigkeiten beim Modellieren stochastischer Problemstellungen, gehen unreflektiert mit Laplace-Wahrscheinlichkeiten um, können die Idee der [stochastischen] Unabhängigkeit nicht konsequent in Aufgaben umsetzen und zeigen ein mangelndes Verständnis in der Interpretation [der Aussage] des [empirischen] Gesetzes der großen Zahlen“ (Rasfeld, 2004, S. 59).

4.4.4 Folgerungen aus den Befunden von Rasfeld

Im Hinblick auf mögliche Maßnahmen, um den festgestellten Defiziten entgegenzuwirken, verweist Rasfeld (2004) auf die „Empfehlungen zu Zielen und zur Gestaltung des Stochastikunterrichts“ des Arbeitskreises Stochastik der GDM und hebt selbst insbesondere vier Forderungen hervor, welche sich mit den Empfehlungen des Arbeitskreises Stochastik der GDM decken:

- Erstens: „Stochastik sollte im Studium aller angehenden [Mathematiklehrerinnen und] Mathematiklehrer verbindlich vorgeschrieben werden“ (Rasfeld, 2004, S. 59),

im Sinne einer „*stochastischen Allgemeinbildung* [...], wie sie zu angemessenem Verhalten innerhalb von stochastischen Situationen [...] [im] beruflichen, gesellschaftlichen und persönlichen Leben erforderlich [ist]“ (Arbeitskreis Stochastik der GDM, 2003, S. 21).

- Zweitens: „Stochastik sollte bereits in den Mathematikunterricht der Grundschule einbezogen werden“ (Rasfeld, 2004, S. 59), also „zum verbindlichen Bestandteil aller Pläne für den Mathematikunterricht von der 1. bis zur 12./13. Klasse gehören“ (Arbeitskreis Stochastik der GDM, 2003, S. 21).
- Drittens: „Stochastik sollte nicht in abgeschlossenen Unterrichtseinheiten, sondern als durchgängiges Prinzip gelehrt werden“ (Rasfeld, 2004, S. 60), das heißt „stochastische Inhalte sollten nicht unverbunden neben den gängigen Inhalten des Mathematikunterrichts stehen, sondern mit diesen vernetzt werden“ (Arbeitskreis Stochastik der GDM, 2003, S. 21).
- Und Viertens: „Wünschenswert ist ein nach der genetischen Methode ausgerichteter Stochastikunterricht, der sich zum einen an den erkenntnistheoretischen Prozessen orientiert, aus denen heraus die stochastischen Begriffe und Methoden erwachsen sind, und zum anderen an den intuitiven Vorerfahrungen der Kinder anknüpft, die es vorsichtig zu korrigieren, stabilisieren und zu erweitern gilt“ (Rasfeld, 2004, S. 60); dem entsprechen beispielsweise: „Der Stochastikunterricht sollte [...] durch einen hohen Stellenwert experimenteller Arbeiten und durch selbstständige Datenerhebungen charakterisiert sein“ (Arbeitskreis Stochastik der GDM, 2003, S. 22), „Bei der Behandlung im Unterricht sollten Primärintuitionen und Vorerfahrungen der [Schülerinnen und] Schüler analysiert und aufgegriffen werden. Außerdem sind den [Schülerinnen und] Schülern Möglichkeiten zu verschiedenen Lösungswegen und einem Vorgehen auf enaktiver Ebene anzubieten“ (Arbeitskreis Stochastik der GDM, 2003, S. 23) sowie „‚Anfangsbegegnungen‘ [sollten] besonders ansprechend, typisch und einprägsam [sein]“ (Arbeitskreis Stochastik der GDM, 2003, S. 22).

4.5 Die Studie von Engel und Sedlmeier (2005)

4.5.1 Allgemeines

In der Studie von Engel und Sedlmeier (2005) wurde die Entwicklung der statistischen Kompetenz – im Speziellen die Entwicklung des Verständnisses von Zufall und Variabilität – bei Schülerinnen und Schülern der Klassenstufen 5, 7 und 9 im Alter von 10 bis 16 Jahren im Großraum einer baden-württembergischen Stadt untersucht (N = 222).

In den drei Schularten Hauptschule, Realschule und Gymnasium wurde in jeder der zu untersuchenden Klassenstufen eine von der jeweiligen Lehrkraft im Fach Mathematik als durchschnittlich eingeschätzte Klasse ausgewählt, wobei zwischen den einzelnen Schularten kein nennenswerter Unterschied in der Zusammensetzung der Klassen bezüglich Alter und Geschlecht bestand. Die Zusammensetzung der Stichprobe wird von Engel und Sedlmeier (2005, S. 171) als repräsentativ für alle Schülerinnen und Schüler in Baden-Württemberg angesehen, da die Schülerinnen und Schüler diese drei Schularten zu etwa gleichen Teilen besuchen. An-

gemerkt wird, dass durch die Konzentration auf Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I bewusst eine vergleichbare Altersgruppe zu früheren Untersuchungen, wie der im Abschnitt 4.2 beschriebenen von Green (1982), gewählt wurde. Aufgrund der in Baden-Württemberg gültigen Lehrpläne wird es von Engel und Sedlmeier (2005, S. 171) als gesichert angesehen, dass die getesteten Schülerinnen und Schüler keinen Stochastikunterricht und keine (instruktionalen) Vorerfahrungen mit Zufallsexperimenten und Simulationen hatten.

Bei der vorliegenden Querschnittuntersuchung waren von den Schülerinnen und Schülern vier Aufgaben zu bearbeiten. Engel und Sedlmeier (2005, S. 169) weisen darauf hin, dass bei der Wahl der Aufgaben auf Lösungswege geachtet wurde, bei denen allgemeine mathematische Kompetenzen im Vergleich zu der zu untersuchenden statistischen Kompetenz nur eine sehr untergeordnete Rolle einnehmen – dies ist erforderlich, da das Niveau der allgemeinen mathematischen Kompetenzen bei den Schülerinnen und Schülern mit zunehmender Dauer des Schulbesuchs erfahrungsgemäß ansteigt. Beispielhaft wird der Umgang mit Verhältnissen und Brüchen angeführt. Um die Ergebnisse vergleichen und generalisieren zu können, wurde auch darauf geachtet, Aufgaben auszuwählen, die bereits bei früheren Untersuchungen verwendet wurden.

Bezüglich der Auswertung der Antworten der Schülerinnen und Schüler weisen Engel und Sedlmeier (2005, S. 171) darauf hin, dass sich das Hauptergebnis bei jeder Aufgabe auf den Trend von Klassenstufe 5 bis Klassenstufe 9 bezieht – dies wird damit begründet, dass eine isolierte Betrachtung des Verlaufs bei einer einzigen Schulart nur schwer interpretierbar wäre. Gemäß Engel und Sedlmeier treten bei allen drei Schularten Selektionseffekte auf, die sich zwar gegenseitig ausgleichen, aber isoliert schlecht abschätzen lassen. So sind mit zunehmender Klassenstufe an der Hauptschule immer mehr Schülerinnen und Schüler, die die Kriterien für einen Übertritt an die Realschule oder das Gymnasium nicht erfüllen, wohingegen die Selektion am Gymnasium und zum Teil auch an der Realschule in die umgekehrte Richtung geht. Bei Aufgaben, deren Auswertung systematische Unterschiede zwischen den einzelnen Schularten erkennen lässt, werden diese Unterschiede beschrieben.

4.5.2 Aufgaben und Ergebnisse der Auswertung

„Engel & Sedlmeier: Aufgabe 1“. Bei dieser Aufgabe sollte von den Schülerinnen und Schülern eine typische Folge von Wappen und Zahl beim 20-maligen Werfen einer Münze notiert werden, wobei „W“ für „Wappen“ und „Z“ für „Zahl“ zu schreiben war. Die Originalformulierung[1] der Aufgabe lautete: „Stell Dir vor, Du wirfst zwanzig mal eine Münze. Bei jedem Wurf liegt entweder Wappen (W) oder Zahl (Z) oben. Wie könnte das Ergebnis der 20 Würfe aussehen? Welche Folge von W und Z könnte sich ergeben? Trage eine Dir typisch erscheinende Folge ein!“ Vorgedruckt waren die abgebildeten Felder.

Erwartete Antwort: (Fehlanzeige – es wird keine spezifische Folge angegeben.)

[1]Vgl. Engel, J. & Sedlmeier, P. (2004). Zum Verständnis von Zufall und Variabilität in empirischen Daten bei Schülern. *Unterrichtswissenschaft. Zeitschrift für Lernforschung*, 2, 169-191 – diese Version wurde anschließend überarbeitet und ins Englische übertragen.

Es handelt sich also um ein wort- bzw. buchstabenkodifiziertes Problem, auch wenn der Einsatz eines Zufallsgerätes in einer Alltagssituation beschrieben wird. Die Problemrahmung entspricht dem „Social Judgement Framing“. Bei der vorliegenden Aufgabe wird nicht die Vorstellung von Wahrscheinlichkeit, sondern die Vorstellung von Zufall untersucht.

Anhand dieser Aufgabenstellung sollte das Verständnis der Schülerinnen und Schüler von der stochastischen Unabhängigkeit von Ereignissen überprüft werden (Engel & Sedlmeier, 2005). Die Antworten der Schülerinnen und Schüler wurden nach folgenden vier Kriterien analysiert: erstens nach der relativen Häufigkeit von Wappen in der Münzwurfserie, zweitens nach der Anzahl der Übergänge von Wappen auf Wappen und Zahl auf Zahl, drittens nach der Anzahl der Runs von Wappen und Zahl und viertens nach der Länge des längsten Runs.

Bei der Analyse der Antworten der Schülerinnen und Schüler nach der relativen Häufigkeit von Wappen in der Münzwurfserie wurde für jede Klassenstufe und für jede Schulart jeweils der arithmetische Mittelwert für die Anzahl der Wappen in der Münzwurfserie berechnet. Hierbei ergaben sich über alle Klassenstufen und Schularten hinweg jeweils Werte nah an dem für Engel und Sedlmeier (2005, S. 171) theoretisch korrekten Wert[2] von 10 – als Median wurde in allen Klassenstufen und Schularten durchweg 10 erhalten. Als Ergebnis wird daher festgehalten, dass es keine signifikante Bevorzugung von Wappen gegenüber Zahl oder umgekehrt gibt. Bezüglich der ähnlichen Untersuchung von Green (1990) merken Engel und Sedlmeier (2005, S. 171) an, dass Green (1990) die Standardabweichungen berechnet und feststellt, dass die Standardabweichungen durchgehend kleiner sind als der theoretisch korrekte Wert von $\sqrt{20 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \approx 2{,}23$, woraus der Schluss gezogen wird, dass die zufällige Variabilität unterschätzt wird, das heißt, dass die Schülerinnen und Schüler zu häufig 9, 10 oder 11 Wappen wählen. Dieser Schluss wird von Engel und Sedlmeier (2005, S. 172) für fragwürdig gehalten, da in der Aufgabenstellung verlangt wurde, eine *einzige* typische Münzwurfserie aufzuschreiben und nicht 25 typische zufällige Münzwurfserien. Bei einer einzigen zu notierenden Münzwurfserie ist es für Engel und Sedlmeier logisch, dass die meisten der getesteten Schülerinnen und Schüler eine Münzwurfserie angeben, die die wahrscheinlichste Anzahl an Wappen hat.

Neben der Untersuchung der relativen Häufigkeit von Wappen wurden die Antworten der Schülerinnen und Schüler hinsichtlich der Anzahl der Übergänge von Wappen auf Wappen und Zahl auf Zahl analysiert, das heißt danach, wie oft in einer Münzwurfserie gleiche Symbole aufeinanderfolgen. Bezogen auf den theoretisch korrekten Wert, welcher sich unter der Annahme der stochastischen Unabhängigkeit der Ergebnisse der einzelnen Würfe (das heißt unter der Annahme, dass die Wahrscheinlichkeit für Wappen und für Zahl bei jedem Wurf 0,5 beträgt) zu $(20 - 1) \cdot 0{,}5 = 9{,}5$ berechnet, wird von Engel und Sedlmeier (2005, S. 172) festgestellt, dass 80% der Schülerinnen und Schüler in Klassenstufe 5, 83% in Klassenstufe 7 und sogar 84% in Klassenstufe 9 Münzwurfserien gewählt haben, die zu oft wechseln. Der arithmetische Mittelwert für die Anzahl der Übergänge von Wappen auf Wappen und Zahl auf Zahl beträgt 7,58 in Klassenstufe 5, 8,01 in Klassenstufe 7 und 7,48 in Klassenstufe 9. Es zeigt sich somit für Engel und Sedlmeier eine geringfügige Verschlechterung mit zunehmender Dauer des Schulbesuchs – jedoch werden die Unterschiede zwischen den einzelnen Klassenstufen als nicht signifikant eingestuft (Engel & Sedlmeier, 2005, S. 172). Eine Auswertung nach Schularten wurde nicht veröffentlicht. Zusammenfassend wird festgehalten, dass sich die menschliche Intuition offensichtlich mit dem Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit, welches bei der vorliegenden Aufgabe durch die Unregelmäßigkeit einer zufälligen Münzwurfserie repräsentiert wird, schwer tut. Dies wurde gemäß Engel und Sedlmeier (2005, S. 172) auch in vielen Studien mit Erwachsenen dokumentiert: Ist fünf Mal hintereinander Wappen ge-

[2]Engel und Sedlmeier (2005) scheinen diesbezüglich von einer Binomialverteilung auszugehen mit $n = 20$ und $p = 0{,}5$, sodass sich als Erwartungswert 10 ergibt und die Standardabweichung ungefähr 2,23 beträgt.

kommen, dann erwartet die Mehrzahl der Erwachsenen mit größerer Wahrscheinlichkeit Zahl beim nächsten Wurf – „Jetzt ist aber Zahl dran!“ – der typische, als „gambler’s fallacy“ bezeichnete Fehlschluss.

Zusätzlich zur Untersuchung der Anzahl der Übergänge von Wappen auf Wappen und Zahl auf Zahl wurden die Antworten der Schülerinnen und Schüler hinsichtlich der Anzahl der Runs von Wappen und Zahl analysiert, das heißt danach, wie viele Blöcke gleicher Symbole in einer Münzwurfserie enthalten sind. Die Auswertung hierfür lieferte laut Engel und Sedlmeier (2005, S. 172) im Wesentlichen dasselbe Bild wie für die Anzahl der Übergänge von Wappen auf Wappen und Zahl auf Zahl, und zwar unabhängig davon, ob die arithmetischen Mittelwerte betrachtet wurden oder die gegenüber Ausreißern stabileren Mediane und Quantile. Diesbezüglich ist anzumerken, dass diese Art der Auswertung sogar dasselbe Bild ergeben *muss*, da es sich nur um die „umgekehrte“ Betrachtungsweise zu vorhin handelt: Ausgehend vom Ergebnis des ersten Münzwurfes, welches dem (Beginn des) ersten Run(s) entspricht, stellt das Ergebnis jedes nachfolgenden Münzwurfes im Vergleich zum Ergebnis des unmittelbar vorangegangenen Münzwurfes entweder einen Übergang von Wappen auf Wappen oder von Zahl auf Zahl dar, und somit *keinen* neuen Run, oder es stellt *keinen* Übergang von Wappen auf Wappen oder von Zahl auf Zahl dar, somit aber einen neuen Run. Bezüglich der theoretisch korrekten Anzahl, welche sich unter der Berücksichtigung, dass das Ergebnis des ersten Münzwurfes im Vergleich zur vorherigen Betrachtung bereits als erster Run mitgezählt werden muss, zu $(19 - 9{,}5) + 1 = 10{,}5$ ergibt, wird von Engel und Sedlmeier (2005, S. 173) festgehalten, dass von den Schülerinnen und Schülern der Klassenstufe 5 ungefähr 80% zu viele Runs aufführen, von den Schülerinnen und Schülern der Klassenstufe 7 etwa 82% und von den Schülerinnen und Schülern der Klassenstufe 9 sogar ungefähr 85%. Der arithmetische Mittelwert für die Anzahl der Runs wird in Klassenstufe 5 mit 12,59 angegeben, in Klassenstufe 7 mit 12,26 und in Klassenstufe 9 mit 12,55. In Übereinstimmung mit der vorherigen Auswertung werden die Unterschiede zwischen den einzelnen Klassenstufen als nicht signifikant bewertet. Für die verschiedenen Schularten sind aus der Veröffentlichung von Engel und Sedlmeier folgende arithmetische Mittelwerte ersichtlich (vgl. „Table 3“ in Engel & Sedlmeier, 2005, S. 172): 12,86 für die Schülerinnen und Schüler der Hauptschule, 12,83 für die Schülerinnen und Schüler der Realschule und 11,72 für die Schülerinnen und Schüler des Gymnasiums. Der Vergleich zwischen den einzelnen Schularten zeigt für Engel und Sedlmeier (2005, S. 173), dass die Schülerinnen und Schüler des Gymnasiums bei diesem Kriterium am besten abschneiden.

Abschließend wurden die Antworten der Schülerinnen und Schüler nach einem weitverbreiteten Kriterium zur Beurteilung der Zufälligkeit einer Münzwurfserie analysiert: der Länge des längsten Runs (Engel & Sedlmeier, 2005). Für die bei der vorliegenden Aufgabe zu erwartende Länge des längsten Runs beträgt der theoretische Wert in etwa 4,322 – dieser Wert lässt sich wie folgt berechnen: $\mathrm{ld}(20) \approx 4{,}322$, wobei Engel und Sedlmeier (2005, S. 173) auf die Ausführungen von Eichelsbacher (2002) verweisen. Bei der Auswertung der Antworten der Schülerinnen und Schüler wurden die arithmetischen Mittelwerte für die Länge des längsten Runs getrennt nach Klassenstufe und Schulart ermittelt. Aus der Veröffentlichung von Engel und Sedlmeier geht hervor (vgl. Engel & Sedlmeier, 2005, S. 173), dass sich jeweils zu geringe Werte im Vergleich zum theoretisch korrekten Wert ergeben: 3,39 in Klassenstufe 5, 3,29 in Klassenstufe 7 und 3,20 in Klassenstufe 9 beziehungsweise 3,14 für die Schülerinnen und Schüler der Hauptschule, 3,06 für die Schülerinnen und Schüler der Realschule und 3,70 für die Schülerinnen und Schüler des Gymnasiums. Als Median und unterer Viertelswert wurde in allen Klassenstufen und Schularten 3 erhalten. Die Unterschiede zwischen den einzelnen Klassenstufen werden von Engel und Sedlmeier (2005, S. 173) als sehr gering eingestuft – bezüglich der verschiedenen Schularten wird festgehalten, dass sich wiederum ein leichter Vorteil für die Schülerinnen und Schüler des Gymnasiums ergibt, deren Mittelwert dem theore-

tisch zu erwartenden Wert von 4,322 am nächsten liegt, und dass die Schülerinnen und Schüler der Realschule sogar ein geringfügig schlechteres Ergebnis als die Schülerinnen und Schüler der Hauptschule haben. Zudem wird von Engel und Sedlmeier darauf hingewiesen, dass aufgrund eines falschen Verständnisses von stochastischer Unabhängigkeit auch viele Erwachsene die Länge des längsten Runs zu kurz einschätzen.

Zusammenfassend halten Engel und Sedlmeier (2005, S. 173) für die erste Aufgabe fest, dass Schülerinnen und Schüler durch alle Schularten und Klassenstufen hindurch sehr präzise sind, was die Berücksichtigung des Gleichgewichts von Wappen und Zahl betrifft. Die Probleme der Schülerinnen und Schüler fangen jedoch an, sobald sie die stochastische Unabhängigkeit zutreffend darstellen sollen – dies gilt für alle Klassenstufen, wobei keine bedeutsamen Veränderungen mit zunehmender Schuldauer erkennbar sind, weder positiv noch negativ (Engel & Sedlmeier, 2005, S. 173). Diesbezüglich wird auf die zu geringe Anzahl der Übergänge von Wappen auf Wappen und Zahl auf Zahl, die zu große Anzahl der Runs von Wappen und Zahl sowie die zu kurze Länge des längsten Runs verwiesen. Hinzugefügt wird, dass Schülerinnen und Schüler des Gymnasiums weniger Schwierigkeiten mit dem Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit haben als Schülerinnen und Schüler, die die Realschule oder die Hauptschule besuchen.

Charakteristisch für die erwartete Lösung ist, dass in der notierten „typischen“ Folge erstens Wappen und Zahl gleich oft vorkommen, zweitens 9 oder 10 Übergänge von gleichem Symbol zu gleichem Symbol enthalten sind, dies entspricht 11 bzw. 10 Runs, und drittens ein Run der Länge 4 oder 5 als längster Run enthalten ist. Im Vordergrund steht dabei, ganz allgemein, die Anwendung des Wissens zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit, hier die Ergebnisse der einzelnen Würfe der Münze betreffend. Dieses Wissen ist, wie bei den zuvor vorgestellten Studien beschrieben, anfänglich dem „higher order knowledge“ zuzuordnen und kann mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler, nach einer Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis der Schülerinnen und Schüler, im Sinne der Theorie des Conceptual Change, dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden. Die Verfahren, die zur erwarteten Lösung führen, sind den „higher order heuristics“ zuzuordnen. Aufgrund des Erwerbs durch Instruktion stellt die zur Lösung erforderliche Intuition eine Sekundärintuition dar. Das zur Lösung erforderliche Vorgehen kann der Phase der formalen Operationen, der Stufe III des probabilistischen Denkens, zugeordnet werden.

Die von Engel und Sedlmeier (2005) durch alle Klassenstufen hindurch, ohne bedeutsame Veränderungen mit zunehmender Klassenstufe, festgestellten Probleme der Schülerinnen und Schüler in Bezug auf die zutreffende Repräsentation der stochastischen Unabhängigkeit der Ergebnisse der einzelnen Würfe der Münze können darauf zurückzuführen sein, dass das Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist, was die niedrigeren Klassenstufen betrifft, und, was die höheren Klassenstufen betrifft, zwar mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler, nach einer Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis der Schülerinnen und Schüler, im Sinne der Theorie des Conceptual Change, dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden kann, aber die Anwendung dieses Wissens durch den Einfluss des Zielsystems, welches, wie bei der Studie von Green (1982) im Abschnitt 4.2.2 beschrieben, mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler zunehmend deterministischer ausgerichtet ist, verhindert wird.

Die von Engel und Sedlmeier (2005) beschriebenen Abweichungen der Lösungen der Schülerinnen und Schüler in Bezug auf die erwartete Lösung können damit erklärt werden, dass die „simple everyday heuristic“ der *Repräsentativität*, mit der Fehlvorstellungen von Zufall, im Sinne einer kognitiven Verzerrung, einhergehen, angewendet wird: in den niedrigeren Klassenstufen, weil, wie beschrieben, das Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist, und in den höheren Klassenstufen, in denen dieses Wissen dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden kann, da, wie

ebenfalls beschrieben, durch den Einfluss des Zielsystems die Anwendung des Wissens zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit auf die Ergebnisse der einzelnen Würfe der Münze verhindert wird. So können die zu häufig erfolgenden Wechsel von einem Symbol auf das andere und die zu geringe Länge des längsten Runs auf den als „gambler's fallacy" bezeichneten Fehlschluss zurückzuführen sein, der, wie im Abschnitt 3.2.6 beschrieben, auf der Vorstellung der lokalen Repräsentativität beruht, bei welcher der Zufall als sich selbst regulierender Prozess angesehen wird, in dem eine Abweichung in die eine Richtung zu einer Abweichung in die andere Richtung führt, damit das Gleichgewicht, hier zwischen der Anzahl von Wappen und der Anzahl von Zahl in der notierten Folge, wieder hergestellt wird.

Eine weitere Erklärung für Lösungen bei der vorliegenden Aufgabe, die nicht der erwarteten Lösung entsprechen, ist die Vorstellung von Zufall im Sinne von „alles ist möglich". Diese Vorstellung wird unter Umständen durch das Wissen zu Grundraum und Symmetrie, welches, wie bei den vorangegangenen Studien beschrieben, anfänglich dem „higher order knowledge" zuzuordnen ist und mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler, nach einer Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis der Schülerinnen und Schüler, im Sinne der Theorie des Conceptual Change, dem „direct accessible knowledge" zugeordnet werden kann, begünstigt.

Auf die Vorstellung von Zufall im Sinne von „alles ist möglich" lässt sich die Anwendung der „simple everyday heuristic" der *Gleichwahrscheinlichkeit* zurückführen: Alle 2^{20} möglichen Folgen beim 20-maligen Werfen einer Münze werden, berechtigterweise, als gleich wahrscheinlich angesehen; es wird dabei nicht beachtet, dass gemäß der Aufgabenstellung eine „typische" Folge, also eine Folge, die für eine ganze Klasse an Folgen repräsentativ ist, anzugeben ist. Die Lösung der Aufgabe ist in diesem Fall zwar formal falsch, basiert jedoch auf einem richtigen Gedankengang.

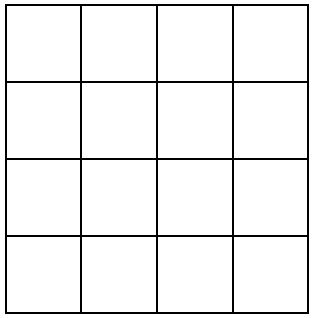
Bei der vorliegenden Aufgabe ist darüber hinaus zu berücksichtigen, dass die Anwendung der „simple everyday heuristic" der *Gleichwahrscheinlichkeit*, und damit verbunden die Angabe einer ganz speziellen und nicht zwangsläufig repräsentativen Folge, wie von Bentz und Borovcnik (1991) beschrieben, unter Umständen sowohl durch die einleitende Formulierung „Stell Dir vor, *Du* wirfst zwanzig mal eine Münze", welche die Vorstellungswelt der Schülerinnen und Schüler in eine größere Nähe zum konkreten Versuchsergebnis als zur abstrakten Einschätzung von Wahrscheinlichkeiten für Klassen an Folgen lenkt, als auch durch die konkrete Frage „*Welche* Folge ... könnte sich ergeben?", in der zur Angabe des Ergebnisses eines ganz konkreten Versuches aufgefordert wird, begünstigt wird.

Insbesondere ist bei der vorliegenden Aufgabe auch der von Bentz und Borovcnik (1991, S. 4) angeführte „Denken-Handeln-Konflikt" zu berücksichtigen: Begünstigt durch das „Social Judgement Framing" der Problemstellung ist es möglich, dass „auf der Ebene des Nachdenkens über das Problem" zwar die stochastische Unabhängigkeit der einzelnen Würfe der Münze erkannt wird, aber „die tatsächliche Wahl einer Antwort [...] durch eine *Ersatzstrategie*" erfolgt.

„Engel & Sedlmeier: Aufgabe 2". Bei dieser Aufgabe sollten die Schülerinnen und Schüler in einem aus 16 kleinen quadratischen Feldern bestehenden großen quadratischen Feld einzeichnen, wo bei einsetzendem Schneefall die ersten 16 Schneeflocken gelandet sein könnten – die Position der einzelnen Schneeflocken war hierbei mit einem „x" zu markieren. Die eingetragene Antwort sollte anschließend in schriftlicher Form erklärt werden. Die Originalformulierung[3] der Aufgabe lautete: „Das quadratische Flachdach einer Gartenhütte besteht aus 16 gleich großen quadratischen Platten. Es beginnt zu schneien. Nach einer kurzen Weile sind 16 Schneeflocken auf dem Dach gelandet. Bitte trage ein, wo die 16 Schneeflocken hin-

[3]Vgl. Fußnote 1 auf S. 147.

gefallen sein könnten (ein x für eine Schneeflocke). Erkläre Deine Antwort:“ Vorgedruckt waren die abgebildeten Felder[4].



Erwartete Antwort: (Fehlanzeige – es werden keine spezifischen Landepunkte angegeben.)

Mögliche Erklärung: (Fehlanzeige – allerdings wird erwähnt, dass ein angemessenes Zufallsverständnis durch den Verweis auf die Unvorhersehbarkeit des Zufalls oder den Einfluss einer unkontrollierten Drittvariable, wie Wind oder Wärme, zum Ausdruck kommt.)

Hierbei handelt es sich ebenfalls um ein wort- bzw. buchstabenkodifiziertes Problem, bei dem eine Alltagssituation beschrieben wird. Die Rahmung des Problems entspricht dem „Social Judgement Framing“. Auch bei dieser Aufgabe wird nicht die Vorstellung von Wahrscheinlichkeit, sondern die Vorstellung von Zufall untersucht.

Als Ausgangspunkt wurde bei dieser Aufgabe bewusst ein im Erfahrungsbereich kindlicher Beobachtungen liegendes Alltagsphänomen gewählt: einsetzender Schneefall (Engel & Sedlmeier, 2005, S. 169). Zur Begründung wird angeführt, dass dadurch ein kognitiver Konflikt ausgelöst werden sollte – durch das nicht vorhersehbare Verhalten einzelner Schneeflocken auf der einen Seite und durch die wohlbekannte Tatsache, dass nach einer gewissen Zeit des Schneefalls der Schnee überall annähernd gleich hoch liegt, beispielsweise auf einem flachen Dach, auf der anderen Seite.

Engel und Sedlmeier (2005) merken an, dass die vorliegende Aufgabe auf Piaget und Inhelder (1975) zurückgeht, welche das Verständnis für Muster in Zufallsfolgen bei Kindern erstmals untersucht haben. Zudem wurde diese Art von Aufgabe auch von Green (1982) eingesetzt, in der im Abschnitt 4.2.2 beschriebenen Variante. Bezüglich der Ergebnisse von Piaget und Inhelder (1975) und Green (1982) halten Engel und Sedlmeier (2005, S. 169) fest, dass erstaunlich ist, dass sich zum einen die meisten der getesteten Schülerinnen und Schüler für eine streng regelmäßige Verteilung entschieden haben, die keinen Bezug zum Zufall aufweist, und dass zum anderen die Tendenz zur strengen Regelmäßigkeit mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler ansteigt. Engel und Sedlmeier (2005, S. 173) weisen zudem darauf hin, dass die in der Aufgabenvariante von Green (1982) verwendeten Antwortkategorien von Borovcnik und Bentz (1991) hinsichtlich ihrer Eignung zur Feststellung des Verständnisses von Zufallseinflüssen in Frage gestellt werden – aus diesem Grund durften die Schülerinnen und Schüler bei der von Engel und Sedlmeier (2005) verwendeten Aufgabenvariante eine Verteilung der Schneeflocken auf dem Dach der Gartenhütte frei wählen, ohne irgendeine Vorgabe.

[4]Im Original waren die Felder direkt im Anschluss an den einleitenden Satz „Das quadratische Flachdach einer Gartenhütte besteht aus 16 gleich großen quadratischen Platten“ abgedruckt.

Bei der Auswertung der Antworten der Schülerinnen und Schüler wurden vier verschiedene Kategorien von Mustern identifiziert (vgl. Engel & Sedlmeier, 2005, S. 173 f.):

- erstens „Strenger Determinist“,
- zweitens „Gemäßigter Determinist“,
- drittens „Novize“ und
- viertens „Experte“.

Die vier Kategorien werden von Engel und Sedlmeier (2005) wie folgt charakterisiert:

- Beim „Strengen Deterministen“ ist ein festes Schema des Vorgehens klar erkennbar. Beispielhaft wird das Ankreuzen des Mittelpunkts in jedem der 16 quadratischen Felder genannt, also aus mathematischer Sicht das Markieren des Schnittpunkts der Diagonalen in den einzelnen Quadraten.
- Beim „Gemäßigten Deterministen“ ist noch zweifelsfrei ein Muster erkennbar, auch wenn dieses nicht bis ins letzte Detail ausgeführt ist. Genannt werden folgende Beispiele: In jedem der 16 Felder befindet sich ein Kreuz, wobei die Position innerhalb der Felder keine Systematik erkennen lässt; oder die Kreuze befinden sich nur in Feldern, die eine spezielle Lage haben, zum Beispiel sind die Kreuze nur in innenliegenden Feldern oder nur in außenliegenden Feldern gesetzt.
- Der „Novize“ ist dadurch gekennzeichnet, dass kein Muster mehr erkennbar ist. Die Kreuze sind augenscheinlich ohne System verteilt. Es gibt Felder mit mehr als einem Kreuz, insbesondere ist mindestens ein Feld ohne Kreuz. Jedoch ist die Variabilität bezüglich der Anzahl der Kreuze pro Feld sehr gering und es gibt höchstens drei Felder ohne Kreuz.
- Beim „Experten“ liegt zweifelsfrei eine rein zufällige Verteilung vor. Ein Muster ist nicht erkennbar. Zwischen vier und acht Felder sind ohne Kreuz. Es gibt weder eine Symmetrie noch eine andere Regelmäßigkeit. Die Kreuze sind offensichtlich aufs Geratewohl verteilt.

Die Klassifizierung der Antworten der Schülerinnen und Schüler in eine der vier beschriebenen Kategorien erfolgte durch drei unabhängig voneinander arbeitende Experten. In Fällen, in denen die Klassifizierung nicht eindeutig war, wurde die schriftliche Erklärung der betreffenden Schülerin beziehungsweise des betreffenden Schülers herangezogen. Engel und Sedlmeier merken an, dass nur bei einem Muster keine Klassifizierung möglich war, da dieses lediglich aus fünf Kreuzen bestand.

Zur quantitativen Auswertung bezüglich der verschiedenen Klassenstufen und Schularten wurden sogenannte „Scores“ definiert (vgl. Engel & Sedlmeier, 2005, S. 174):

- „Score 1“ stellt die relative Anzahl der Schülerinnen und Schüler dar,
  die keine „Strengen Deterministen“ sind,
- „Score 2“ stellt die relative Anzahl der Schülerinnen und Schüler dar,
  die „Novizen“ oder „Experten“ sind, und
- „Score 3“ stellt die relative Anzahl der Schülerinnen und Schüler dar,
  die „Experten“ sind.

Die Auswertung der „Scores“ ergab keinen systematischen Unterschied zwischen den drei Schularten (Engel & Sedlmeier, 2005, S. 174).

Aus der Veröffentlichung von Engel und Sedlmeier geht hervor (vgl. Engel & Sedlmeier, 2005, S. 174), dass

- erstens die relative Anzahl der „Experten“ („Score 3“)
  von Klassenstufe 5 auf Klassenstufe 7 und von Klassenstufe 7 auf Klassenstufe 9
  jeweils geringfügig abnimmt,

- zweitens die relative Anzahl der „Novizen“
  von Klassenstufe 5 auf Klassenstufe 7 deutlich abnimmt, von Klassenstufe 7 auf Klassenstufe 9 dagegen leicht zunimmt (dies folgt aus dem Vergleich von „Score 2“ und „Score 3“), und
- drittens die relative Anzahl der „Strengen Deterministen“
  von Klassenstufe 5 auf Klassenstufe 7 und von Klassenstufe 7 auf Klassenstufe 9 jeweils zunimmt (dies ergibt sich aus der Differenz von 100% und „Score 1“).

Für Engel und Sedlmeier (2005, S. 174) ist damit eine Verschlechterung mit zunehmender Dauer des Schulbesuchs bei dieser Aufgabe offenkundig.

Dieses Ergebnis deckt sich somit mit den Ergebnissen der Studien von Piaget und Inhelder (1975) und Green (1982). Bezüglich der Studie von Green (1982) wird von Engel und Sedlmeier (2005, S. 174) angemerkt, dass die dort vorgegebenen drei Antwortmöglichkeiten, „Set A“, „Set B“ und „Set C“, mit den Kategorien „Strenger Determinist“, „Gemäßigter Determinist“ und „Experte“ im Groben übereinstimmen und dass das dort erhaltene Testergebnis bestätigt werden konnte: eine Verschlechterung der Leistung mit zunehmender Dauer des Schulbesuchs. Im Hinblick auf eine mögliche Erklärung für die Verschlechterung des Testergebnisses mit zunehmender Dauer des Schulbesuchs verweisen Engel und Sedlmeier (2005) auf die von Green (1982) aufgestellte Hypothese (vgl. Abschnitt 4.2.2), dass zwei Tendenzen gegeneinander ankämpfen: zum einen eine gewisse Reife und Erfahrung und zum anderen die Dominanz des deduktiven Denkens in der Mathematik und den Naturwissenschaften, welches die Erwägung des Zufalls im Keim erstickt, indem es versucht, alles zu kodifizieren und erklären. Als Beleg für die Dominanz des deterministischen Denkens im Unterricht führen Engel und Sedlmeier (2005, S. 174) an, dass sich beispielsweise in einer Klasse der Klassenstufe 7 die Antworten der – gemäß der Einschätzung der betreffenden Lehrkraft – beiden Musterschüler(innen) bei der Schneeflocken-Aufgabe dadurch auszeichneten, dass jeweils in den 16 Feldern die Kreuze mit penibler Genauigkeit in der Mitte eingezeichnet waren.

Die von den Schülerinnen und Schülern gegebenen Erklärungen werden von Engel und Sedlmeier (2005, S. 174) als aufschlussreich für das Verständnis von Zufallseinflüssen angesehen. Beispielhaft für die Position der Deterministen werden folgende Erklärungen angeführt (Originalformulierungen[5]):

- „Weil es 16 Platten sind und 16 Schneeflocken fallen, deshalb fällt auf jede Platte [genau eine Flocke] (Hauptschule, Klasse 5)“,
- „Weil auf jede Platte eine Schneeflocke hingefallen ist (Hauptschule, Klasse 7)“,
- „Die Schneeflocken fallen gleichmäßig (Realschule, Klasse 7)“,
- „Weil überall gleichviel Schneeflocken hinfallen (Gymnasium, Klasse 7)“,
- „Theoretisch müssen sich die 16 Schneeflocken gleichmäßig auf die 16 Platten verteilen (Realschule, Klasse 9)“ und
- „Weil es gleichmäßig schneit (Gymnasium, Klasse 9)“.

Erklärungen, die auf ein Verständnis von Zufallseinflüssen hinweisen, sind für Engel und Sedlmeier dadurch gekennzeichnet, dass die Unvorhersehbarkeit des Zufalls erkannt wird oder der Einfluss einer unkontrollierten Drittvariable, wie Wärme oder Wind, zum Ausdruck kommt. Hierzu werden beispielhaft folgende Erklärungen angeführt:

- „Weil durch den Wind die Schneeflocken da hingefallen sind (Realschule, Klasse 5)“,
- „Weil in der Naturwissenschaft nicht immer alles perfekt ist. Ich hab deswegen 3 Kästchen freigelassen (Gymnasium, Klasse 5)“,

[5]Vgl. Fußnote 1 auf S. 147.

- „Weil die Schneeflocken einmal da und einmal da hinfliegen (Hauptschule, Klasse 7)“,
- „Es kommt darauf an, wie der Wind weht (Hauptschule, Klasse 7)“,
- „Schneeflocken fallen ohne System (Gymnasium, Klasse 7)“,
- „Der Schnee fällt ja nicht einfach so. Es ist ja nicht kontrollierbar oder vorhersehbar (Hauptschule, Klasse 9)“,
- „Man kann nicht wissen, wo die Schneeflocken landen. Und die Chance, dass alle 16 Schneeflocken auf alle[n] 16 Platten landen[,] ist sehr gering (Hauptschule, Klasse 9)“ und
- „Es gibt keine Begründung, sie fallen einfach zufällig. Hab die Augen zugemacht und per Zufall mit dem Stift diese Punkte getroffen (Gymnasium, Klasse 9)“.

Anzumerken ist, dass die Betrachtung der Zitate zwar einen Einblick in die Vorstellungswelt der Schülerinnen und Schüler gibt, jedoch nicht geeignet ist, um Trends im Denken der Schülerinnen und Schüler mit zunehmender Dauer des Schulbesuchs zu identifizieren (Engel & Sedlmeier, 2005, S. 174).

Die erwartete Lösung ist dadurch charakterisiert, dass das von den Landepunkten der Schneeflocken gebildete Muster augenscheinlich eine rein zufällige Verteilung darstellt, wobei weder eine Symmetrie noch irgendeine andere Regelmäßigkeit zu erkennen ist. Im Vordergrund steht dabei, wie bei der vergleichbaren Aufgabe in der Studie von Green (1982), das Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit, hier die Landepunkte der einzelnen Schneeflocken betreffend. Dieses Wissen ist, wie bei der vorangegangenen Aufgabe beschrieben, anfänglich dem „higher order knowledge“ zuzuordnen und kann mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler, nach einer Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis der Schülerinnen und Schüler, im Sinne der Theorie des Conceptual Change, dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden. Die Verfahren, die zur erwarteten Lösung führen, sind den „higher order heuristics“ zuzuordnen. Aufgrund des Erwerbs durch Instruktion stellt die zur Lösung erforderliche Intuition eine Sekundärintuition dar. Das zur Lösung erforderliche Vorgehen kann der Phase der formalen Operationen, der Stufe III des probabilistischen Denkens, zugeordnet werden.

Bei der vorliegenden Aufgabe hängt es, wie bei der vergleichbaren Aufgabe in der Studie von Green (1982), unter anderem von der Einführung von Zusatzannahmen, welche durch den interpretierbaren Eindruck der Informationen und die Beschreibung einer Alltagssituation aus dem Erfahrungsbereich der Schülerinnen und Schüler begünstigt wird, ab, ob das Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit auf die Landepunkte der einzelnen Schneeflocken angewendet wird. Hierbei ist wiederum der Einfluss des mit zunehmender Klassenstufe größer werdenden Umfangs des naturwissenschaftlichen Wissens, der unter Umständen zur Einführung von zusätzlichen Annahmen beiträgt und somit zu der von Engel und Sedlmeier (2005) festgestellten „Verschlechterung“ mit zunehmender Dauer des Schulbesuchs führt, zu berücksichtigen.

Dass das Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit nicht zur Lösung der vorliegenden Aufgabe angewendet wird, kann, wie bei der vorangegangenen Aufgabe, damit erklärt werden, dass dieses Wissen dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist, was die niedrigeren Klassenstufen betrifft, und, was die höheren Klassenstufen betrifft, zwar mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler, nach einer Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis der Schülerinnen und Schüler, im Sinne der Theorie des Conceptual Change, dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden kann, aber die Anwendung dieses Wissens durch den Einfluss des Zielsystems, welches, wie bei der vergleichbaren Aufgabe in der Studie von Green (1982) beschrieben, mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler zunehmend deterministischer ausgerichtet ist, verhindert wird.

Die von Engel und Sedlmeier (2005) beschriebenen Abweichungen von der erwarteten Lösung können mit der Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Repräsentativität*, mit der Fehlvorstellungen von Zufall, im Sinne einer kognitiven Verzerrung, einhergehen, erklärt werden. So wird unter Umständen, wie ebenfalls bei der vergleichbaren Aufgabe in der Studie von Green (1982) beschrieben, fälschlicherweise von der globalen Regelmäßigkeit des Phänomens Schneefall auf die lokale Regelmäßigkeit, hier der Landepunkte der einzelnen Schneeflocken, geschlossen. Dass die Heuristik der *Repräsentativität* angewendet wird, lässt sich in den niedrigeren Klassenstufen darauf zurückführen, dass das Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit, wie beschrieben, dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist, und in den höheren Klassenstufen, in denen dieses Wissen dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden kann, darauf, dass, wie ebenfalls beschrieben, durch den Einfluss des Zielsystems die Anwendung des Wissens zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit auf die Landepunkte der einzelnen Schneeflocken verhindert wird.

Bei der vorliegenden Aufgabe können Lösungen, die nicht der erwarteten Lösung entsprechen, auch mit der Vorstellung von Zufall im Sinne von „alles ist möglich“ erklärt werden. Diese Vorstellung wird unter Umständen durch das Wissen zu Grundraum und Symmetrie, dem Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit, welches, wie bei der vorangegangenen Aufgabe beschrieben, anfänglich dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist und mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler, nach einer Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis der Schülerinnen und Schüler, im Sinne der Theorie des Conceptual Change, dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden kann, begünstigt. So kann die Vorstellung von Zufall im Sinne von „alles ist möglich“ insbesondere in den höheren Klassenstufen, im Zusammenhang mit der Interpretation der grafischen Darstellung, die 16 Felder zeigt, und der Vorgabe, dass 16 Kreuze einzuzeichnen sind, zu einer Lösung führen, die als deterministisch eingestuft wird. Dies kann eine weitere Erklärung für die von Engel und Sedlmeier (2005) festgestellte „Verschlechterung“ mit zunehmender Dauer des Schulbesuchs darstellen.

Eine als deterministisch eingestufte Lösung kann bei der vorliegenden Aufgabe auch darauf zurückzuführen sein, dass, ausgehend von der grafischen Darstellung, die 16 Felder zeigt, und der Vorgabe, dass 16 Kreuze einzuzeichnen sind, im Sinne des „Outcome Approach“ symbolisch das Ergebnis des Schneefalls dargestellt wird: Das flache Dach der Gartenhütte ist mit Schnee bedeckt; die 16 Landepunkte der Schneeflocken werden hierbei nicht als einzelne Landepunkte, sondern als Repräsentanten der Klasse von Landepunkten in einem Feld angesehen, sodass die Lösung der Aufgabe zwar formal nicht mit der erwarteten Lösung übereinstimmt, jedoch auf einem richtigen Gedankengang basiert.

„Engel & Sedlmeier: Aufgabe 3“. Diese Aufgabe diente dazu, eine Inkonsistenz in der einschlägigen Literatur zu überprüfen. So zeigen Kinder im Alter von 11 oder 12 Jahren gemäß Piaget und Inhelder (1975) bereits eine deutliche Sensitivität für den Einfluss der Größe einer Stichprobe, während in der Urteilsforschung davon ausgegangen wird (vgl. beispielsweise Kahneman & Tversky, 1972; Piattelli-Palmarini, 1994), dass Erwachsene den Einfluss der Größe einer Stichprobe in relevanten Urteilen nicht berücksichtigen. Unter Bezug auf Sedlmeier (1998) und Sedlmeier und Gigerenzer (1997) verweisen Engel und Sedlmeier (2005, S. 170) darauf, dass bei den betreffenden Studien zwei unterschiedliche Arten von Aufgaben zum Einsatz kamen:

- zum einen Aufgaben zu Häufigkeitsverteilungen, in denen ein Vertrauensurteil zu Anteilen oder Mittelwerten aus einer Stichprobe (einer Häufigkeitsverteilung) gefordert wurde (Piaget & Inhelder, 1975), und
- zum anderen Aufgaben zu Stichprobenverteilungen, in denen die Variation von empirischen Stichprobenverteilungen beurteilt werden musste (Kahneman & Tversky, 1972; Piattelli-Palmarini, 1994).

Zur Untersuchung, ob sich die unterschiedlichen Lösungsraten für Aufgaben zu Häufigkeitsverteilungen und Aufgaben zu Stichprobenverteilungen bereits bei Kindern und Jugendlichen zeigen und ob sich die Sensitivität für den Einfluss der Größe einer Stichprobe im Laufe der Schulzeit verändert, wurde die dritte Aufgabe von Engel und Sedlmeier (2005) in zwei verschiedenen Versionen, einer Häufigkeitsverteilungsversion und einer Stichprobenverteilungsversion, eingesetzt.

In beiden Versionen war der Text der Angabe identisch (Originalformulierung[6]): „Ungefähr die Hälfte aller Neugeborenen sind Mädchen, die andere Hälfte Jungen. Krankenhaus A: im Durchschnitt werden 3 Kinder pro Tag geboren. Krankenhaus B: im Durchschnitt werden 5 Kinder pro Tag geboren.“ Ebenso waren die vorgegebenen Multiple-Choice-Antworten identisch: „Krankenhaus A (mit 3 Geburten pro Tag)“, „Krankenhaus B (mit 5 Geburten pro Tag)“ und „In beiden Krankenhäusern sind die Chancen dafür ungefähr gleich“. Die Formulierung der Aufgabenstellung lautete

- in der Häufigkeitsverteilungsversion: „In welchem Krankenhaus wird es an einem bestimmten Tag eher vorkommen, dass alle Geburten Mädchen sind? Kreuze an!“,
- in der Stichprobenverteilungsversion dagegen: „In welchem Krankenhaus wird es im Laufe eines Jahres mehr Tage geben, an denen alle Geburten Mädchen sind? Kreuze an!“

Engel und Sedlmeier (2005, S. 170) erläutern hierzu, dass sich die Häufigkeitsverteilungsversion auf die Verteilung von Jungen und Mädchen in einer Stichprobe, das heißt den Geburten an einem Tag, bezieht, wohingegen die Stichprobenverteilungsversion aus den 365 Geburtenanteilen der Mädchen über ein Jahr hinweg besteht. Die beiden Versionen der Aufgabe wurden zufällig unter den Schülerinnen und Schülern verteilt, wobei die Schülerinnen und Schüler nicht von der Existenz unterschiedlicher Versionen wussten.

Erwartete Antwort: Krankenhaus A (mit 3 Geburten pro Tag)

Es handelt sich bei dieser Aufgabe wiederum um ein wort- bzw. buchstabenkodifiziertes Problem, bei dem eine Alltagssituation beschrieben wird. Die Problemrahmung ist dem „Social Judgement Framing“ zuzuordnen. Die Wahrscheinlichkeit ist in nicht-numerischer Form repräsentiert.

Anhand der Auswertung der Antworten der Schülerinnen und Schüler wird von Engel und Sedlmeier (2005, S. 175) festgestellt, dass sich insgesamt gesehen die Sensitivität für den Einfluss der Größe einer Stichprobe nur unwesentlich verbessert mit zunehmender Dauer des Schulbesuchs. So ist zwar sowohl bei der Häufigkeitsverteilungsversion als auch bei der Stichprobenverteilungsversion von Klassenstufe 5 auf Klassenstufe 7 ein leicht positiver Trend erkennbar, was die Lösungsraten betrifft, dieser Trend setzt sich von Klassenstufe 7 auf Klassenstufe 9 aber nur bei der Häufigkeitsverteilungsversion fort, bei der Stichprobenverteilungsversion kehrt er sich um.

Bezüglich der beiden Versionen der Aufgabe wird für die Häufigkeitsverteilungsversion eine größere Lösungsrate im Vergleich zur Stichprobenverteilungsversion bestätigt. Zu beachten ist jedoch, dass die Lösungsraten in den einzelnen Klassenstufen auch für die Häufigkeitsverteilungsversion fast im Zufallsbereich liegen. Engel und Sedlmeier (2005, S. 175) weisen unter Bezug auf Sedlmeier und Gigerenzer (1997) darauf hin, dass die Lösungsraten für beide Versionen der Aufgabe geringer sind als die für erwachsene Testpersonen im Durchschnitt ermittelte Lösungsrate. Als mögliche Erklärung für die größere Lösungsrate bei der Häufig-

[6]Vgl. Fußnote 1 auf S. 147.

keitsverteilungsversion lässt sich die von Engel und Sedlmeier (2005, S. 170) unter Verweis auf Sedlmeier und Gigerenzer (1997) geäußerte Vermutung anführen, dass Menschen eine Intuition besitzen, die der Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen entspricht und auf Häufigkeitsverteilungen anwendbar ist, allerdings nicht auf Stichprobenverteilungen.

Die Wahrscheinlichkeit wird bei der erwarteten Lösung als frequentistische Wahrscheinlichkeit interpretiert. Im Vordergrund steht die Anwendung des Wissens zur Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen. Dieses Wissen ist, wie bei den zuvor vorgestellten Studien beschrieben, dem „higher order knowledge“ zuzuordnen. Bei der Berücksichtigung eines korrekten Stichwortes führt die Anwendung der „simple everyday heuristic“ des *Take The Best* zur erwarteten Lösung. Aufgrund des Erwerbs durch Instruktion stellt die zur Lösung erforderliche Intuition eine Sekundärintuition dar. Das zur Lösung erforderliche Vorgehen kann der Phase der formalen Operationen, der Stufe III des probabilistischen Denkens, zugeordnet werden.

Die mit zunehmender Klassenstufe nahezu gleichbleibenden, geringen relativen Häufigkeiten für die erwartete Antwort „Krankenhaus A (mit 3 Geburten pro Tag)“, um die 35% für die Häufigkeitsverteilungsversion und um die 25% für die Stichprobenverteilungsversion (vgl. Engel & Sedlmeier, 2005, S. 175), können darauf zurückzuführen sein, dass das zur Lösung erforderliche Wissen zur Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist.

Eine Erklärung dafür, dass die als falsch eingestufte Antwort „In beiden Krankenhäusern sind die Chancen dafür ungefähr gleich“ gegeben wird, kann die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Repräsentativität*, mit der die Insensibilität gegenüber der Stichprobengröße, im Sinne einer kognitiven Verzerrung, einhergeht, darstellen. Dass die Heuristik der *Repräsentativität* angewendet wird, lässt sich darauf zurückführen, dass, wie beschrieben, das zur Lösung erforderliche Wissen zur Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist.

Anzumerken ist, dass, begünstigt durch das „Social Judgement Framing“ der Aufgabe, bei linguistischer Interpretation des Aufgabentextes auch folgender Gedankengang möglich ist: Aufgrund der jeweiligen Formulierung „*im Durchschnitt* werden ... Kinder pro Tag geboren“ wird angenommen, dass im Krankenhaus A jeden Tag genau 3 Kinder geboren werden und im Krankenhaus B im ständigen Wechsel genau 1 Kind pro Tag geboren wird beziehungsweise genau 9 Kinder pro Tag geboren werden. Wird aufgrund der Formulierung „Ungefähr die Hälfte ... sind Mädchen, die andere Hälfte Jungen“ angenommen, dass bei jeder Geburt die Wahrscheinlichkeit für ein Mädchen bzw. einen Jungen gleich groß ist, also 50% beträgt, und die „Ergebnisse“ der einzelnen Geburten stochastisch unabhängig sind, so kann, im Sinne des Erwartungswertes, davon ausgegangen werden, dass im Krankenhaus A an jedem 8. Tag alle Geburten Mädchen sind, im Krankenhaus B dagegen an mindestens jedem 4. Tag. Diese Überlegung führt in Bezug auf die Frage „In welchem Krankenhaus wird es im Laufe eines Jahres mehr Tage geben, an denen alle Geburten Mädchen sind?“, wenn nicht bemerkt wird, dass bei den vorgegebenen Antwortmöglichkeiten die Formulierung „im Durchschnitt“ fehlt, somit, obwohl sie logisch konsistent ist, zu der als formal falsch eingestuften Antwort „Krankenhaus B (mit 5 Geburten pro Tag)“.

Dass sich bei der vorliegenden Aufgabe bei der Häufigkeitsverteilungsversion in allen Klassenstufen eine größere relative Häufigkeit für die erwartete Antwort „Krankenhaus A (mit 3 Geburten pro Tag)“ im Vergleich zur Stichprobenverteilungsversion ergibt, kann, da sich die Formulierung „an einem bestimmten Tag ... alle Geburten Mädchen sind“ auf eine absolute Häufigkeit bezieht, im Gegensatz zur Formulierung „mehr Tage geben, an denen alle Geburten Mädchen sind“, auf den im Abschnitt 3.4.1 beschriebenen Einfluss des Formates der Darstellung zurückzuführen sein.

„Engel & Sedlmeier: Aufgabe 4“. Gegenstand dieser Aufgabe war die Wahrscheinlichkeit von Konjunktionen. Engel und Sedlmeier (2005, S. 170) führen hierzu aus, dass in der einschlägigen Literatur von ziemlich gegensätzlichen Resultaten diesbezüglicher Untersuchungen berichtet wird. So besagen die Ergebnisse von Inhelder und Piaget (1964), dass Kinder im Alter von 8 Jahren dazu in der Lage sind, zu erkennen, dass konjunktive Mengen nicht größer sein können als die Mengen der Komponenten, wohingegen die in der Urteilsforschung vorherrschende Meinung ist, dass Erwachsene im Allgemeinen nicht dazu in der Lage sind, die Wahrscheinlichkeiten von Konjunktionen richtig einzuschätzen. Engel und Sedlmeier (2005, S. 170) verweisen diesbezüglich auf die Ergebnisse der Studie von Tversky und Kahneman (1983).

Die vierte Aufgabe wurde in zwei verschiedenen Darbietungsformaten, „Wahrscheinlichkeiten“ beziehungsweise „Häufigkeiten“, eingesetzt, wobei jedes der beiden Formate in zwei verschiedenen zeitlichen Perspektiven formuliert war, sodass insgesamt vier verschiedene Varianten der Aufgabe vorlagen:

- Die erste Variante war im Format „Wahrscheinlichkeiten“ formuliert, wobei die zu beurteilenden Aussagen zeitlich vor der Problembeschreibung liegen. Die Angabe lautete (Originalformulierung[7]): „Ein Schüler hat im Abschlusszeugnis in Mathematik die Note Vier erhalten. Welche der folgenden Aussagen trifft für ihn eher zu?“ Die beiden zur Auswahl stehenden Antworten lauteten: „Er hatte eine Sechs in Mathe im Halbjahreszeugnis“ und „Er hatte im zweiten Halbjahr Nachhilfe in Mathe erhalten und hatte eine Sechs in Mathe im Halbjahreszeugnis“.
- Bei der von der zeitlichen Perspektive her zugehörigen Variante im Format „Häufigkeiten“ war die Angabe wie folgt formuliert: „30 Schüler eines Jahrgangs haben im Abschlusszeugnis in Mathematik die Note Vier erhalten. Welche der folgenden Aussagen trifft für mehr dieser Schüler zu?“ Hier lauteten die beiden möglichen Antworten: „Sie hatten eine Sechs in Mathe im Halbjahreszeugnis“ und „Sie hatten im zweiten Halbjahr Nachhilfe in Mathe erhalten und hatten eine Sechs in Mathe im Halbjahreszeugnis“.
- Die Formulierung der dritten Variante war wiederum im Format „Wahrscheinlichkeiten“, allerdings beziehen sich die zu beurteilenden Aussagen auf (von der Problembeschreibung aus) zukünftige Ereignisse. Der Text der Angabe lautete: „Ein Schüler hatte im Halbjahreszeugnis in Mathematik die Note Sechs erhalten. Welche der folgenden Aussagen trifft für ihn eher zu?“ Als Antwortmöglichkeiten waren vorgegeben: „Er hat eine Vier in Mathe im Abschlusszeugnis“ und „Er hat im zweiten Halbjahr Nachhilfe in Mathe erhalten und hat eine Vier in Mathe im Abschlusszeugnis“.
- Die Angabe der zeitlich entsprechenden Variante im Format „Häufigkeiten“ lautete: „30 Schüler eines Jahrgangs hatten im Halbjahreszeugnis in Mathematik die Note Sechs erhalten. Welche der folgenden Aussagen trifft für mehr dieser Schüler zu?“ Zur Auswahl standen folgende Antworten: „Sie haben eine Vier in Mathe im Abschlusszeugnis“ und „Sie haben im zweiten Halbjahr Nachhilfe in Mathe erhalten und haben eine Vier in Mathe im Abschlusszeugnis“.

Die vier Varianten der Aufgabe wurden wiederum zufällig unter den Schülerinnen und Schülern verteilt, wobei die Schülerinnen und Schüler auch hier nicht von der Existenz unterschiedlicher Varianten wussten.

Erwartete Antwort: Er hatte eine Sechs in Mathe im Halbjahreszeugnis *bzw.*

[7]Vgl. Fußnote 1 auf S. 147.

Sie hatten eine Sechs in Mathe im Halbjahreszeugnis *bzw.*
Er hat eine Vier in Mathe im Abschlusszeugnis *bzw.*
Sie haben eine Vier in Mathe im Abschlusszeugnis

Bei der vorliegenden Aufgabe handelt es sich, wie bei den vorangegangenen Aufgaben, um ein wort- bzw. buchstabenkodifiziertes Problem, bei dem eine Alltagssituation beschrieben wird. Die Rahmung des Problems entspricht dem „Social Judgement Framing“. Die Wahrscheinlichkeit ist in nicht-numerischer Form repräsentiert.

Engel und Sedlmeier (2005, S. 170) führen folgende Überlegung zum Einsatz der beiden Darbietungsformate an: In der Studie von Hertwig und Gigerenzer (1999) wurde nachgewiesen, dass semantische Ambiguitäten (z. B. wie das Wort „und“ zu verstehen ist) zur falschen Einschätzung der Wahrscheinlichkeit von Konjunktionen führen können. Wurden diese Ambiguitäten vermieden, indem die Aufgabeninformation in Form von (natürlichen) Häufigkeiten präsentiert wurde, dann ergaben sich Lösungsraten von bis zu 100%. Beispielhaft wird auf die Studie von Inhelder und Piaget (1964) verwiesen. Da es gemäß Mellers, Hertwig und Kahneman (2001) jedoch keinen Konsens über die genauen Wirkmechanismen von Häufigkeitsformulierungen gibt, wurde von Engel und Sedlmeier (2005) in der vorliegenden Studie bei der vierten Aufgabe die gleiche Aufgabenstruktur verwendet wie bei mehreren vorangegangen Studien in der Urteilsforschung. Als Grund für die zusätzliche Unterteilung in zwei verschiedene zeitliche Perspektiven wird die Beobachtung angeführt, dass semantische Ambiguitäten größer sein können, wenn sich die zu beurteilenden Aussagen zeitlich vor der Problembeschreibung befinden als wenn sich diese Aussagen auf (von der Problembeschreibung aus) in der Zukunft liegende Ereignisse beziehen.

Die Auswertung der Antworten der Schülerinnen und Schüler ergab, dass bei allen vier Varianten mit zunehmender Klassenstufe der Anteil richtiger Lösungen geringer wird, wobei für Engel und Sedlmeier (2005, S. 175) ein deutlicher Abwärtstrend erkennbar ist, welcher als Beleg dafür angesehen wird, dass sich statistische Intuitionen nicht verbessern mit zunehmender Dauer des Schulbesuchs, sondern eher verschlechtern. Aus der Veröffentlichung von Engel und Sedlmeier geht hervor (vgl. Engel & Sedlmeier, 2005, S. 175), dass die Lösungsraten in Klassenstufe 9 bei allen vier Varianten jeweils weniger als 15% betragen und sich somit auf einem ähnlich niedrigen Niveau befinden wie in vergleichbaren Studien mit Erwachsenen.

Bezüglich der verschiedenen Aufgabenvarianten wird festgehalten, dass zum einen die zeitliche Perspektive keine Auswirkung auf das Ergebnis hatte und dass zum anderen auch das Darbietungsformat der Aufgabe – „Häufigkeiten“ beziehungsweise „Wahrscheinlichkeiten“ – keinen systematischen Einfluss auf die Lösungsraten hatte. So führte in Klassenstufe 7 das Format „Häufigkeiten“ zu geringfügig besseren Ergebnissen als das Format „Wahrscheinlichkeiten“, wohingegen dies in Klassenstufe 5 genau umgekehrt war. Als mögliche Erklärung für den fehlenden Einfluss der zeitlichen Perspektive führen Engel und Sedlmeier (2005, S. 175) an, dass dieser Faktor keine (wesentliche) Rolle beim Lösen derartiger Aufgaben spielt oder dass es nicht gelungen ist, die Aufgabenstellung ausreichend zu vereinfachen – was wiederum daran liegen könnte, dass die zu beurteilenden Ereignisse in allen Varianten schon eingetreten waren. Hinsichtlich des nicht vorhandenen Einflusses des Darbietungsformats der Aufgabe konnte von Engel und Sedlmeier zum Zeitpunkt der Veröffentlichung noch keine Erklärung angeboten werden. Eine Auswertung nach Schularten wurde nicht veröffentlicht.

Bei der erwarteten Lösung wird die Wahrscheinlichkeit als frequentistische Wahrscheinlichkeit interpretiert. Zur Lösung der vorliegenden Aufgabe ist das Wissen erforderlich, dass die Wahrscheinlichkeit eines konjunktiven Ereignisses nie größer als die Wahrscheinlichkeit der einzelnen elementaren Ereignisse sein kann. Dieses Wissen kann, wie bei der Studie von

Fischbein und Schnarch (1997) im Abschnitt 4.3.2 beschrieben, anfänglich dem „higher order knowledge“ und mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler, nach einer Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis der Schülerinnen und Schüler, im Sinne der Theorie des Conceptual Change, dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden. Bei der Berücksichtigung eines korrekten Stichwortes führt die Anwendung der „simple everyday heuristic“ des *Take The Best* zur richtigen Lösung. Die zur Lösung erforderliche Intuition stellt aufgrund des Erwerbs durch Instruktion eine Sekundärintuition dar. Das zur Lösung erforderliche Vorgehen kann, in Anlehnung an die Ergebnisse von Inhelder und Piaget (1964), der Phase der konkreten Operationen, der Stufe IIA des probabilistischen Denkens, zugeordnet werden.

Einen entscheidenden Einfluss darauf, ob das Wissen, dass die Wahrscheinlichkeit eines konjunktiven Ereignisses nie größer als die Wahrscheinlichkeit der einzelnen elementaren Ereignisse sein kann, bei der vorliegenden Aufgabe zur Lösung angewendet wird, dürfte die Einführung von Zusatzannahmen haben, welche durch den interpretierbaren Eindruck der Informationen und die Beschreibung einer Alltagssituation aus dem Erfahrungsbereich der Schülerinnen und Schüler begünstigt wird. So wird bei der vorliegenden Problemformulierung mit „und“ gemäß Tversky und Kahneman (1982b, S. 95) unter Umständen von den Schülerinnen und Schülern entsprechend den normalen Regeln der Konversation darauf geschlossen, dass jeweils in der ersten der beiden Aussagen implizit enthalten ist: „*und keine Nachhilfe erhalten*“. Dadurch werden beispielsweise die bei der dritten Variante (Format „Wahrscheinlichkeiten“; zukünftige Ereignisse) – der Variante „Ein Schüler hatte im Halbjahreszeugnis in Mathematik die Note Sechs erhalten. Welche der folgenden Aussagen trifft für ihn eher zu?“ – zur Auswahl stehenden Antworten wie folgt interpretiert: „Er *hat im zweiten Halbjahr keine Nachhilfe in Mathe erhalten und* hat eine Vier in Mathe im Abschlusszeugnis“ und „Er hat im zweiten Halbjahr Nachhilfe in Mathe erhalten und hat eine Vier in Mathe im Abschlusszeugnis“. Bei dieser Interpretation ist zu erwarten, dass mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler, aufgrund des größeren Umfangs an eigenen schulischen Erfahrungen bezüglich Nachhilfe und Noten im Fach Mathematik, die zweite der beiden Aussagen als eher zutreffend eingeschätzt wird, was eine Erklärung für die geringere relative Lösungshäufigkeit mit zunehmender Klassenstufe bei allen vier Varianten darstellt und eine Erklärung für den nicht vorhandenen Einfluss des Darbietungsformats der vorliegenden Aufgabe sein kann.

Zurückführen lässt sich dieses Vorgehen auf die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Repräsentativität*, welche, wie im Abschnitt 3.2.7 und bei der zur vorliegenden Aufgabe ähnlichen Aufgabe der Studie von Fischbein und Schnarch (1997) beschrieben, aufgrund der Inkonsistenz zwischen der Logik der Wahrscheinlichkeit und der Logik der Repräsentativität zu dem als „conjunction fallacy“ bezeichneten Fehlschluss führt. Dass die Heuristik der *Repräsentativität* angewendet wird, lässt sich damit erklären, dass das zur Lösung erforderliche Wissen, dass die Wahrscheinlichkeit eines konjunktiven Ereignisses nie größer als die Wahrscheinlichkeit der einzelnen elementaren Ereignisse sein kann, in den niedrigeren Klassenstufen nicht zur Anwendung kommt, weil es dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist, und in den höheren Klassenstufen, obwohl es, nach einer Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis der Schülerinnen und Schüler, im Sinne der Theorie des Conceptual Change, nicht mehr dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist, sondern dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden kann, nicht angewendet wird, weil der Aufgabentext aufgrund der vorliegenden Problemformulierung mit „und“ entsprechend den normalen Regeln der Konversation interpretiert wird. Dass dies der Fall ist, kann darauf zurückgeführt werden, dass andernfalls jeweils die erste der beiden Aussagen irreführend wäre (Tversky & Kahneman, 1982b, S. 95).

Die Abnahme der relativen Lösungshäufigkeit mit zunehmender Klassenstufe lässt sich auch mit den mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler im Allgemeinen größer

werdenden linguistischen Fähigkeiten erklären, durch die unter Umständen die Interpretation des Aufgabentextes entsprechend den normalen Konversationsregeln begünstigt wird.

4.5.3 Zusammenfassung der Ergebnisse von Engel und Sedlmeier

Zusammenfassend kommen Engel und Sedlmeier (2005, S. 168) zu dem Ergebnis, dass in der vorliegenden Studie „keinerlei Anzeichen für eine Verbesserung des Verständnisses von Zufall und Variabilität mit zunehmendem Alter der [Schülerinnen und] Schüler“ festgestellt werden konnten. Im Gegenteil: Wenn überhaupt ein Trend erkennbar ist, dann deutet dieser auf eine sich verschlechternde Fähigkeit hin, Zufall und Variabilität angemessen einzuschätzen (Engel & Sedlmeier, 2005, S. 175). Dieser Befund deckt sich somit mit den Ergebnissen, die von Green (1982) bei einer vergleichbaren Altersgruppe erhalten wurden.

4.5.4 Folgerungen aus den Befunden von Engel und Sedlmeier

Ausgehend von den Ergebnissen der vorliegenden Studie ergeben sich für Engel und Sedlmeier (2005) die nachfolgend aufgeführten Konsequenzen für die Lehrplanentwicklung im Bereich der Sekundarstufe I und die Schulpolitik.

So sollten die Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler mit Zufall und Variabilität fächerübergreifend und fächerverbindend sein. Es wird daher für wichtig erachtet, eine große Anzahl an Schulfächern bei Themen mit einzubeziehen, in denen probabilistische und deterministische Betrachtungsweisen und Erklärungen sowohl nebeneinander als auch gegenüber gestellt werden. Beispielhaft für Fächer und Themen lassen sich in Biologie „Verbindungen zwischen der Vererbungslehre und der Statistik“ nennen, in den Naturwissenschaften „Wettervorhersagen“ und „globale Erwärmung“ sowie in Wirtschaftslehre „Börse“; zudem eignen sich Sportergebnisse und Wahlprognosen als Themen. Die Durchführung von Experimenten mit Zufallsstichproben bietet sich insbesondere in Mathematik (Themenbereich „Stochastik“) an, aber auch in den Sozialwissenschaften (Engel & Sedlmeier, 2005, S. 175).

Bezüglich der Art und Weise des Mathematikunterrichts in der Schule wird festgehalten, dass es als sehr unwahrscheinlich angesehen werden muss, dass die in vielen Schulbüchern verlangten mechanischen Wahrscheinlichkeitsberechnungen von großer Hilfe für den Aufbau stochastischer Kompetenzen sind. Begründet wird dies damit, dass die betreffenden Wahrscheinlichkeitsberechnungen in der Regel auf einem a-priori-Ansatz beruhen, bei dem das Kalkül im Vordergrund steht und die experimentelle Seite der Stochastik vernachlässigt wird. Engel und Sedlmeier (2005, S. 176) verweisen diesbezüglich auf Rasfeld (2004), welcher der Überzeugung ist, dass ein Stochastikunterricht, in dem der Aspekt formaler Berechnungen betont wird (ohne dass auf statistische Intuitionen gebührend eingegangen wird) nicht sehr fruchtbar ist, und auf Borovcnik (1992), der zu dem Schluss kommt, dass dabei intuitive Ideen und Wahrnehmungen als die wahren Quellen kreativen Denkens zu stark vernachlässigt sind.

Primäre Intuitionen werden von Engel und Sedlmeier (2005) als sehr hilfreich im Unterricht angesehen – allerdings wird es als wichtig erachtet, dass diese primären Intuitionen auch systematisch hinterfragt werden. Ist dies nicht der Fall, so setzen sich Fehlvorstellungen fest – dies wird durch die Vielzahl an stochastischen Paradoxa belegt. Engel und Sedlmeier (2005, S. 176) betonen daher unter Verweis auf Tietze, Klika und Wolpers (2002), dass frühzeitig Vorstellungen im Sinne von Sekundärintuitionen aufgebaut werden müssen, welche erst durch eine systematische Behandlung von Primärintuitionen und die Verbindung der Primär-

intuitionen mit theoretischen Konzepten entstehen. Drei Faktoren werden diesbezüglich von Sedlmeier (1999) als entscheidend für ein erfolgreiches Anknüpfen an Primärintuitionen angesehen:

- die Art der Darstellung, das heißt wie Informationen präsentiert werden,
- „learning by doing“ und
- die Nähe der Problemstellungen zum Alltag der Schülerinnen und Schüler.

Engel und Sedlmeier (2005, S. 176) weisen darauf hin, dass der Erwerb von zutreffenden Sekundärintuitionen als gradueller Prozess erfolgen muss, in einem Unterricht, der durch selbstständige Datenerhebungen gekennzeichnet ist, in dem neue Technologien, wie Computer, grafikfähige Taschenrechner und Internet, zur Planung und Durchführung von Simulationen und Demonstrationen eingesetzt werden und in dem die Schülerinnen und Schüler durch Experimente in Situationen des Spiels und der Simulation schrittweise zu einer formalen Darstellung hingeführt werden.

Um die Entwicklung des Verständnisses der Schülerinnen und Schüler für zufallsbedingte Variabilität zu unterstützen, empfiehlt sich der Einsatz von Daten, die von Zufallsgeneratoren erzeugt werden. Hervorgehoben wird, dass der Stochastikunterricht an den Vorerfahrungen der Schülerinnen und Schüler anknüpfen muss und praxis- und alltagsorientiert sein sollte. Bezüglich der zentralen Rolle von Simulationen im Unterricht verweisen Engel und Sedlmeier (2005, S. 176) auf Engel (2002), der bei der Behandlung des Themas „Wahrscheinlichkeit“ unter Einsatz von Simulationen ein Vorgehen in fünf Schritten empfiehlt:

- Der erste Schritt beinhaltet die Einführung einer praxisbezogenen Problemstellung anhand von Beobachtungen in Alltagssituationen oder Experimenten, wobei die Dynamik des Phänomens für die Schülerinnen und Schüler durch die Selbsttätigkeit erfahrbar wird.
- Im zweiten Schritt erfolgt die Konstruktion eines Modells zur Simulation des Phänomens mit einem Zufallsgenerator.
- Der dritte Schritt umfasst das Erzeugen von Daten und die Analyse der erzeugten Daten sowie Folgerungen auf der Basis der Simulation.
- Im vierten Schritt werden die Folgerungen kritisch hinterfragt und die aus der Simulation gewonnenen Erkenntnisse auf die Realität übertragen und hinsichtlich ihrer Gültigkeit überprüft.
- Der fünfte Schritt beinhaltet schließlich eine formale mathematische Analyse der Problemstellung unter Berücksichtigung der wahrscheinlichkeitstheoretischen Kenntnisse der Schülerinnen und Schüler.

Simulationen werden von Engel und Sedlmeier (2005, S. 176) als ein fundamentales Werkzeug angesehen, das den Schülerinnen und Schülern bereits im Primarbereich das Modellieren und Experimentieren mit Zufallsphänomenen ermöglicht, wodurch die Interpretation von Wahrscheinlichkeit als frequentistische Wahrscheinlichkeit greifbar wird und valide stochastische Intuitionen aufgebaut werden – gemäß Coutinho (2001) kann die Ebene der Simulation als eine pseudo-konkrete Domäne aufgefasst werden, welche sich zwischen der Domäne der Realität, in der sich die zu analysierende Zufallssituation befindet, und der Domäne der Theorie, in der die wahrscheinlichkeitstheoretischen Modelle liegen, befindet; der didaktische Nutzen dieser pseudo-konkreten Domäne wird von Henry (1997) darin gesehen, dass den Schülerinnen und Schülern das betreffende theoretische Modell implizit induziert wird, auch dann, wenn eine mathematische Formalisierung (noch) nicht möglich ist. Da Simulationen das Denken über eine Problemstellung nicht ersetzen und falsche Intuitionen nur bewusst machen, aber in der Regel nicht direkt attackieren können, wird von Engel und Sedlmeier (2005) die Kombination von Simulationen mit formalen mathematischen Analysen vorgeschlagen – als Werkzeuge empfehlen sich beispielsweise Baumdiagramme. Zudem wird auf die Studie von

Wassner, Martignon und Sedlmeier (2002) verwiesen, in der festgestellt wurde, dass die Art und Weise der Informationsdarbietung (Häufigkeiten anstelle von Wahrscheinlichkeiten) den Einsatz von formaleren Darstellungsarten erleichtern kann.

Abschließend wird hervorgehoben, dass bei einem Zufallsexperiment, das mehrmals unter gleichen Bedingungen wiederholt wird, wobei die Folge der erhaltenen Ergebnisse kein Muster erkennen lässt, trotzdem globale Regelmäßigkeiten entdeckt werden können, von denen die Stabilisierung der relativen Häufigkeit eines möglichen Ergebnisses die offensichtlichste ist. Für Engel und Sedlmeier (2005, S. 176 f.) stellt diese globale Regelmäßigkeit die Grundlage dar, um Zufallsphänomene systematisch mithilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung studieren zu können.

4.6 Die Studie von Amir und Williams (1999)

4.6.1 Allgemeines

In der Studie von Amir und Williams (1999) wurden die Auswirkungen von kulturellen Einflüssen auf das probabilistische Denken von Kindern im Alter von 11 bis 12 Jahren untersucht.

Amir und Williams (1999, S. 85) weisen darauf hin, dass zum einen das Verständnis der formalen Regeln der Wahrscheinlichkeit und die Fähigkeit, diese anzuwenden, als wesentliche Elemente der schulischen Ausbildung angesehen werden müssen, zum anderen aber nicht außer Acht gelassen werden darf, dass die informelle Wahrscheinlichkeit fest etabliert in der Alltagskultur ist. Beispielhaft werden Würfelspiele, Lotterien und Wettervorhersagen angeführt. Unter Bezug auf D'Ambrosio (1985) bezeichnen Amir und Williams (1999, S. 85) den Einfluss der Alltagskultur auf die informellen Vorstellungen von Zufall und Wahrscheinlichkeit als „ethnomathematics" der Wahrscheinlichkeit. Da das Konzept der Wahrscheinlichkeit keine vorherigen Wurzeln im schulischen Lernen hat und typischerweise im Zusammenhang mit Zufallsexperimenten eingeführt wird, erscheint es als notwendig, dass die Eigenheiten des primären Wissens der Kinder berücksichtigt werden, damit das Modell der Wahrscheinlichkeit nicht auf einem unsicheren Fundament aufgebaut wird.

Bei der vorliegenden Studie wurden in einem ersten Schritt Interviews durchgeführt, in denen nach Verbindungen zwischen der Kultur der Kinder und ihrem Denken gesucht wurde. Diese Interviews werden von Amir und Williams (1999, S. 89) als holistisch bezeichnet, da

- erstens die Kultur der Kinder einschließlich ihrer Überzeugungen, Erfahrungen und Sprache,
- zweitens das Wissen von Wahrscheinlichkeit einschließlich Vorstellungen, Intuitionen und formalem Wissen und
- drittens die Verbindungen zwischen diesen beiden Domänen im Zentrum der Untersuchung standen.

Die sich aus den Interviews ergebenden Hypothesen wurden dann in einem zweiten Schritt in Form eines Fragebogens untersucht.

Die Struktur, die sich in den Interviews im Allgemeinen ergab, wird von Amir und Williams (1999, S. 90 f.) wie folgt beschrieben:

- Als Erstes wurde anhand von Erzählungen der Kinder das Verständnis von Zufall und Glück/Unglück untersucht.
- Im Anschluss daran standen die Überzeugungen der Kinder, ihre Religion, ihr Glaube an die Rolle von Gott in der Welt, ihr Aberglaube sowie ihre Attribuierungen für Phänomene (wie Verkehrsunfälle oder das Wetter) zu Gott[8], Kausalität oder Glück/Unglück, und wie der Zufall in dieses System an Attribuierungen eingeordnet werden kann, im Mittelpunkt.
- Als Nächstes wurde das probabilistische Denken der Kinder betrachtet, das heißt die Modelle der Kinder von gebräuchlichen Zufallsgeräten, wie Würfeln, Münzen oder Spielmarken, die Heuristiken, die von ihnen angewendet werden könnten, die Anwendung des „Outcome Approach“ sowie die Strategien zum Vergleich und zur quantitativen Einschätzung von Chancenverhältnissen.
- Ein weiterer zentraler Punkt war die Untersuchung der Präzision, mit der die Kinder Begriffe, die das Zufällige ausdrücken, wie zum Beispiel „wahrscheinlich“, „selten“ und „gleiche Chancen“, unterscheiden.
- Abschließend wurden der Background der Kinder und Erfahrungen, an die sich die Kinder, insbesondere was Spiele anbetrifft, bezüglich der Relevanz von Zufall erinnern konnten, untersucht.

Von Amir und Williams wird angemerkt, dass die Interviews von der Struktur her nicht einheitlich waren und dass die Interpretation der Antworten in den Interviews, wie auch in den Fragebögen, nicht immer klar oder sicher war.

Der Fragebogen bestand aus folgenden Teilen (vgl. Amir & Williams, 1999, S. 93 f.):

- erstens dem Teil „Hintergrunddaten“,
- zweitens dem Teil „Vorstellungen von Glück/Unglück und Zufall“,
- drittens dem Teil „Attribuierungsmessung“,
- viertens dem Teil „Überzeugungen“,
- fünftens dem Teil „Erfahrung“ und
- sechstens dem Teil „Wahrscheinlichkeit“.

Im ersten Teil wurden die Kriterien „Alter“, „Geschlecht“, „Herkunft der Eltern“ und „zu Hause gesprochene Sprachen“ erfasst. Amir und Williams (1999) weisen darauf hin, dass ein Test zur „reasoning ability“, also ein Test bezüglich der allgemeinen Fähigkeit zum logischen Denken, eineinhalb Monate vor Beginn der vorliegenden Studie an der betreffenden Schule durchgeführt worden war. Die Ergebnisse dieses Tests, der aus drei Unter-Tests bestand, einem verbalen, einem numerischen und einem nicht-verbalen, wurden von der Schule zur Verfügung gestellt.

Für den zweiten Teil des Fragebogens wurden Vorstellungen sowie Definitionen aus den Interviews und aus der einschlägigen Literatur übernommen. Von den Kindern sollten vorgegebene Aussagen anhand einer Skala von fünf Punkten, von „überhaupt nicht einverstanden“ bis „sehr einverstanden“, entsprechend dem Grad des Einverständnisses beurteilt werden.

Da in der vorliegenden Studie kognitive Attribuierungen im Zentrum der Untersuchung standen, wurde für den dritten Teil des Fragebogens ein neues Instrument entwickelt (vgl. Amir & Williams, 1999, S. 93): Vier Attribuierungen, „Gott“, „Zufall“, „Glück/Unglück“ und „Kausalität“, wurden über Kreuz tabellarisiert mit acht Kontexten, „Wetter“, „Verkehrsunfälle“, „die Grippe bekommen“, „Erfolg im Leben“, „Erfolg im Fußball“, „Werfen einer Mün-

[8]Diese Attribuierung kann als *animistische* Vorstellung in einer stochastischen Situation angesehen werden – sie wurde bei Kindern nachgewiesen und wird bei Heranwachsenden sowie Erwachsenen nicht ausgeschlossen (Wollring, 1994a).

ze“, „Würfeln“ sowie „in einer Tombola gewinnen“, sodass sich 32 Items ergaben, die wiederum von den Kindern nach dem Grad der Übereinstimmung anhand einer Skala von fünf Punkten bewertet wurden. Von diesen 32 Items wurde ein Viertel negiert, um eine möglicherweise mechanisch erfolgende Beantwortung zu erschweren.

Der vierte Teil des Fragebogens umfasste Fragen über die Religion der Kinder, über die Ausübung ihres Glaubens, über ihren Glauben an Gott und über verschiedene Formen des Aberglaubens. Diesbezüglich wurden zwei „Scores“ gebildet: „Attribuierung zu Gott und Religiosität“ sowie „Attribuierung zu Glück/Unglück und Aberglaube“.

Im fünften Teil des Fragebogens musste von jedem Kind angegeben werden, wie oft es Brettspiele, Kartenspiele, Würfelspiele und Glücksspiele spielt sowie Münzen wirft. Zur Auswahl standen die Kategorien „niemals“, „selten“, „manchmal“, „oftmals“ und „sehr oft“.

Für den sechsten und letzten Teil des Fragebogens wurden von Amir und Williams (1999, S. 94) diejenigen Items aus der im Abschnitt 4.2.2 beschriebenen Studie von Green (1982) übernommen, die zur Bestimmung von Kompetenzstufen eingesetzt worden waren. Zu diesen Items wurden Items hinzugefügt, mit denen die Fähigkeit zur Einschätzung relativer Häufigkeiten, die Anwendung der Heuristiken der *Verfügbarkeit*, *Repräsentativität* und *Gleichwahrscheinlichkeit* sowie die Anwendung des „Outcome Approach“ untersucht werden sollten.

Amir und Williams (1999, S. 90) weisen darauf hin, dass bewusst eine Konzentration auf eine einzige Altersgruppe erfolgte, um Einflüsse auf das probabilistische Denken identifizieren zu können – auf die zusätzliche Dimension der Entwicklung des probabilistischen Denkens wurde dabei verzichtet. Zudem wird angemerkt, dass bei den Interviews zu berücksichtigen ist, dass sich das zum Vorschein gebrachte informelle probabilistische Wissen auf das beschränkt, was den Kindern im schulischen Rahmen zugänglich ist.

Die Interviews wurden an zwei innerstädtischen Schulen in Manchester, England, durchgeführt. Hierbei wurden insgesamt 38 Schülerinnen und Schüler im ersten Jahr der High-School befragt, wobei die meisten der Schülerinnen und Schüler in England geboren worden waren, aber fast die Hälfte mindestens ein Elternteil ausländischer Herkunft (hauptsächlich aus Asien oder Afrika) hatte. Beim Fragebogen wurden insgesamt 236 Schülerinnen und Schüler, der komplette erste Jahrgang der Sekundarstufe einer Gesamtschule im Nordwesten von England, in einer zerfallenden, städtischen, industriellen, hauptsächlich Arbeiterklasse-Gegend getestet (Amir & Williams, 1999, S. 90). Von den untersuchten 111 Schülerinnen und 125 Schülern, von denen wiederum die überwiegende Mehrzahl in England geboren worden war, waren bei 120 Schülerinnen und Schülern beide Elternteile europäischer, hauptsächlich englischer Herkunft und bei 111 Schülerinnen und Schülern war mindestens ein Elternteil asiatischer – hauptsächlich vom indischen Subkontinent – oder afrikanischer Herkunft. Zu berücksichtigen ist, dass bei der betreffenden Gesamtschule, im Kontext des Vereinigten Königreiches, eine vergleichsweise starke Zweiteilung vorlag, was den kulturellen Background anbelangt: zum einen eine große ethnische Minderheit, die religiös ist, einen starken kulturellen und familiären Zusammenhalt aufweist und eine zweite Sprache spricht, wobei einige in Englisch schwächer sind, und zum anderen eine Mehrheit, die weniger religiös ist, nur Englisch spricht und für weniger uniform gehalten wird (Amir & Williams, 1999, S. 90). Gemäß Amir und Williams ist davon auszugehen, dass die Schülerinnen und Schüler in der untersuchten Klassenstufe, wenn überhaupt, dann nur über wenig formales probabilistisches Wissen verfügten.

Im Folgenden werden die in der Veröffentlichung von Amir und Williams (1999) beschriebenen Auszüge aus den Interviews und Elemente des Fragebogens sowie die Ergebnisse der Auswertung der Interviews ($N_1 = 38$) und der Fragebögen ($N_2 = 236$) vorgestellt.

4.6.2 Aufgaben und Ergebnisse der Auswertung

Bezüglich des Aberglaubens von Kindern werden von Amir und Williams (1999, S. 94 f.) folgende Auszüge aus Interviews beschrieben:

- „Meine Schwester hat sehr viel Glück. Sie bekommt eine Sechs achtmal in Folge. Ich bekomme manchmal auf Anhieb eine Sechs, manchmal warte ich eine Ewigkeit ...“ und
- „tails, tails, never fails“, was einem englischen Reim entspricht.

Zu diesem wird angemerkt, dass 9 von 12 befragten Kindern es beim Werfen einer Münze bevorzugten, auf „Zahl“, also „tails“, zu setzen, wohingegen nur von einem Kind bevorzugt wurde, auf „Kopf“ zu setzen; zwei Kinder äußerten keine Vorliebe für eine der beiden Seiten.

Im Fragebogen wurde

- von 43% der Schülerinnen und Schüler angegeben, dass sie beim Wurf einer Münze eine bestimmte Seite bevorzugen und sich dadurch bessere Ergebnisse erhoffen,
- von 18% der Schülerinnen und Schüler angegeben, dass sie beim Wurf einer Münze zwar eine bestimmte Seite bevorzugen, sich dadurch aber keine besseren Ergebnisse erwarten, und
- von 72% der Schülerinnen und Schüler die Übereinstimmung mit der Aussage „Manche Leute haben mehr Glück als andere bei Tombolas, Brettspielen mit Spielwürfeln, etc.“ bekundet.

Amir und Williams (1999, S. 94) weisen darauf hin, dass sowohl in den Interviews als auch bei der Auswertung der Fragebögen festgestellt wurde, dass ziemlich viele der Kinder zu einem hohen Grad abergläubisch sind. Festgehalten wird, dass der Aberglaube zum einen bei Kindern mit geringeren Fähigkeiten im Allgemeinen größer war und zum anderen nicht mit zunehmender Fähigkeit verschwand. Unter Bezug auf Streib (1994) merken Amir und Williams (1999, S. 94) an, dass der Glaube an Magie nicht auf frühe Phasen der Entwicklung beschränkt ist – die Vorstellung von Magie koexistiert mit der Vorstellung von Kausalität und Rationalität sogar im Erwachsenenalter.

Was die Theorie des Conceptual Change betrifft, so kann der Aberglaube, im Sinne einer metaphysischen Überzeugung, als ein Element des kognitiven Filters aufgefasst werden.

In Bezug auf die Religiosität wird von Amir und Williams (1999, S. 91) folgender Auszug aus einem Interview angeführt:

- „Als ich in Afrika war, hat eine giftige Schlange beinahe meine Schwester umgebracht. Durch Zufall bin ich nach draußen gekommen, sodass ich es jemandem sagen konnte. Aber das war nicht Glück, das war Gott. Er hat gesehen, dass meine Schwester nicht gestorben ist. Das war kein Zufall ... Spielautomat, das ist Zufall. Ich glaube nicht, Gott würde das wollen ... Ich spiele nicht ... Ich bin dagegen. Man wird nur abgezockt. Die meisten Plätze sind manipuliert.“

Im Fragebogen wurde

- von 20% der Schülerinnen und Schüler die Übereinstimmung mit der Aussage, dass das Ergebnis beim Werfen einer Münze von Gott abhängt, bekundet.

Ähnlich wie im angeführten Interviewauszug kam in weiteren Interviews zum Ausdruck, dass ein tiefer Glaube an Gott mit dem Zufall vereinbart wird, indem unterstellt wird, dass Gott die Macht hat, zu entscheiden, wann er den Zufall allein lässt und wann er eingreifen will (Amir & Williams, 1999, S. 95).

Bei der Auswertung der Fragebögen wurde deutlich, dass von den sogenannten asiatischen Kindern der Erfolg im Leben zu einem weitaus höheren Grad zu Gott attribuiert wird als der Erfolg im Fußball oder als eine Sechs beim Würfeln zu bekommen. Zudem wurde festgestellt, dass die sogenannten englischen Kinder, die gemäß ihrer Angabe zum Großteil christlichen Glaubens waren, durch alle Kontexte hindurch signifikant weniger religiös waren und weniger mit Attribuierungen zu Gott übereinstimmten als die sogenannten asiatischen, zum größten Teil muslimischen Kinder. Die Unterschiede bei den als religiöser eingestuften sogenannten asiatischen Kindern im Grad der Attribuierung zu Gott in den verschiedenen Kontexten werden mit der Auffassung der Kinder erklärt, dass Gott normalerweise nur bei „wichtigen" Dingen eingreift. Von Amir und Williams (1999, S. 95) wird darauf hingewiesen, dass trotz der Attribuierungen zu Gott in Kontexten des Zufalls (Würfel, Münzen, Tombolas) genügend Freiraum für das probabilistische Denken übrig ist. Da bei der Analyse der Fragebögen zwischen den „Scores" „Attribuierung zu Gott und Religiosität" und „Attribuierung zu Glück/ Unglück und Aberglaube" und dem „Score" im Teil „Wahrscheinlichkeit" keine signifikante Korrelation festgestellt werden konnte, ist davon auszugehen, dass bei den Kindern im vorliegenden Altersbereich zwei separate Modi des Denkens und Begründens gleichzeitig vorhanden sind – ohne schädliche Interaktionen oder Interferenzen. Für Amir und Williams bedeutet dies, dass das Lernen über Zufall zwar möglich ist, die gewonnenen Erkenntnisse aber nicht zwangsläufig dazu führen, dass der Zufall als außerhalb von Gottes Kontrolle liegend angesehen wird.

Auch die Religiosität kann, bezogen auf die Theorie des Conceptual Change, als ein Element des kognitiven Filters, im Sinne einer metaphysischen Überzeugung, aufgefasst werden. Neben der Berücksichtigung der Religiosität in Form einer internalen Variable ist die Religion im Zusammenhang mit der Enkulturation, also in Form einer externalen Variable, zu berücksichtigen.

Was die Erfahrungen der Kinder betrifft, so werden von Amir und Williams (1999, S. 92 f.) folgende Auszüge aus Interviews beschrieben:

- „Manchmal hängt es von der Art ab, wie man den Würfel wirft",
- „Es hängt davon ab, wie man ihn dreht oder wie man ihn in der Hand hält vor dem Werfen. Manchmal dreht ihn jemand und er landet immer auf der 6, oder sie halten ihn in ihrer Hand und tun so als ob sie ihn schütteln. Und dann fällt er und sie haben die Zahl, die sie möchten",
- „Ich mag es nicht um Geld zu spielen, weil ich Kartenspiele kaum spielen kann. Sie (d. h. seine Freunde) können dabei mogeln",
- „Also, es hängt davon ab, wie man seine Finger hält, denn ich habe einen Weg, wie man jedesmal Kopf bekommen kann" und
- „Ich schnipse sie hoch in die Luft – landet auf Zahl, es passiert immer."

Zudem wurde von 8 von 33 Kindern, mit denen über das Werfen einer Münze gesprochen wurde, die Überzeugung zum Ausdruck gebracht, dass das Ergebnis des Münzwurfs davon abhängt, wie die Münze geworfen wird.

Im Fragebogen wurde

- von 35% der Schülerinnen und Schüler die Übereinstimmung mit der Aussage, dass das Ergebnis beim Werfen einer Münze davon abhängt, wie man die Münze wirft, bekundet.

Laut Amir und Williams (1999, S. 95 f.) beziehen sich die für normative Konzepte der Wahrscheinlichkeit relevanten Erfahrungen der Kinder größtenteils auf Glücksspiele – bezüglich der Arten der Glücksspiele (Brettspiele, Würfelspiele, Kartenspiele sowie das Werfen einer Münze) sind mehr Gemeinsamkeiten als Unterschiede zwischen den getesteten Kindern

festzustellen. Die beiden zuletzt aufgeführten Interviewauszüge lassen sich als kausale Erklärungen interpretieren, welche sich der Annahme eines Zufall-Modells zu widersetzen scheinen. Die Entwicklung des probabilistischen Denkens wird für Amir und Williams (1999) nicht nur durch die Häufigkeit der Erfahrungen, sondern auch durch, im Sinne der Theorie des Conceptual Change, externale Variablen, wie das soziale Umfeld, in dem die betreffenden Erfahrungen gemacht werden, beeinflusst. Beispielhaft wird das Interview mit einem für den Münzwurf bei seiner Fußballmannschaft verantwortlichen Schüler angeführt, der trotz der Häufigkeit seiner Münzwürfe fest davon überzeugt war, das Ergebnis der Münzwürfe kontrollieren zu können – dies lässt sich damit erklären, dass seine „Fähigkeit“ seine Position innerhalb der Mannschaft rechtfertigt (Amir & Williams, 1999, S. 96).

Die Erfahrung allein ist für Amir und Williams (1999) jedoch nicht ausreichend für die Entwicklung von Verallgemeinerungen und einer Theorie – selbst in Bezug auf ein einfaches Konzept, wie die Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit für die sechs Augenzahlen beim Würfeln; dies wird anhand der Entwicklungsgeschichte probabilistischer Denkweisen deutlich, so wie im Abschnitt 2.2.1 beschrieben. Unter Bezug auf David (1970) werden von Amir und Williams (1999, S. 96) hierfür zwei mögliche Erklärungen angeführt:

- zum einen die Unregelmäßigkeit der in früheren Zeiten verwendeten Spielwürfel und
- zum anderen die Verwendung von Spielwürfeln in religiösen Zeremonien.

Was die vorliegende Studie betrifft, so erscheint die erste der beiden Erklärungen aufgrund der heutzutage gegebenen Präzision bei der Fertigung der für gewöhnlich bei Spielen verwendeten Würfel als nicht zutreffend. Die zweite der beiden Erklärungen könnte dagegen eher zutreffend sein, auch wenn heutzutage Spielwürfel an sich in der Regel nicht mehr in religiösen Zeremonien verwendet werden. Jedoch verbindet diese Erklärung die Erfahrung mit bestehenden Überzeugungen, wie dem Glauben an den Einfluss Gottes auf den Zufall (Amir & Williams, 1999, S. 96).

Der Versuch der Quantifizierung der Erfahrungen der Kinder mithilfe des Fragebogens wird von Amir und Williams (1999) als fehlgeschlagen, außer vielleicht im Attribuierungsinstrument, eingestuft, sodass hierzu keine weiteren Angaben veröffentlicht sind.

Bezüglich der von den Kindern verwendeten Begriffe, die das Zufällige ausdrücken, werden von Amir und Williams (1999, S. 97 f.) folgende Auszüge aus Interviews beschrieben:

- „Es ist so, wie wenn man die Straße entlanggeht und ein Stein fiele heraus ... und man würde darüber stolpern. Das wäre Zufall. Passiert einfach aus Versehen“,
- „Beispiel für Zufall? Man möchte, dass das Telefon läutet und es läutet nicht, und man geht nach oben, und es beginnt zu läuten, zufällig ... Wie – Zufall ist etwas, das passiert, aber eine Art von ... man erwartet es nicht, aber es passiert“,
- „100 Würfe einer Münze? Es wäre Zufall, 100 von 100 zu bekommen, aber möglich, 55 zu bekommen vom einen, 45 vom anderen“,
- „Schach ist Zufall, weil man es versuchen muss, und man hat eine Chance des Gewinnens und eine Chance des Nichtgewinnens“,
- „Wie – Zufall, etwas zu werden ... wenn man die Schule verlässt und aufs College oder die Universität geht, etwas zu werden ...“ beziehungsweise
- „Wenn man würfelt und eine 4 bekommt, es ist einfach Glück, Zufall“ und
- „Manchmal, wenn ich ein Spiel spiele, dann kommt der Ball auf mich zu, das ist eine Art von Glück. Wahrscheinlich gibt es das.“

Anhand des Fragebogens wurde die Existenz von unterschiedlichen Interpretationen der Begriffe „Zufall“ und „Glück/Unglück“ bestätigt. Was die verschiedenen Aussagen zur Erklärung des Begriffs „Glück/Unglück“ anbetrifft, so lag die größte Übereinstimmung mit der Er-

klärung von „etwas Glückliches“ als „etwas Gutes, das passiert“ vor. In Bezug auf die verschiedenen Aussagen zur Erklärung des Begriffs „Zufall“ bestand die größte Übereinstimmung mit der Erklärung von „etwas, das durch Zufall passiert“ als „etwas, von dem du nicht sicher bist, ob es passieren wird oder nicht“ (Amir & Williams, 1999, S. 98). Zu beachten ist, dass von der Mehrzahl der Schülerinnen und Schüler jeweils die Übereinstimmung mit verschiedenen Erklärungen bekundet wurde.

Hinsichtlich der Verwendung der Begriffe „Zufall“ und „Glück/Unglück“ in den Interviews wird von Amir und Williams (1999, S. 97 f.) festgehalten, dass der Begriff „Zufall“ am häufigsten mit „etwas, das einfach passiert“ interpretiert wurde; weitere Interpretationen waren „etwas Unerwartetes“ und „etwas Ungewöhnliches“, aber auch „die Möglichkeit, die Gelegenheit, dass etwas passiert“; für „Glück/Unglück“ ergaben sich ebenfalls unterschiedliche Interpretationen, zum Teil bezogen auf das Zufällige, zum Teil auch nicht; eine geläufige Interpretation war „etwas Gutes oder Schlechtes, das passiert ist, ohne nahe liegende Ursache“; bei einer anderen Interpretation war der Faktor „Aberglaube“ mit einbezogen.

Bei der Auswertung der Fragebögen wurde festgestellt, dass die sogenannten englischen Kinder beim „Score“ im Teil „Wahrscheinlichkeit“ bessere Ergebnisse erzielten als die sogenannten asiatischen Kinder. Jedoch ergab die Analyse der Kovarianz, dass die ethnische Zugehörigkeit zwar bei der Verwendung von nicht-verbaler oder numerischer Fähigkeit als Kovarianz ein signifikanter Faktor ist, bei der Verwendung der verbalen Fähigkeit als Kovarianz hingegen nicht. Wird berücksichtigt, dass die verbale Fähigkeit der sogenannten asiatischen Kinder signifikant geringer war als die verbale Fähigkeit der sogenannten englischen Kinder, so lässt sich damit ein wesentlicher Teil der ethnischen Unterschiede im Teil „Wahrscheinlichkeit“ erklären (Amir & Williams, 1999, S. 98).

Was die Anwendung des „Outcome Approach“ von den Kindern betrifft, so werden von Amir und Williams (1999, S. 98 f.) folgende Auszüge aus Interviews beschrieben:

- Auf die Frage „Wenn ein Wettervorhersager sagt, dass es morgen eine Chance von 70% für Regen gibt, was meint er damit?“ wurde die Antwort „Es wird regnen. Ich glaube, die Wetterleute sind gut. Ich schaue Fußball im Fernsehen. Sie sagen ‚es wird regnerisch, windig sein‘ und es passiert ...“ gegeben und
- auf die Frage „Nun, lass uns diesen fairen Würfel anschauen. Ich habe fünf der Oberflächen schwarz und eine weiß angemalt. Wenn ich 6-mal würfeln würde, wäre es für mich wahrscheinlicher, 6 schwarze oder 5 schwarze und 1 weiße zu bekommen?“ lautete die Antwort „Wenn die Bemalung dort ist ... eine Art von wie ein kleiner Knoten, ich würde erwarten, dass er jedesmal auf schwarz landet. Aber wenn es wie eine normale Bemalung ist ... gleiche Chance, schwarz zu bekommen, und gleiche Chance, weiß zu bekommen.“

Die betreffenden Fragen wurden von der Interviewsituation in das Multiple-Choice-Format des Fragebogens übertragen – jedoch ergab sich bei der Auswertung des Fragebogens nur ein sehr geringer Koeffizient der Zuverlässigkeit für den ermittelten „Score“, sodass hierzu keine weiteren Daten veröffentlicht sind.

Unter Bezug auf Konold (1989) wird von Amir und Williams (1999, S. 99) darauf hingewiesen, dass bei der Ergebnisorientierung typischerweise nach Kausalität gesucht wird. Die Aussage „gleiche Chance“ im zweiten Interviewauszug stellt somit keine Einschätzung der Wahrscheinlichkeit dar, sondern drückt die Unentschlossenheit bezüglich der Entscheidung aus, im Sinne von „ich weiß es nicht“. Gemäß Amir und Williams (1999, S. 99) wurde der „Outcome Approach“ von Kindern in der untersuchten Altersgruppe häufig angewendet, wobei die Tendenz zur Anwendung beim Wetterproblem um einiges höher war als die Tendenz zur Anwendung beim Würfelproblem. Zudem wurde der „Outcome Approach“ von Kindern mit großer Fähigkeit nicht so oft angewendet wie von Kindern mit geringer Fähigkeit.

In Bezug auf den geringen Koeffizienten der Zuverlässigkeit für den bei der Auswertung des Fragebogens ermittelten „Score“ wird angemerkt, dass dieser zum Teil auf die mögliche Interaktion zwischen der Tendenz zur Anwendung des „Outcome Approach“ und dem Kontext zurückgeführt werden kann. Unterstützt wird diese Sichtweise, wenn der „Outcome Approach“ eher als eine Ausrichtung auf eine Situation als eine allgemeine Heuristik zur Entscheidungsfindung angesehen wird.

Bezüglich der Anwendung von Heuristiken, im Sinne von „simple everyday heuristics“, werden von Amir und Williams (1999, S. 100) verschiedene Auszüge aus Interviews beschrieben – für die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Verfügbarkeit* sind dies folgende Auszüge:

- „6 ist schwieriger. Weil jedesmal, wenn man würfelt, landet er immer auf einer 2 oder einer 1, oder einer 3, oder einer 5. Wenn man möchte, dass er auf einer 6 landet, dann wird er nie dort landen, aber wenn man es nicht möchte, dann wird sie kommen“ und auf die Nachfrage „Erinnerst du dich daran aus Spielen?“ weiter „Ja, Schlangen und Leitern, Monopoly. Jedesmal wenn man eine 6 möchte um herauszukommen – nie reicht es bei einem. Aber bei den anderen Leuten, sie bekommen immer 6er. Aber wenn ich an der Reihe bin, ich bekomme sie nie“ beziehungsweise
- „Wenn man eine Zahl will, ist es schwieriger sie zu bekommen. Es hängt auch davon ab, ob man mogelt. Wenn man es langsam macht, könnte die Zahl gerade kommen. Wenn man es eilig hat, eine Zahl zu bekommen, wenn man in einem Spiel ist, man würfelt und würfelt und bekommt die Zahl nicht. Wenn man alleine spielt, man würfelt einfach, und es kommt zu der Zahl, die man wollte.“

Im Fragebogen wurde

- von 25% der Schülerinnen und Schüler die Übereinstimmung mit der Aussage, dass eine Sechs beim Würfeln schwerer zu bekommen ist als andere Augenzahlen, bekundet.

Amir und Williams (1999, S. 99) weisen darauf hin, dass in einer Vielzahl der Interviews deutlich wurde, dass die Einschätzung, dass die Chancen eine Sechs zu bekommen gering sind, aus Erinnerungen an Spiele hervorging, in denen eine lange Zeit darauf gewartet werden musste, eine „6“ zu bekommen, welche für einen bestimmten Schritt im Spiel gebraucht wurde. Unter Bezug auf Kahneman et al. (1982) werden die angeführten Interviewauszüge von Amir und Williams (1999, S. 99) als Beispiele für die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Verfügbarkeit* und den damit, im Sinne einer kognitiven Verzerrung, einhergehenden Illusionen aufgrund der Abrufbarkeit von Beispielen, im vorliegenden Fall für das Würfeln einer Sechs, angesehen. Für Amir und Williams (1999, S. 100) ist eine klare kulturelle Verbindung feststellbar – so führt die Erfahrung des Kindes mit Brettspielen mit Würfeln, bei denen die „6“ eine spezielle Rolle einnimmt, zu einer bestimmten Ansicht von den Wahrscheinlichkeiten der Augenzahlen eines Spielwürfels. Angemerkt wird, dass in einer Gesellschaft mit anderen Arten von Spielen andere Auswirkungen erwartet werden könnten. Zudem wird darauf hingewiesen, dass das gleiche Spiel von verschiedenen Kindern in einer unterschiedlichen Art und Weise erfahren werden kann.

Hinsichtlich der Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Repräsentativität* werden von Amir und Williams (1999, S. 100) folgende Auszüge aus Interviews angeführt:

- Auf die Frage „Eine gewöhnliche Münze wird fünfmal geworfen und jedesmal erscheint Kopf. Das nächste Mal, wenn man die Münze wirft, ist es wahrscheinlicher, dass wieder Kopf erscheint, oder Zahl, oder gleich wahrscheinlich?“ wurde die

Antwort „Zahl“ und auf die Nachfrage „Warum?“ die Antwort „Wahrscheinlich wird es Kopf, Zahl, Kopf, Zahl, Kopf, Zahl und immer weiter so sein“ gegeben;

- auf die Frage „Eine 2-Pence-Münze und eine 10-Pence-Münze werden gleichzeitig geworfen. Ein mögliches Ergebnis ist Kopf beim 2 Pence und Zahl beim 10 Pence. Was sind die anderen Möglichkeiten?“ lautete die Antwort „ZZ, KK, ZK“ und auf die Nachfrage „Welche Ergebnisse sind wahrscheinlicher, oder sind sie alle gleich wahrscheinlich?“ „KZ, ZK sind wahrscheinlicher. Wahrscheinlich, wenn eine auf K landen wird, dann wird die andere auf Zahl landen. KK wird ungefähr bei 1 von 10 passieren; ZZ ungefähr bei 1 von 10.“

Im Fragebogen wurde

- von 41% der Schülerinnen und Schüler bezüglich der möglichen Ergebnisse beim gleichzeitigen Werfen von zwei unterscheidbaren Münzen nur „KZ und ZK“ angegeben und
- von 26% der Schülerinnen und Schüler bei mindestens einem Drittel der dafür relevanten Fragen die Heuristik der *Repräsentativität* angewendet.

Für Amir und Williams (1999, S. 100) war die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Repräsentativität* weitverbreitet und damit verbunden die Erwartung, dass eine Stichprobe repräsentativ für die Grundgesamtheit ist, aus der sie entnommen wird. Diese kognitive Verzerrung lässt sich den mit der Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Repräsentativität* einhergehenden Fehlvorstellungen von Zufall zuordnen. Von Amir und Williams wird angemerkt, dass die Heuristik der *Repräsentativität* signifikant häufiger, und zwar über alle Analysen der Kovarianz hinweg, von den sogenannten asiatischen Kindern als von den sogenannten englischen Kindern angewendet wurde. Eine Erklärung kann hierfür nicht gegeben werden – es wird als nötig erachtet, dass eine tiefer gehende Untersuchung der kulturellen Einstellungen und der „Repräsentativität“ an sich durchgeführt wird (Amir & Williams, 1999, S. 103).

In Bezug auf die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Gleichwahrscheinlichkeit* werden von Amir und Williams (1999, S. 101) folgende Auszüge aus Interviews angeführt:

- Auf die Frage „Wie groß ist die Chance, eine ‚4‘ bei einem 10-seitigen Würfel zu bekommen?“ wurde die Antwort „Wahrscheinlich“ gegeben und weiter im Wechsel „Könntest du mir die Chancen in zahlenmäßiger Form angeben?“ „50-50. Gleiche Chance wie eine 6 oder eine 4 oder eine 3 zu bekommen“ „Wie groß ist die Chance, eine Augenzahl größer als 6 zu bekommen?“ „Wahrscheinlich. 50-50“ „Und eine gerade Zahl zu bekommen?“ „Wahrscheinlich. 50-50.“

Zudem wurde von 10 von 23 Kindern, mit denen über eine Lotterie in einer Mathematikklasse mit 13 Jungen und 16 Mädchen gesprochen wurde, die Überzeugung zum Ausdruck gebracht, dass es genauso wahrscheinlich wäre einen Jungen auszuwählen wie ein Mädchen. Folgende Erklärung illustriert diese Einschätzung:

- „Es ist genauso wahrscheinlich, dass es ein Mädchen wie ein Junge ist“ und auf die Nachfrage „Warum?“ „Weil es genauso ... wenn man einfach mit der Hand hineingreift und man einen herauszieht, dann macht es nichts aus, wenn es mehr Mädchen gibt als Jungen.“

Im Fragebogen wurde

- von 19% der Schülerinnen und Schüler bei mindestens einem Drittel der dafür relevanten Fragen die Heuristik der *Gleichwahrscheinlichkeit* angewendet.

Von Amir und Williams (1999, S. 101) wird zu dem angeführten ersten Interviewauszug („10-seitiger Würfel“) angemerkt, dass die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Gleichwahrscheinlichkeit* dadurch charakterisiert ist, dass verschiedene Möglichkeiten jeweils als gleich wahrscheinlich und daher durchgängig mit demselben Chancenverhältnis „50-50“ eingeschätzt werden, was eine natürliche Eigenschaft des Zufalls zu sein scheint. Diese Auffassung wird auch im zweiten Interviewauszug („Jungen und Mädchen“) deutlich. Was die Gesamtheit der Interviews anbetrifft, so war die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Gleichwahrscheinlichkeit* bei bestimmten Fragen weitverbreitet, bezogen auf alle Fragen jedoch in Relation zur Anwendung der anderen „simple everyday heuristics“ weniger stark verbreitet.

Bei der Auswertung der Fragebögen wurden zwischen den sogenannten asiatischen Kindern und den sogenannten englischen Kindern keine signifikanten Unterschiede gefunden. Allerdings könnte die Tendenz zur Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Gleichwahrscheinlichkeit* durchaus kulturell beeinflusst sein, da die meisten Spiele und Zufallsgeräte, die in der westlichen Welt geläufig sind, auf gleichen Chancen für die möglichen Ergebnisse basieren (Amir & Williams, 1999, S. 101).

4.6.3 Zusammenfassung der Ergebnisse von Amir und Williams

Zusammenfassend wird von Amir und Williams (1999, S. 102) festgehalten, dass eine Verbindung zwischen den Überzeugungen der Kinder und ihrem informellen probabilistischen Wissen, was Zufallsgeräte betrifft, besteht. So werden gebräuchliche Zufallsgeräte, die im Mathematikunterricht eingesetzt werden, um etwas über Wahrscheinlichkeit zu lernen, von einigen Kindern als nicht-zufällig angesehen, da diese Zufallsgeräte für beeinflussbar gehalten werden durch individuelle Fähigkeiten und Tricks, durch unterschiedliche Grade von Glück beziehungsweise durch Gott. Dies wurde sowohl in den Interviews als auch bei der Auswertung der Fragebögen deutlich.

Darüber hinaus konnte bei einem signifikanten Anteil der Kinder ein gewisser Grad des Aberglaubens festgestellt werden – wiederum sowohl in den Interviews als auch bei der Auswertung der Fragebögen. Der Aberglaube kommt laut Amir und Williams (1999) in probabilistischen Situationen zum Vorschein, indem einige Leute als glücklicher als andere angesehen werden, zum Beispiel bei Glücksspielen, oder eine persönliche Vorliebe, beispielsweise für eine bestimmte Seite beim Wurf einer Münze, damit erklärt wird, dass diese Vorliebe zu besseren Ergebnissen führt. Auch hier besteht also eine Verbindung zwischen den Überzeugungen der Kinder und ihrem informellen probabilistischen Wissen.

Zudem konnte in Bezug auf die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Verfügbarkeit* eine Verbindung zwischen der Erfahrung der Kinder und ihrem informellen probabilistischen Wissen gezeigt werden – von den Kindern wird dabei anhand der Erinnerung, beispielsweise wie lange bei Würfelspielen auf eine „Sechs“ gewartet werden musste, eine Verallgemeinerung durchgeführt, zum Beispiel, dass die Wahrscheinlichkeit für eine „Sechs“ geringer ist als die Wahrscheinlichkeit für jede der anderen Augenzahlen. Was die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Gleichwahrscheinlichkeit* betrifft, so könnte eine Verbindung zwischen einer Kultur, die Chancen in den meisten Fällen als „gleichwahrscheinlich“ ansieht (beispielsweise in Spielen, bei denen Würfel verwendet werden, deren mögliche Ergebnisse als „gleichwahrscheinlich“ aufgefasst werden), und formalem probabilistischen Wissen bestehen (Amir & Williams, 1999, S. 102). Die „simple everyday heuristic“ der *Repräsentativität* wurde von den sogenannten asiatischen Kindern signifikant häufiger angewendet als von den sogenannten englischen Kindern, ohne dass hierfür eine Erklärung vorliegt.

In den Interviews kamen bei einigen der Kinder starke Ausrichtungen des Denkens zum Vorschein, was die Erklärung von weltlichen Phänomenen betrifft. Diesbezüglich werden von Amir und Williams (1999, S. 102) vier verschiedene Typen von Ausrichtungen unterschieden:

- erstens die „religiöse“,
- zweitens die „misstrauische“,
- drittens die „schicksalsorientierte“ und
- viertens die „kausale“ Ausrichtung.

Amir und Williams verweisen auf das Beispiel des „religiösen“ Kindes, das rationales und nicht-rationales Denken vermischte, und das Beispiel des „misstrauischen“ Charakters, der nach Manipulationen und Tricks suchte, überall wo Zufall involviert war; zudem gab es ein „schicksalsorientiertes“ Kind, das den Aberglauben bei fast allen seiner Erklärungen verwendete, jene von zufälligen Phänomenen eingeschlossen, und auch einen „kausalen“ Denker, der den Zufall nur in Betracht zog, wenn keine Kausalität identifiziert werden konnte. Von den meisten der interviewten Kinder wurde jedoch eine Mischung dieser Modi des Denkens verwendet, was in Form des Fragebogens nicht analysierbar war. Für Amir und Williams weisen diese Ausrichtungen auf Verbindungen zwischen der Kultur, hauptsächlich den Überzeugungen, und dem probabilistischen Denken hin.

Die Entdeckung weiterer Verbindungen zwischen Kultur und probabilistischem Denken ergab sich anhand des Vergleichs zwischen den beiden unterschiedlichen ethnischen Gruppen. Von Amir und Williams (1999, S. 102 f.) wurde festgestellt, dass sich die sogenannten asiatischen Kinder und die sogenannten englischen Kinder hinsichtlich ihrer Kultur, operational definiert als „Überzeugungen, Sprache und Erfahrung umfassend“, unterscheiden – so sind die sogenannten asiatischen Kinder in Bezug auf ihre Überzeugungen und Erfahrungen im Zusammenhang mit „Zufall“ als religiöser einzustufen, mit der Tendenz, Ereignisse in einem höheren Maße zu Gott zu attribuieren, auch in normativ zufälligen Kontexten. Unterschiede zwischen den beiden ethnischen Gruppen sind auch beim „Wissen von Wahrscheinlichkeit“ feststellbar. Diesbezüglich wird jedoch darauf hingewiesen, dass es naheliegend erscheint, dass die verbalen Fähigkeiten einen großen Teil der ethnischen Unterschiede beim probabilistischen Denken inkorporieren. Was die numerischen und die nicht-verbalen Fähigkeiten anbelangt, so werden die Unterschiede zwischen den beiden ethnischen Gruppen als nicht signifikant eingestuft. Als mögliche Erklärung für die unterschiedlichen verbalen Fähigkeiten wird von Amir und Williams (1999, S. 103) unter Bezug auf Cummins (1984) angeführt, dass die sogenannten asiatischen Kinder, obwohl die meisten von ihnen in England geboren worden waren, nach einer Generation oder mehr als bilingual innerhalb einer subtraktiven Umgebung angesehen werden können – das heißt sie lernen Englisch als Ersatz für ihre ursprüngliche Sprache und haben damit einen kognitiven Nachteil im Vergleich zu einsprachigen Kindern. In diesem Zusammenhang wird von Amir und Williams (1999, S. 103) hervorgehoben, dass davon auszugehen ist, dass die linguistische Komponente probabilistischer Aufgaben erheblich ist, erheblicher als gemeinhin angenommen.

Hinsichtlich der Frage der Verallgemeinerung der Ergebnisse der vorliegenden Studie wird von Amir und Williams (1999, S. 104) angemerkt, dass die Auswahl der getesteten Schülerinnen und Schüler nicht repräsentativ für die ganze Vielfalt der Bevölkerung an Kindern in England ist, beispielsweise aufgrund des vergleichsweise hohen Anteils an ethnischen Minderheiten, sodass eine Extrapolation vorsichtig gehandhabt werden sollte – allerdings bestehen kaum Zweifel, dass anderswo (sowohl in Gemeinden in England als auch in anderen Ländern) Bevölkerungsgruppen gefunden werden können, die vergleichbare Charakteristiken aufweisen.

4.6.4 Folgerungen aus den Befunden von Amir und Williams

Amir und Williams (1999, S. 104) weisen darauf hin, dass bei der Instruktion nicht davon ausgegangen werden sollte, dass Kinder „Zufall“ oder „Glück/Unglück“ nur auf eine (einzige) Art und Weise verstehen.

Darüber hinaus sollten Lehrerinnen und Lehrer lernen, die Heuristiken und Ansätze, die gemeinhin von Kindern in probabilistischen Situationen angewendet werden, zu erkennen: „Repräsentativität“, „Verfügbarkeit“ und „Gleichwahrscheinlichkeit“ sowie den „Outcome Approach“. Zum einen lassen sich damit die Antworten der Schülerinnen und Schüler konstruktiv analysieren und zum anderen kann dies als Grundlage zur Diagnose und Korrektur von Fehlvorstellungen dienen.

Bei der Instruktion sollte zudem nicht nur vom formalen mathematischen Wissen, sondern auch vom informellen Wissen der Schülerinnen und Schüler ausgegangen werden. Neben den beschriebenen Heuristiken und dem „Outcome Approach“ sollten zusätzlich die spezifischen Überzeugungen und die kulturellen Unterschiede zwischen den Schülerinnen und Schülern berücksichtigt werden, um kommunikativen Missverständnissen vorzubeugen und zu gewährleisten, dass die betrachteten Situationen von den Schülerinnen und Schülern stochastisch gesehen werden. Insbesondere sollte der Grad des Aberglaubens der Schülerinnen und Schüler berücksichtigt und in der Klasse thematisiert werden. Dies wird als nötig erachtet, um sicherzustellen, dass Zufallsgeräte, wie Spielwürfel und Münzen, von den Schülerinnen und Schülern auch als zufällig angesehen werden.

Abschließend wird von Amir und Williams (1999, S. 105) darauf hingewiesen, dass die Sprache ein wichtiger Faktor ist, was unterschiedliche Leistungen im mathematischen Bereich „Wahrscheinlichkeit“ aufgrund von kulturellen Unterschieden betrifft. Die Problematik der Sprache trifft dabei insbesondere in zweierlei Hinsicht zu: zum einen in Bezug auf die Verfeinerung der technischen Sprache, auf die sich die „Wahrscheinlichkeit“ stützt, und zum anderen bezüglich der Verwendung zweier gegensätzlicher Sprachen, derjenigen, die von den Kindern in ihrem Zuhause gesprochen wird, und derjenigen, die als Medium der Instruktion fungiert.

Im folgenden Kapitel werden die Ergebnisse der Analyse sowie die zentralen Befunde der vorgestellten Studien und die sich daraus ergebenden Forderungen an den Unterricht zusammengefasst.

Kapitel 5

Zusammenfassung

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der durchgeführten Analyse sowie die zentralen Befunde der im vorangegangenen Kapitel vorgestellten Studien und die sich daraus ergebenden Forderungen an den Unterricht zusammengefasst.

Für drei zentrale Konzepte des intuitiven probabilistischen Denkens, das Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit, das Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit und die Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen, werden die für einen Conceptual Change bedeutsamen Veränderungen in der kognitiven Struktur der Schülerinnen und Schüler in einem neu entwickelten theoretischen Modell dargestellt.

5.1 Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens unter der Perspektive des Conceptual Change

5.1.1 Generelles

Bei den vorgestellten Studien werden hinsichtlich der Konzeption der Aufgaben sowie der Interpretation der Ergebnisse Unterschiede deutlich. Dies zeigt eine Analyse der einzelnen Aufgaben und der Ergebnisse der Auswertung anhand der Aufgaben- und Lösungscharakteristik sowie der Evaluationskriterien:

- So können die Studie von Green (1982) und die Studie von Fischbein und Schnarch (1997) bezüglich der Konzeption der Aufgaben sowie der Interpretation der Ergebnisse als vergleichbar angesehen werden. Beide Studien stellen zudem Querschnittuntersuchungen dar. Ein wesentlicher Unterschied besteht jedoch in der Anzahl der getesteten Schülerinnen und Schüler. Was die Konzeption der Aufgaben sowie die Interpretation der Ergebnisse betrifft, so ist die Studie von Rasfeld (2004) sehr ähnlich zu diesen beiden Studien. Jedoch handelt es sich hierbei um keine Querschnittuntersuchung, sondern um einen Vergleich zwischen Schülerinnen und Schülern mit stochastischen Vorkenntnissen und Schülerinnen und Schülern ohne stochastische Vorkenntnisse in einer bestimmten Altersgruppe.
- Die Studie von Amir und Williams (1999) unterscheidet sich von den drei genannten Studien hinsichtlich der Konzeption in Form einer Kombination aus Interview und Fragebogen sowie in Bezug auf die Art der im Fragebogen verwendeten Aufgaben, indem bei einem Teil der Aufgaben der Grad der Übereinstimmung mit bestimmten Aussagen anzugeben ist. Auch bei dieser Studie handelt es sich um keine Querschnittuntersuchung, sondern um einen Vergleich zwischen zwei verschiedenen Gruppen von Schülerinnen und Schülern in einer bestimmten Altersgruppe, im vorliegenden Fall zwei verschiedenen ethnischen Gruppen.
- Die Studie von Engel und Sedlmeier (2005) weist gewisse Ähnlichkeiten zur Studie von Green (1982) und zur Studie von Fischbein und Schnarch (1997) auf, was die Konzeption der Aufgaben betrifft. Zudem handelt es sich bei der Studie von Engel und Sedlmeier (2005) ebenfalls um eine Querschnittuntersuchung. Der Hauptunterschied besteht in der Interpretation der Ergebnisse der ersten beiden der insgesamt vier Aufgaben dieser Studie: So werden die Antworten der Schülerinnen und Schüler bei der ersten Aufgabe nicht als Ganzes bewertet, sondern nach einzelnen Kriterien isoliert betrachtet und interpretiert; bei der zweiten Aufgabe werden die Antworten der Schülerinnen und Schüler klassifiziert und in Gruppen zusammengefasst interpretiert.

Zu berücksichtigen ist darüber hinaus, dass zumindest bei einem Teil der in der Studie von Green (1982) und in der Studie von Rasfeld (2004) untersuchten Schülerinnen und Schüler das Vorhandensein von Sekundärintuitionen von Zufall und Wahrscheinlichkeit vorausgesetzt werden kann.

Insgesamt betrachtet erscheinen die Unterschiede zwischen den einzelnen Studien jedoch nicht als gravierend, sodass sich ihre Befunde gut miteinander in Beziehung setzen und in Bezug auf die Theorie des Conceptual Change einordnen lassen.

Die Ergebnisse zur Analyse der in den vorgestellten Studien verwendeten Aufgaben zeigt die nachfolgende Abbildung im Überblick.

		Green (1982)					Fischbein und Schnarch (1997)								Rasfeld (2004)				Engel und Sedlmeier (2005)			
Nummer in der Reihenfolge der Vorstellung der Aufgaben der betreffenden Studie		1	2*	3	4	5	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	1	2	3	4
Problemstellung entspricht einem wort- bzw. buchstabenkodifizierten Problem		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
In der Problemstellung wird der Einsatz eines Zufallsgerätes beschrieben		X	X		X			X	X			X		X	X	X	X	X	X			
In der Problemstellung wird eine Alltagssituation beschrieben		X	X	X	X		X	X		X	X		X	X					X	X	X	X
Problemrahmung entspricht dem „Problem Solving Framing“		X	X			X	X	X	X			X	X	X	X	X	X	X				
Problemrahmung entspricht dem „Social Judgement Framing“		x		X	X					X	X								X	X	X	X
Wahrscheinlichkeit ist in der Aufgabe in nicht-numerischer Form repräsentiert		X	X			X			X	X		X		X	X		X	X			X	X
Wahrscheinlichkeit ist in der Aufgabe in Form von Prozenten repräsentiert											X											
Vorstellung von Zufall wird untersucht, nicht Vorstellung von Wahrscheinlichkeit				X	X		X	X								X			X	X		
Interpretation der Wahrscheinlichkeit als Laplace-Wahrscheinlichkeit		X	X			X			X					X	X			x				
Interpretation der Wahrscheinlichkeit als frequentistische Wahrscheinlichkeit										X	X	X					X				X	X
Intuition, die zur Lösung erforderlich ist, entspricht einer Primärintuition																						
Intuition, die zur Lösung erforderlich ist, entspricht einer Sekundärintuition		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit zur Lösung erforderlich		X	X			x			x					X	x							
Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit zur Lösung erforderlich				X	X		X	X								X			X	X		
Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen zur Lösung erforderlich											X	X					X				X	
Nicht extra aufgeführtes bzw. zusätzliches Wissen zur Lösung erforderlich			x			X			X	X			X		X			X				X
Mit zunehmendem Alter nimmt die relative Lösungshäufigkeit ab				X								X		x						X		X
Mit zunehmendem Alter bleibt die relative Lösungshäufigkeit nahezu gleich					x	x			X	X	x								X		X	
Mit zunehmendem Alter nimmt die relative Lösungshäufigkeit zu		X	X				X	X		x			x									
Mit zunehmendem Alter nimmt die relative Häufigkeit der typischen Fehlvorstellung zu											X	X	X	X						x		X
Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Repräsentativität* vermutet				X	X		X	X		x	X	X				X	X		X	X	X	X
Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Verfügbarkeit* vermutet													X									
Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Gleichwahrscheinlichkeit* vermutet		x		X		X	x	x	X					x	x	x			x			
Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *kausalen Schemata* vermutet														X								
Anwendung des „Outcome Approach“ vermutet		x		x		x			x							x				x		
Problematik der linguistischen Interpretation des Aufgabentextes vermutet		X		X		X			x						x	x	x	x	X		x	X
Zugeordnete Stufe des probabilistischen Denkens, die zur Lösung erforderlich ist	Stufe IA																					
	Stufe IB																					
	Stufe IIA	X								X				X								X
	Stufe IIB					x			x						x							
	Stufe III		X	X	X	X	X	X	X		X	X	X		X	X	X	X	X	X	X	

*Die Angaben beziehen sich auf die als „Question 6(d)“ bezeichnete, ausführlich beschriebene Teilaufgabe

Abb. 5.1. Übersicht zu den Analyse-Ergebnissen der in den vorgestellten Studien verwendeten Aufgaben

Aufgeführt sind jeweils die Kriterien, die sich anhand der Analyse als charakteristisch für die untersuchten Studien herausgestellt haben. So wird zur besseren Übersichtlichkeit beispielsweise bezüglich des zur Lösung erforderlichen Wissens nur dasjenige Wissen einzeln aufgeführt, das bei insgesamt mehr als drei Aufgaben in den vorgestellten Studien zur Lösung erforderlich ist.

Das Zutreffen eines Kriteriums bei einer Aufgabe ist jeweils durch ein Kreuz codiert. Den Grad, zu dem das Kriterium zutrifft, zeigt die Größe des Kreuzes: Ein großes Kreuz codiert das Zutreffen und ein kleines Kreuz das teilweise Zutreffen. Kein Kreuz bedeutet entweder, dass das Kriterium bei der betreffenden Aufgabe nicht zutrifft, oder dass das Kriterium nicht vorliegt. Letzteres ist beispielsweise bei den Aufgaben der Studie von Rasfeld (2004), die keine Querschnittuntersuchung darstellt, in Bezug auf die Veränderung der relativen Lösungshäufigkeit mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler zu berücksichtigen. Bezüglich des zur Lösung erforderlichen Wissens codiert ein kleines Kreuz, dass dieses Wissen bei der betreffenden Aufgabe zwar erforderlich ist, aber nicht im Vordergrund steht.

Zu berücksichtigen ist zudem, dass die vorgenommene Einsortierung hinsichtlich des Zutreffensgrades eines Kriteriums bei einzelnen Aufgaben trotz des Bestrebens nach einer größtmöglichen Objektivität diskutierbar bleibt. Dies wird allerdings nicht als problematisch erachtet, da die vorgenommene Einsortierung in erster Linie dazu dienen soll, über alle Aufgaben hinweg einen Überblick zu ermöglichen, im Sinne des Erkennens von Schwerpunkten bzw. Tendenzen. Um das Erkennen optisch zu erleichtern, sind im Überblick auch Zeilen mit aufgeführt, die, bezogen auf die Analyse, „Leerzeilen“ darstellen, etwa die Zeile „Intuition, die zur Lösung erforderlich ist, entspricht einer Primärintuition“.

Bei der Einsortierung hinsichtlich des Zutreffensgrades eines Kriteriums wurde versucht, folgende Ergebnisse der Analyse in Bezug auf einzelne Aufgaben angemessen darzustellen:

- Bei der ersten Aufgabe der Studie von Green (1982) entspricht die Rahmung des Problems dem „Problem Solving Framing“. Dies ist durch ein großes Kreuz in der entsprechenden Zeile codiert; die dabei zusätzlich vorhandenen Züge des „Social Judgement Framing“ sind durch ein kleines Kreuz in der entsprechenden Zeile codiert.
- Bei der vierten Aufgabe der Studie von Rasfeld (2004) wird die Wahrscheinlichkeit als geometrische Wahrscheinlichkeit interpretiert, welche als eine Verallgemeinerung der Laplace-Wahrscheinlichkeit aufgefasst werden kann. Dies ist durch ein kleines Kreuz in der Zeile „Interpretation der Wahrscheinlichkeit als Laplace-Wahrscheinlichkeit“ codiert.
- Bei der vierten Aufgabe der Studie von Fischbein und Schnarch (1997) ist die von der Klassenstufe 5 zur Klassenstufe 9 hin nahezu gleichbleibende relative Lösungshäufigkeit durch ein großes Kreuz codiert und die deutliche Zunahme der relativen Lösungshäufigkeit von der Klassenstufe 9 zur Klassenstufe 11 hin durch ein kleines Kreuz.
- Bei der fünften Aufgabe der Studie von Green (1982), der dritten Aufgabe der Studie von Fischbein und Schnarch (1997) und der ersten Aufgabe der Studie von Rasfeld (2004) ist die im Allgemeinen zutreffende Zuordnung zur Stufe III des probabilistischen Denkens durch ein großes Kreuz codiert und die im Falle der Instruktion mögliche Zuordnung zur Stufe IIB des probabilistischen Denkens durch ein kleines Kreuz.
- Bei der siebten Aufgabe der Studie von Fischbein und Schnarch (1997) wird nicht die Vorstellung von Wahrscheinlichkeit oder von Zufall, sondern die Vorstellung von Häufigkeit untersucht. Da es sich hierbei um die einzige Aufgabe in den vorgestellten Studien handelt, bei der diese Vorstellung untersucht wird, wurde auf das

Aufführen dieses Kriteriums verzichtet. Ebenso wurde auf das Aufführen der vermuteten Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Adjustierung von einem Anker aus* verzichtet, welche nur bei der vierten Aufgabe der Studie von Rasfeld (2004) zutreffend gewesen wäre, da die Anwendung dieser Heuristik in der betreffenden Studie selbst nicht erwähnt wird. Auf das Aufführen der vermuteten Anwendung der „simple everyday heuristic“ des *Take The Best* wurde verzichtet, da es sich bei dieser Heuristik nicht um eine probabilistisch-spezifische „simple everyday heuristic“ handelt. Anzumerken ist, dass die Anwendung der Heuristik des *Take The Best* bei zehn der insgesamt 21 aufgeführten Aufgaben vermutet werden kann.

Da in dieser Arbeit die Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens bei Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I im Mittelpunkt steht, betreffen die Angaben zur Veränderung der relativen Lösungshäufigkeit mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler bei der Studie von Fischbein und Schnarch (1997) nur die untersuchten Gruppen an Schülerinnen und Schülern und nicht die Gruppe der getesteten Studentinnen und Studenten. Die Aufgaben der Studie von Amir und Williams (1999) sind in der Übersicht nicht berücksichtigt, da bei der Analyse dieser Studie von dem ansonsten verwendeten Schema der Analyse abgewichen wurde.

Zu den in den Studien von Green (1982), Fischbein und Schnarch (1997), Rasfeld (2004) und Engel und Sedlmeier (2005) verwendeten Aufgaben lässt sich anhand von Abbildung 5.1 in einer ersten Sichtung Folgendes zusammenfassen:

- Bei allen Aufgaben entspricht die Problemstellung einem wort- bzw. buchstabenkodifizierten Problem. Abgesehen von einer Aufgabe, bei der in der Problemstellung weder der Einsatz eines Zufallsgerätes noch eine Alltagssituation beschrieben wird, wird in der Problemstellung der Aufgaben zu annähernd gleichen Anteilen entweder der Einsatz eines Zufallsgerätes oder eine Alltagssituation oder beides zugleich beschrieben.
- Die Problemrahmung entspricht bei ungefähr zwei Drittel der Aufgaben dem „Problem Solving Framing“ und bei ungefähr einem Drittel der Aufgaben dem „Social Judgement Framing“.
- Bei etwa zwei Drittel der Aufgaben wird die Vorstellung von Wahrscheinlichkeit untersucht, bei etwa einem Drittel der Aufgaben die Vorstellung von Zufall. Mit Ausnahme von einer Aufgabe, bei der die Wahrscheinlichkeit in Form von Prozenten repräsentiert ist, ist die Wahrscheinlichkeit bei den Aufgaben, bei denen die Vorstellung von Wahrscheinlichkeit untersucht wird, in nicht-numerischer Form repräsentiert. Dies lässt sich darauf zurückführen, dass in allen Studien die Untersuchung des intuitiven probabilistischen Denkens zentral ist und somit in der Regel qualitative Einschätzungen der Wahrscheinlichkeit im Vordergrund stehen.
- Bei etwa der Hälfte der Aufgaben, bei denen die Vorstellung von Wahrscheinlichkeit untersucht wird, wird die Wahrscheinlichkeit bei der erwarteten Lösung als Laplace-Wahrscheinlichkeit interpretiert, bei der anderen Hälfte dieser Aufgaben als frequentistische Wahrscheinlichkeit. Die zur Lösung erforderliche Intuition entspricht bei allen Aufgaben einer Sekundärintuition. Bei mehr als zwei Drittel der Aufgaben ist zur Lösung entweder das Wissen zum Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit oder das Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit oder das Wissen zur Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen erforderlich. Am häufigsten steht dabei das Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit im Vordergrund.
- Zu ungefähr gleichen Anteilen gilt bei den Aufgaben für die relative Lösungshäufigkeit: Sie nimmt mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler entweder zu oder sie bleibt nahezu gleich oder sie nimmt ab. Bei nahezu allen Aufgaben, bei

denen die relative Lösungshäufigkeit mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler abnimmt, nimmt die relative Häufigkeit der typischen Fehlvorstellung zu. Zudem nimmt die relative Häufigkeit der typischen Fehlvorstellung bei einer Aufgabe, bei der die relative Lösungshäufigkeit mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler nahezu gleich bleibt, und bei einer Aufgabe, bei der die relative Lösungshäufigkeit mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler zunimmt, zu.

- Bei ungefähr zwei Drittel der Aufgaben lässt sich die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Repräsentativität*, bei einer Aufgabe die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Verfügbarkeit*, bei etwa der Hälfte der Aufgaben die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Gleichwahrscheinlichkeit* und bei einer Aufgabe die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *kausalen Schemata* vermuten. Die Anwendung des „Outcome Approach“ lässt sich bei ungefähr einem Drittel der Aufgaben zumindest als teilweise zutreffend annehmen.
- Bei etwa der Hälfte der Aufgaben lässt sich die Problematik der linguistischen Interpretation des Aufgabentextes durch die Probanden vermuten.
- Bezüglich der zugeordneten Stufe des probabilistischen Denkens, die zur Lösung der jeweiligen Aufgabe erforderlich ist, gilt: Vier Aufgaben kann die Stufe IIA, den anderen Aufgaben, somit der überwiegenden Mehrzahl, die Stufe III des probabilistischen Denkens zugeordnet werden, wobei, wie beschrieben, im Falle der Instruktion, drei Aufgaben auch die Stufe IIB des probabilistischen Denkens zugeordnet werden kann.

Über diese ersten Befunde hinaus können folgende Zusammenhänge zwischen dem für die Lösung erforderlichen Wissen zum Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit, zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit und zur Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen und den einzelnen Kriterien der Analyse hergestellt werden:

- Bei den Aufgaben, in denen das Wissen zum Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit zur Lösung erforderlich ist, nimmt die relative Lösungshäufigkeit mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler entweder zu, was am häufigsten der Fall ist, insbesondere dann, wenn dieses Wissen im Vordergrund steht, oder sie bleibt nahezu gleich oder sie nimmt ab, wobei beides gleich häufig der Fall ist. Die relative Häufigkeit der typischen Fehlvorstellung nimmt in der Regel nicht zu. Was die Anwendung von „simple everyday heuristics“ betrifft, so lässt sich bei diesen Aufgaben in der Regel die Anwendung der Heuristik der *Gleichwahrscheinlichkeit* vermuten.
- Bei den Aufgaben, in denen das Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit zur Lösung erforderlich ist, nimmt die relative Lösungshäufigkeit mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler entweder ab oder sie bleibt nahezu gleich oder sie nimmt zu, wobei dies jeweils gleich häufig der Fall ist. Die relative Häufigkeit der typischen Fehlvorstellung nimmt in der Regel nicht zu. Was die Anwendung von „simple everyday heuristics“ betrifft, so lässt sich bei allen diesen Aufgaben die Anwendung der Heuristik der *Repräsentativität* und bei mehr als zwei Drittel dieser Aufgaben die Anwendung der Heuristik der *Gleichwahrscheinlichkeit* vermuten.
- Bei den Aufgaben, in denen das Wissen zur Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen zur Lösung erforderlich ist, gilt für die relative Lösungshäufigkeit entweder, dass sie mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler nahezu gleich bleibt, was am häufigsten der Fall ist, oder, dass sie abnimmt. Die relative Häufigkeit der typischen Fehlvorstellung nimmt in der Regel zu. Was die Anwen-

dung von „simple everyday heuristics“ betrifft, so lässt sich bei allen diesen Aufgaben die Anwendung der Heuristik der *Repräsentativität* vermuten.

- Die Problemrahmung entspricht bei allen Aufgaben, in denen das Wissen zum Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit zur Lösung erforderlich ist, dem „Problem Solving Framing“, wobei bei einer Aufgabe Züge des „Social Judgement Framing“ vorhanden sind. Zudem wird bei allen Aufgaben, in denen das Wissen zum Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit zur Lösung erforderlich ist, der Einsatz eines Zufallsgerätes beschrieben.
- Was die Aufgaben betrifft, in denen das Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit zur Lösung erforderlich ist, so entspricht die Problemrahmung bei etwa der Hälfte dieser Aufgaben dem „Social Judgement Framing“ und bei der anderen Hälfte dieser Aufgaben dem „Problem Solving Framing“; bei den Aufgaben, bei denen die Rahmung des Problems dem „Social Judgement Framing“ entspricht, bleibt die relative Lösungshäufigkeit mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler nahezu gleich oder sie nimmt ab; bei den Aufgaben, bei denen die Rahmung des Problems dem „Problem Solving Framing“ entspricht, nimmt die relative Lösungshäufigkeit hingegen mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler zu. Mit Ausnahme von einer Aufgabe, bei der bewusst auf eine stärkere inhaltliche Einkleidung verzichtet wurde, wird bei allen Aufgaben, in denen das Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit zur Lösung erforderlich ist, eine Alltagssituation beschrieben; bei ungefähr der Hälfte dieser Aufgaben wird zudem der Einsatz eines Zufallsgerätes beschrieben.
- Was die Aufgaben betrifft, in denen das Wissen zur Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen zur Lösung erforderlich ist, so entspricht die Problemrahmung bei der Hälfte dieser Aufgaben dem „Problem Solving Framing“ und bei der anderen Hälfte dieser Aufgaben dem „Social Judgement Framing“, wobei wiederum bei jeweils der Hälfte dieser Aufgaben der Einsatz eines Zufallsgerätes und bei der anderen Hälfte dieser Aufgaben eine Alltagssituation beschrieben wird.
- Bei den Aufgaben, in denen das Wissen zum Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit zur Lösung erforderlich ist, wird die Wahrscheinlichkeit als Laplace-Wahrscheinlichkeit interpretiert und bei den Aufgaben, in denen das Wissen zur Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen zur Lösung erforderlich ist, als frequentistische Wahrscheinlichkeit.
- Hinsichtlich der vermuteten Anwendung des „Outcome Approach“ ist anzumerken, dass dies nur auf Aufgaben zutrifft, in denen entweder das Wissen zum Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit oder das Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit zur Lösung erforderlich ist. Die vermutete Problematik der linguistischen Interpretation des Aufgabentextes durch die Probanden trifft dagegen auf Aufgaben zu, in denen das Wissen zum Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit oder das Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit oder das Wissen zur Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen zur Lösung erforderlich ist.
- Die Stufe des probabilistischen Denkens, die zur Lösung erforderlich ist, kann bei den Aufgaben, in denen das Wissen zum Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit zur Lösung erforderlich ist, entweder der Stufe IIA, was auf ein Drittel dieser Aufgaben zutrifft, oder der Stufe III, was auf zwei Drittel dieser Aufgaben zutrifft, zugeordnet werden. Bei den Aufgaben, denen die Stufe III des probabilistischen Denkens zugeordnet werden kann, ist im Falle der Instruktion in der Regel auch die Zuordnung zur Stufe IIB des probabilistischen Denkens möglich. Allen Aufgaben, in denen das Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit zur Lösung erforderlich ist, kann die Stufe III des probabilistischen Denkens zugeordnet werden,

ebenso allen Aufgaben, in denen das Wissen zur Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen zur Lösung erforderlich ist.

Im Folgenden werden zuerst die Ergebnisse und im Anschluss daran die Folgerungen aus den Befunden der vorgestellten Studien zusammengefasst. Zudem werden die Erkenntnisse zur Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens, was das Konzept Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit, das Konzept Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit und das Konzept Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen betrifft, in einem neu entwickelten theoretischen Modell dargestellt.

5.1.2 Ergebnisse der Studien

Ein zentrales Ergebnis der Studie von Green (1982) und der Studie von Amir und Williams (1999) stellt für den Autor dar, dass die Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens der Schülerinnen und Schüler im Bereich der Sekundarstufe I

- zum einen in einem engen Zusammenhang mit der Entwicklung der individuellen intellektuellen Fähigkeiten steht und
- zum anderen in einem erheblichen Maße von den individuellen linguistischen Fähigkeiten abhängig ist.

Der große Einfluss dieser beiden Faktoren lässt sich unter Bezug auf die Theorie des Conceptual Change damit erklären, dass sowohl die individuellen intellektuellen Fähigkeiten als auch die individuellen linguistischen Fähigkeiten von erheblicher Bedeutung für die Plausibilität und die Verständlichkeit einer neuen Vorstellung, der „gefilterten gelehrten Vorstellung“, sind.

Was das informelle probabilistische Wissen der Schülerinnen und Schüler betrifft, das vom Autor in Bezug auf die Theorie des Conceptual Change den „alten Vorstellungen“ zugeordnet wird, so sind verschiedene Faktoren zu unterscheiden, die die Entwicklung dieses Wissens beeinflussen:

- Einer dieser Faktoren ist die individuelle Erfahrung der Schülerinnen und Schüler, welche alle Lebensbereiche außer dem Bereich der formalen mathematischen Instruktion umfasst. Bezogen auf den Erfahrungsbereich der Schülerinnen und Schüler sind die Erfahrungen, die in Spielen mit zufälligen Elementen gesammelt werden, von besonderer Bedeutung für die Entwicklung des informellen probabilistischen Wissens. Dies wird durch die Ergebnisse der Studie von Amir und Williams (1999) belegt. In welcher Form diese Erfahrungen in das informelle probabilistische Wissen einfließen, wird durch weitere Faktoren beeinflusst: zum einen durch externale Variablen, wie zum Beispiel religiöse Vorstellungen als ein Element der Enkulturation, und zum anderen durch internale Variablen. Zu den internalen Variablen zählen die Überzeugungen der Schülerinnen und Schüler, etwa ihre Religiosität, ihr Aberglaube, ihr Glaube an individuelle Fähigkeiten, an Tricks und an Grade von Glück, welche sich in der Ausrichtung ihres Denkens widerspiegeln. Die Überzeugungen der Schülerinnen und Schüler können als Elemente des kognitiven Filters aufgefasst werden.
- Ein weiterer Faktor, der die Entwicklung des informellen probabilistischen Wissens beeinflusst, ist die Sprache, einhergehend mit den linguistischen Fähigkeiten. Diese ist entscheidend für die Interpretation von Begriffen, die das Zufällige ausdrücken. Belegt wird dies wiederum durch die Ergebnisse der Studie von Amir und Williams (1999).

Bezogen auf die Wissensbasis wird der direkt zugängliche Teil des informellen probabilistischen Wissens vom Autor dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet. Der intuitive Teil des informellen probabilistischen Wissens wird, bezogen auf die probabilistischen Intuitionen, vom Autor den Primärintuitionen zugeordnet.

Im engen Zusammenhang mit dem informellen probabilistischen Wissen steht für den Autor die Anwendung von „simple everyday heuristics“, mit denen kognitive Verzerrungen einhergehen, die zu „typischen Fehlschlüssen“ führen. Belegt wird durch die Ergebnisse der Studie von Amir und Williams (1999), dass sich die Anwendung der Heuristik der *Verfügbarkeit* auf die Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler und daraus resultierende Verallgemeinerungen zurückführen lässt und dass die Anwendung der Heuristik der *Gleichwahrscheinlichkeit* sowohl durch die Enkulturation als auch durch formales probabilistisches Wissen begünstigt werden kann. Was die Anwendung von „simple everyday heuristics“ und die damit einhergehenden kognitiven Verzerrungen betrifft, so sind mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler unterschiedliche Tendenzen ersichtlich:

- Bezüglich der Heuristik der *Repräsentativität* wurde in der Studie von Fischbein und Schnarch (1997) festgestellt: Die Fehlvorstellungen von Zufall, die zu dem als „negative recency effect“ oder „gambler’s fallacy“ bezeichneten Fehlschluss führen, nehmen mit zunehmendem Alter ab; der Einfluss der Inkonsistenz zwischen der Logik der Wahrscheinlichkeit und der Logik der Repräsentativität, der zu dem als „conjunction fallacy“ bezeichneten Fehlschluss führt, nimmt ab einem bestimmten Alter ebenfalls ab; die Insensibilität gegenüber der Stichprobengröße nimmt dagegen mit zunehmendem Alter zu.
- In Bezug auf die Heuristik der *Verfügbarkeit* wurde in der Studie von Fischbein und Schnarch (1997) festgestellt, dass die Illusion der Vorstellbarkeit mit zunehmendem Alter zunimmt, und
- hinsichtlich der Heuristik der *kausalen Schemata* wurde in der Studie von Fischbein und Schnarch (1997) festgestellt, dass die Fehlvorstellung der Kausalität, die zu dem als „time-axis fallacy“ oder „the Falk phenomenon“ bezeichneten Fehlschluss führt, mit zunehmendem Alter ebenfalls zunimmt.

Unter Bezug auf die Theorie des Conceptual Change werden die unterschiedlichen Tendenzen bei den verschiedenen Fehlvorstellungen vom Autor mit dem Einfluss der allgemeinen Rahmentheorien, den „presuppositions“ erklärt, welche sich mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler aufgrund des vielfältigen Wissenszuwachses in den verschiedensten inner- und außermathematischen Bereichen verändern. Hinsichtlich des informellen probabilistischen Wissens wurde in der Studie von Amir und Williams (1999) neben der Anwendung von „simple everyday heuristics“ auch die Anwendung des „Outcome Approach“ nachgewiesen.

Die genannten Fehlvorstellungen stehen für den Autor auch im engen Zusammenhang mit dem formalen probabilistischen Wissen. An diesbezüglich bedeutenden Konzepten werden in den vorgestellten Studien genannt:

- das Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit, welches mit den Begriffen „Grundraum“ und „Symmetrie“ einhergeht,
- das Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit,
- die Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen,
- die Multiplikationsregel und die Additionsregel von Wahrscheinlichkeiten sowie
- die Regeln für die Wahrscheinlichkeit konjunktiver Ereignisse.

Bezogen auf die Wissensbasis wird der nicht direkt zugängliche Teil des formalen probabilistischen Wissens vom Autor dem „higher order knowledge“ zugeordnet. Der intuitive Teil des

formalen probabilistischen Wissens wird, bezogen auf die probabilistischen Intuitionen, vom Autor den Sekundärintuitionen zugeordnet.

Was die Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens betrifft, so sind die Auswirkungen von Umstrukturierungen innerhalb der Wissensbasis zu berücksichtigen. Elemente des „higher order knowledge“ können, im Sinne der Theorie des Conceptual Change, zu Elementen des „direct accessible knowledge“ werden. Dass dies beispielsweise für das Wissen zum Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit zutreffend ist, legen für den Autor die Ergebnisse der Studie von Green (1982) und die Ergebnisse der Studie von Fischbein und Schnarch (1997) nahe. Mit dieser Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis lässt sich aus Sicht des Autors auch erklären, dass die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Gleichwahrscheinlichkeit* mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler abnimmt. Im Abschnitt 5.1.4 wird dies ausführlicher dargestellt.

Neben den angeführten probabilistischen Konzepten sind für die Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens weitere, das nicht probabilistisch-spezifische formale mathematische Wissen betreffende Konzepte von Bedeutung. In den vorgestellten Studien werden diesbezüglich genannt:

- die Komplementarität von Mengen,
- der Begriff des Verhältnisses, der Proportion, sowie
- die Verfahren der Kombinatorik[1].

Der nicht direkt zugängliche Teil des nicht probabilistisch-spezifischen formalen mathematischen Wissens wird, bezogen auf die Wissensbasis, vom Autor wiederum dem „higher order knowledge“ zugeordnet. Der intuitive Teil wird, bezogen auf die Intuitionen, vom Autor den Sekundärintuitionen zugeordnet.

Auch hier können, im Sinne der Theorie des Conceptual Change, Elemente des „higher order knowledge“ zu Elementen des „direct accessible knowledge“ werden. Die Umstrukturierungen können sich dabei auf das intuitive probabilistische Denken auswirken. Dass dies beispielsweise in Bezug auf den Begriff des Verhältnisses, der Proportion, zutrifft, legen für den Autor die Ergebnisse der Studie von Green (1982), die Ergebnisse der Studie von Fischbein und Schnarch (1997) und die Ergebnisse der Studie von Rasfeld (2004) nahe. Im Abschnitt 5.1.4 wird darauf ebenfalls genauer eingegangen.

Bezüglich der probabilistischen Intuitionen ist davon auszugehen, dass darin im Allgemeinen bestimmte intellektuelle Schemata, allgemeine Prinzipien, eingebettet sind. Mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler werden diese allgemeinen Prinzipien, welche in Bezug auf die Theorie des Conceptual Change den „presuppositions“ zuzuordnen sind, stärker und besser integriert, sodass sich ihr Einfluss auf das intuitive probabilistische Denken vergrößert. Die Ergebnisse der Studie von Green (1982), die Ergebnisse der Studie von Fischbein und Schnarch (1997) und die Ergebnisse der Studie von Engel und Sedlmeier (2005) belegen dies aus Sicht des Autors für folgende allgemeine Prinzipien:

- das Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit, das in Bezug auf die Vorstellung von Zufall dazu führt, dass die Fehlvorstellung der „Repräsentativität“ überwunden wird,
- das Prinzip der Verhältnisgleichheit, das bei bestimmten Problemstellungen dazu führt, dass das Wissen zur Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen nicht angewendet wird, wodurch es zu der kognitiven Verzerrung der Insensibilität gegenüber der Stichprobengröße kommt, und

[1] Angelehnt an die in den Bildungsstandards der KMK im Fach Mathematik getroffene Zuordnung zur mathematischen Leitidee „Zahl“ werden die Verfahren der Kombinatorik als nicht probabilistisch-spezifisch eingestuft.

- das Prinzip der Kausalität, welches zu dem als „time-axis fallacy“ oder „the Falk phenomenon“ bezeichneten Fehlschluss führt.

Eine nähere Beschreibung erfolgt im Abschnitt 5.1.4.

Die Anwendung einzelner Strategien zur Lösung probabilistischer Problemstellungen betreffend lässt sich bezüglich der vorgestellten Studien festhalten, dass Probleme, bei denen ein Anzahlvergleich zur Lösung führt, im Allgemeinen sehr gut gelöst werden, Probleme, zu deren Lösung ein Verhältnisvergleich erforderlich ist, dagegen erst mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler gut gelöst werden. Erklären lässt sich dies aus Sicht des Autors mit der stärkeren und besseren Integration des Prinzips der Verhältnisgleichheit mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler. Darauf deuten die Ergebnisse der Studie von Green (1982) hin. Probleme, zu deren Lösung die Wahrscheinlichkeit als Laplace-Wahrscheinlichkeit zu interpretieren ist, werden im Allgemeinen besser gelöst als Probleme, zu deren Lösung die Wahrscheinlichkeit als frequentistische Wahrscheinlichkeit zu interpretieren ist. Dies kann für den Autor im Zusammenhang damit stehen, dass das Wissen zum Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit ab einem bestimmten Alter der Schülerinnen und Schüler dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden kann. Die Ergebnisse der Studie von Fischbein und Schnarch (1997), die Ergebnisse der Studie von Rasfeld (2004) und die Ergebnisse der Studie von Engel und Sedlmeier (2005) deuten darauf hin.

In Bezug auf das Verständnis von Zufall wurde in der Studie von Green (1982) und in der Studie von Engel und Sedlmeier (2005) festgestellt, dass mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler eher eine Verschlechterung als eine Verbesserung eintritt. Zurückführen lässt sich diese Tendenz aus Sicht des Autors auf den mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler größer werdenden Einfluss des deterministischen Denkens, welcher bezüglich der Theorie des Conceptual Change als ein Element des kognitiven Filters, im Sinne einer metaphysischen Überzeugung, aufgefasst werden kann.

Auf den Einfluss der „presuppositions“ lässt sich für den Autor die Beobachtung zurückführen, dass sich die probabilistischen Intuitionen mit dem Eintritt in die Phase der formalen Operationen nicht stabilisieren. Welche Stufe des probabilistischen Denkens von den Schülerinnen und Schülern bis zum Ende der Sekundarstufe I erreicht wird, ist, wie bereits zu Beginn dieses Abschnitts erwähnt, stark abhängig von der Entwicklung der individuellen intellektuellen Fähigkeiten. Es wird vom Autor davon ausgegangen, dass ein großer Teil der Schülerinnen und Schüler die Stufe III des probabilistischen Denkens bis zum Ende der Sekundarstufe I nicht erreicht. Die Ergebnisse der Studie von Green (1982) und die Ergebnisse der Studie von Engel und Sedlmeier (2005) legen dies nahe.

Hinsichtlich des Einflusses der Instruktion ist festzuhalten, dass diese sich zwar im Allgemeinen positiv auf die Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens auswirkt, unter Umständen allerdings nicht in dem erwünschten Ausmaß. So sind bei den in der Studie von Rasfeld (2004) untersuchten Schulklassen im Bereich des intuitiven probabilistischen Denkens am Ende der Sekundarstufe I die Leistungen von Schülerinnen und Schülern mit stochastischen Vorkenntnissen im Vergleich zu den Leistungen von Schülerinnen und Schülern ohne stochastische Vorkenntnisse nur unwesentlich besser.

5.1.3 Forderungen an den Unterricht

Ausgehend von den Folgerungen aus den Befunden der vorgestellten Studien ergeben sich für den Autor zentrale Forderungen an den Unterricht. Diese werden nachfolgend aufgeführt. Dabei wird auch der Bezug zur Theorie des Conceptual Change hergestellt.

Bei der Instruktion sollte nicht davon ausgegangen werden, dass die für das probabilistische Denken relevanten Begriffe von allen Schülerinnen und Schülern gleich interpretiert werden. Darauf wird von Green (1982) sowie von Amir und Williams (1999) hingewiesen. Es empfiehlt sich aus Sicht des Autors deshalb insbesondere, zum einen die unterschiedlichen Interpretationen von Begriffen, die das Zufällige ausdrücken, wie beispielsweise „Zufall“ und „Glück/Unglück“ sowie „wahrscheinlich“ und „sicher“, und zum anderen die für die Instruktion relevanten Interpretationen von Wahrscheinlichkeit, zum Beispiel als Laplace-Wahrscheinlichkeit oder als frequentistische Wahrscheinlichkeit, im Unterricht zu thematisieren.

Der Sprache wird von Amir und Williams (1999) in Bezug auf das probabilistische Denken eine zentrale Bedeutung zugeschrieben. Dies betrifft sowohl die Präzisierung der formaltechnischen Begriffe als auch die Synthese zwischen alltäglichen und im Unterricht verwendeten Formulierungen. Vom Autor wird diesbezüglich im Unterricht eine „moderierte Sprachentwicklung“, die verschiedene Stadien der Funktionalität durchläuft, als angemessen angesehen. Insbesondere sollte hierbei von der Lehrkraft der Einfluss des kulturellen Hintergrundes der Schülerinnen und Schüler, im Sinne der externalen Variable der Enkulturation in der Theorie des Conceptual Change, berücksichtigt werden.

Von Amir und Williams (1999) wird es zudem als wichtig erachtet, dass bei der Instruktion nicht nur das formale mathematische Wissen der Schülerinnen und Schüler, sondern auch das informelle Wissen berücksichtigt wird: Dies hilft zum einen, kommunikativen Missverständnissen vorzubeugen, und zum anderen dabei, dass die betrachteten Problemstellungen auch als stochastisch angesehen werden. In der Theorie des Conceptual Change sind die individuellen Überzeugungen in Form von Elementen des kognitiven Filters erfasst. Aus Sicht des Autors empfiehlt es sich, die Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler dann explizit anzusprechen, wenn Zufallsgeräte, wie Würfel oder Münzen, von den Schülerinnen und Schülern in subjektiven Risikosituationen eingesetzt werden.

Mögliche Fehlvorstellungen der Schülerinnen und Schüler betreffend, wird es vom Autor als erforderlich angesehen, dass von den Lehrerinnen und Lehrern die Heuristiken und Ansätze erkannt werden, die von den Schülerinnen und Schülern gemeinhin verwendet werden. Dies sind insbesondere die „simple everyday heuristics“ der *Repräsentativität*, der *Verfügbarkeit* und der *Gleichwahrscheinlichkeit* sowie der Ansatz des „Outcome Approach“, wie aus den Ergebnissen der Studie von Fischbein und Schnarch (1997) und den Ergebnissen der Studie von Amir und Williams (1999) hervorgeht.

Dem Entstehen von Fehlvorstellungen kann aus Sicht des Autors entgegengewirkt werden, indem die Primärintuitionen der Schülerinnen und Schüler im Unterricht aufgegriffen und systematisch hinterfragt werden. Einen zentralen Aspekt bei der Instruktion stellt daher das Anknüpfen an die Primärintuitionen der Schülerinnen und Schüler und der systematische Aufbau von Sekundärintuitionen dar. Für ein erfolgreiches Anknüpfen werden vom Autor in Übereinstimmung mit Engel und Sedlmeier (2005) insbesondere folgende drei Faktoren als bedeutend angesehen:

- das Format, in dem Informationen dargeboten werden,
- die Selbsttätigkeit der Lernenden und
- die Nähe der Problemstellungen zum Alltag der Schülerinnen und Schüler.

Der Aufbau von Sekundärintuitionen sollte dabei aus Sicht des Autors als gradueller Prozess erfolgen – ganz im Sinne der Theorie des Conceptual Change.

Was den Erwerb von zutreffenden Sekundärintuitionen anbelangt, so wird dem Einsatz von Simulationen und der Verwendung von Daten, die von Zufallsgeneratoren erzeugt werden, von Engel und Sedlmeier (2005) eine tragende Rolle zugeschrieben. Für den Autor sind diesbezüglich zwei Vorteile wesentlich:

- Zum einen lässt sich der Aufbau des Verständnisses von zufallsbedingter Variabilität unterstützen und
- zum anderen wird die Interpretation von Wahrscheinlichkeit als frequentistische Wahrscheinlichkeit fassbar.

Da nicht zutreffende Primärintuitionen durch die Simulation zumeist nur bewusst gemacht, aber nicht ersetzt werden, sollte aus Sicht des Autors mit der Simulation die formale mathematische Analyse einhergehen; sofern der betreffende Kontext gegeben ist, sollte dabei die Heuristik des Baumdiagramms in Verbindung mit der Darstellung der Informationen in Form von natürlichen Häufigkeiten angewendet werden – der Einsatz dieser Heuristik sollte jedoch keinesfalls mechanisch ablaufen, sondern ein konzeptuelles Verständnis zum Ziel haben. Auf die genannten Aspekte wird von Green (1982), von Fischbein und Schnarch (1997) sowie von Engel und Sedlmeier (2005) hingewiesen.

Für den Aufbau von stochastischen Kompetenzen erscheint dem Autor das nur arithmetische Durchführen von Berechnungen von Wahrscheinlichkeiten als nicht ausreichend – vielmehr sollte die Art und Weise des probabilistischen Denkens bei der Instruktion in den Mittelpunkt gestellt werden:

- Das Ziehen von Schlussfolgerungen aus den Ergebnissen von Stichproben und das Einschätzen der Stabilität von Häufigkeiten sollten in diesem Zusammenhang zentrale Themen sein.
- Zwischen formalen mathematischen Berechnungen und dem Modellieren und Interpretieren von Modellen sollte im Stochastikunterricht ein Gleichgewicht angestrebt werden.
- Die Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler mit Zufall und Variabilität sollten fächerübergreifend und fächerverbindend sein.
- Probabilistische und deterministische Betrachtungsweisen und Erklärungen sollten im Unterricht aller Fächer sowohl nebeneinander als auch gegenüber gestellt werden.

Dies wird durch die Ergebnisse der Studie von Green (1982), die Ergebnisse der Studie von Fischbein und Schnarch (1997) und die Ergebnisse der Studie von Engel und Sedlmeier (2005) nahegelegt.

Zur Verbesserung der Qualität des Stochastikunterrichts werden vom Autor in Übereinstimmung mit Rasfeld (2004) zusammenfassend folgende Maßnahmen als zentral angesehen:

- erstens, dass stochastische Inhalte in der Ausbildung aller Lehrerinnen und Lehrer im Fach Mathematik verpflichtend vorgeschrieben sind,
- zweitens, dass stochastische Inhalte ab dem ersten Schuljahr verpflichtende Unterrichtsinhalte darstellen,
- drittens, dass die stochastischen Inhalte mit den Inhalten der anderen Bereiche der Mathematik im Unterricht vielfältig vernetzt werden, und
- viertens, dass die Instruktion nach der genetischen Methode erfolgt, sodass die Primärintuitionen der Schülerinnen und Schüler berücksichtigt werden.

5.1.4 Bezug zur Theorie des Conceptual Change

Im Folgenden werden für diejenigen Konzepte, die aufgrund der Ergebnisse der vorgestellten Studien vom Autor als zentral für die Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens der Schülerinnen und Schüler im Bereich der Sekundarstufe I angesehen werden, die für einen

Conceptual Change bedeutsamen Veränderungen in der kognitiven Struktur der Schülerinnen und Schüler in einem theoretischen Modell dargestellt. Dies betrifft folgende drei Konzepte:

- das Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit,
- das Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit und
- die Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen.

Hinweis. Zu berücksichtigen ist, dass sich die nachfolgend dargestellten Zusammenhänge auf die in den vorgestellten Studien untersuchten Schülerinnen und Schüler unter den genannten Instruktionsbedingungen beziehen. Ein Übertragen sollte daher vorsichtig gehandhabt werden.

Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit. In Bezug auf das Wissen zum Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit lässt sich festhalten, dass dieses Wissen anfänglich dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist. So ist die relative Lösungshäufigkeit bei den Aufgaben der vorgestellten Studien, in denen das Wissen zum Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit, was das zur Lösung erforderliche Wissen betrifft, im Vordergrund steht, in den niedrigeren Klassenstufen zumeist vergleichsweise gering – angewendet wird in diesen Klassenstufen die „simple everyday heuristic“ der *Gleichwahrscheinlichkeit*. Bei den Aufgaben der vorgestellten Studien, in denen bezüglich des zur Lösung erforderlichen Wissens gilt, dass das Wissen zum Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit im Vordergrund steht, und in denen die korrekte Anwendung dieses Wissens nicht durch den Einfluss der evaluativen Struktur verhindert wird, nimmt die relative Lösungshäufigkeit mit zunehmender Klassenstufe zu. Dies lässt sich darauf zurückführen, dass es mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler zu einer Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis der Schülerinnen und Schüler kommt: Das Wissen zum Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit ist nicht mehr dem „higher order knowledge“ zuzuordnen, sondern kann dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden. Im Zuge dieser Umstrukturierung nimmt die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Gleichwahrscheinlichkeit* bei Aufgaben, in denen das Wissen zum Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit zur Lösung erforderlich ist, mit zunehmendem Alter ab.

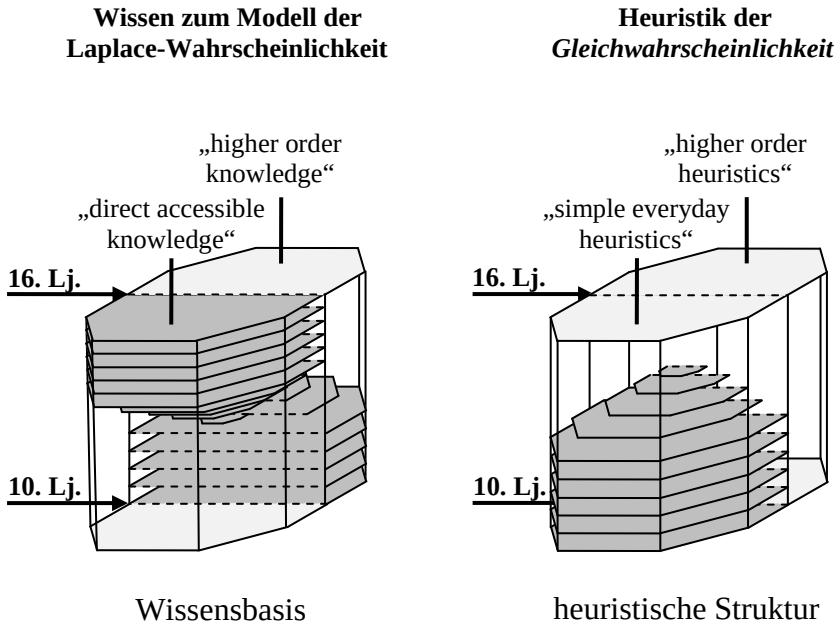
Der Übergang von der kognitiven Struktur zu Beginn der Sekundarstufe I auf die kognitive Struktur am Ende der Sekundarstufe I kann, was das Konzept Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit betrifft, als Conceptual Change angesehen werden.

Im nachfolgend abgebildeten Modell (I), das an die im Abschnitt 3.2.2 beschriebenen Elemente des Prozess-Struktur-Modells von Scholz (1987) anknüpft, ist dies unter Bezug auf die Theorie des Conceptual Change dargestellt:

Der Verlauf der Entwicklung im Bereich der Sekundarstufe I wird dabei in Form von Ebenen veranschaulicht,

- unten beginnend mit der Ebene, welche die kognitive Struktur im 10. Lebensjahr darstellt und
- oben abschließend mit der Ebene, welche die kognitive Struktur im 16. Lebensjahr darstellt.

Bei den Aufgaben der vorgestellten Studien, in denen das Wissen zum Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit, was das zur Lösung erforderliche Wissen betrifft, im Vordergrund steht, ist zudem der Einfluss der evaluativen Struktur zu berücksichtigen, durch den die korrekte Anwendung dieses Wissens, wenn es dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden kann, unter Umständen verhindert wird.



Erläuterung:

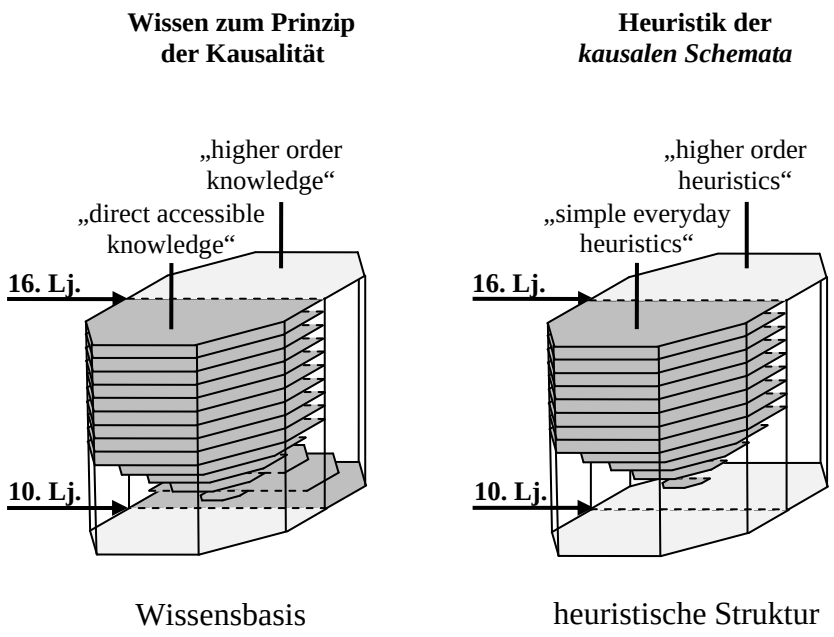
Das Wissen zum Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit ist im 10. Lebensjahr dem „higher order knowledge“ zuzuordnen. Bei Aufgaben, in denen das Wissen zum Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit zur Lösung erforderlich ist, wird die „simple everyday heuristic“ der *Gleichwahrscheinlichkeit* angewendet. Im Laufe der Entwicklung kommt es zu einer Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis: Das Wissen zum Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit wird von einem Element des „higher order knowledge“ zu einem Element des „direct accessible knowledge“. Im Zuge dieser Umstrukturierung nimmt die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Gleichwahrscheinlichkeit* bei Aufgaben, in denen das Wissen zum Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit zur Lösung erforderlich ist, mit zunehmendem Alter ab. Der Übergang von der kognitiven Struktur, wie sie im 10. Lebensjahr dargestellt ist, zu der kognitiven Struktur, wie sie im 16. Lebensjahr dargestellt ist, kann als Conceptual Change angesehen werden.

Abb. 5.2. Modell (I): Umstrukturierungen innerhalb der Wissensbasis und der heuristischen Struktur

Im intuitiven Denkmodus kann die Steuerung der kognitiven Prozesse durch die evaluative Struktur zwar als schwach angesehen werden, wie im Abschnitt 3.2.2 beschrieben, dennoch ist davon auszugehen, dass bestimmte allgemeine Prinzipien, welche, im Sinne der Theorie des Conceptual Change, den „presuppositions“ zuzuordnen sind, einen Einfluss darauf haben, ob ein bestimmtes Wissen, das in Form des „direct accessible knowledge“ vorliegt, korrekt angewendet wird. Eines dieser allgemeinen Prinzipien, welches insbesondere in Bezug auf die korrekte Anwendung des Wissens zum Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit, wenn dieses Wissen dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden kann, von Bedeutung ist, ist das Prinzip der Kausalität. Das Wissen zu diesem Prinzip ist, wie im Abschnitt 3.3.3 beschrieben, mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler, nach einer Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis der Schülerinnen und Schüler, im Sinne der Theorie des Conceptual Change, nicht mehr dem „higher order knowledge“ zuzuordnen, sondern kann dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden. Mit dieser Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis der Schülerinnen und Schüler geht die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *kausalen Schemata* einher, welche unter Umständen die korrekte Anwen-

dung des Wissens zum Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit beeinflusst, wenn dieses Wissen in Form des „direct accessible knowledge“ vorliegt.

Im abgebildeten Modell (II) ist der Verlauf der Entwicklung, was das Wissen zum Prinzip der Kausalität und die Heuristik der *kausalen Schemata* betrifft, dargestellt.



Erläuterung:

Das Wissen zum Prinzip der Kausalität ist im 10. Lebensjahr noch dem „higher order knowledge“ zuzuordnen. Im Laufe der Entwicklung kommt es zu einer Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis: Das Wissen zum Prinzip der Kausalität wird von einem Element des „higher order knowledge“ zu einem Element des „direct accessible knowledge“. Im Zuge dieser Umstrukturierung nimmt mit zunehmendem Alter die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *kausalen Schemata* zu.

Abb. 5.3. Modell (II): Umstrukturierungen innerhalb der Wissensbasis und der heuristischen Struktur

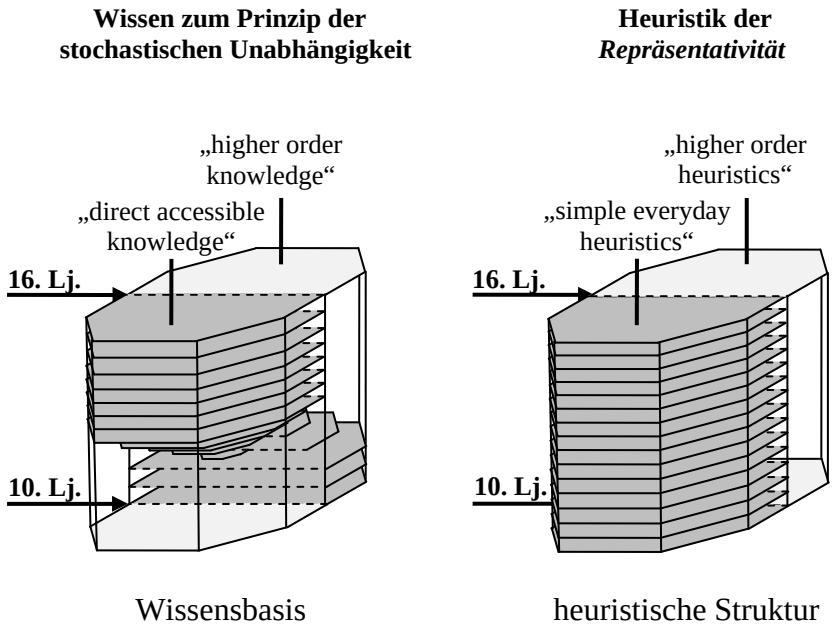
Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit. Bezüglich des Wissens zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit lässt sich festhalten, dass dieses Wissen anfänglich dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist. Bei den Aufgaben der vorgestellten Studien, in denen das Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit zur Lösung erforderlich ist und bei denen die Problemrahmung dem „Problem Solving Framing“ entspricht, ist die relative Lösungshäufigkeit in den niedrigeren Klassenstufen vergleichsweise gering – angewendet wird in diesen Klassenstufen die „simple everyday heuristic“ der *Repräsentativität*. Die relative Lösungshäufigkeit nimmt bei den Aufgaben der vorgestellten Studien, in denen das Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit zur Lösung erforderlich ist und bei denen die Problemrahmung dem „Problem Solving Framing“ entspricht, mit zunehmender Klassenstufe zu. Dies lässt sich darauf zurückführen, dass es mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler zu einer Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis der Schülerinnen und Schüler kommt: Das Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit ist nicht mehr dem „higher order knowledge“ zuzuordnen, sondern kann dem „direct accessible knowledge“ zu-

geordnet werden. Im Zuge dieser Umstrukturierung nimmt die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Repräsentativität* bei Aufgaben, in denen das Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit zur Lösung erforderlich ist und bei denen die Problemrahmung dem „Problem Solving Framing“ entspricht, mit zunehmendem Alter ab.

Bei den Aufgaben der vorgestellten Studien, in denen das Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit zur Lösung erforderlich ist und bei denen die Problemrahmung dem „Social Judgement Framing“ entspricht, ist zudem der Einfluss des Zielsystems zu berücksichtigen, durch den die Anwendung dieses Wissens, wenn es dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden kann, unter Umständen verhindert wird.

Auch wenn die Steuerung der kognitiven Prozesse durch das Zielsystem im intuitiven Denkmodus als schwach angesehen werden kann, wie im Abschnitt 3.2.2 beschrieben, so ist davon auszugehen, dass die Rahmung des Problems einen entscheidenden Einfluss darauf hat, ob ein bestimmtes Wissen, das in Form des „direct accessible knowledge“ vorliegt und zur korrekten Lösung des Problems erforderlich ist, angewendet wird. Bei Aufgaben, in denen das Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit zur Lösung erforderlich ist und bei denen die Problemrahmung dem „Social Judgement Framing“ entspricht, wird aufgrund des Einflusses des Zielsystems unter Umständen nicht auf das Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit zurückgegriffen, wenn dieses Wissen dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden kann, sondern die „simple everyday heuristic“ der *Repräsentativität* angewendet. Die Fehlvorstellungen von Zufall, die, im Sinne einer kognitiven Verzerrung, mit der Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Repräsentativität* einhergehen, sind, im Sinne einer „alten Vorstellung“, weiterhin vorhanden.

Der Verlauf der Entwicklung, was das Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit und die Heuristik der *Repräsentativität* betrifft, ist im abgebildeten Modell (III) dargestellt.



Erläuterung:

Das Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit ist im 10. Lebensjahr dem „higher order knowledge“ zuzuordnen. Bei Aufgaben, in denen das Wissen zum Prinzip der stochasti-

schen Unabhängigkeit zur Lösung erforderlich ist, wird die „simple everyday heuristic“ der *Repräsentativität* angewendet. Im Laufe der Entwicklung kommt es zu einer Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis: Das Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit wird von einem Element des „higher order knowledge“ zu einem Element des „direct accessible knowledge“. Im Zuge dieser Umstrukturierung wird, in Abhängigkeit von der Steuerung durch das Zielsystem, bei Aufgaben, in denen das Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit zur Lösung erforderlich ist, entweder das Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit oder die „simple everyday heuristic“ der *Repräsentativität* angewendet. Die Fehlvorstellungen von Zufall, die, im Sinne einer kognitiven Verzerrung, mit der Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Repräsentativität* einhergehen, sind, im Sinne einer „alten Vorstellung“, weiterhin vorhanden.

Ausblick:

Erst wenn, ausgehend von der kognitiven Struktur, wie sie im 16. Lebensjahr dargestellt ist, mit zunehmendem Alter die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Repräsentativität* bei Aufgaben, in denen das Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit zur Lösung erforderlich ist, abnimmt, kann die Veränderung der kognitiven Struktur als Conceptual Change angesehen werden.

Abb. 5.4. Modell (III): Umstrukturierungen innerhalb der Wissensbasis und der heuristischen Struktur

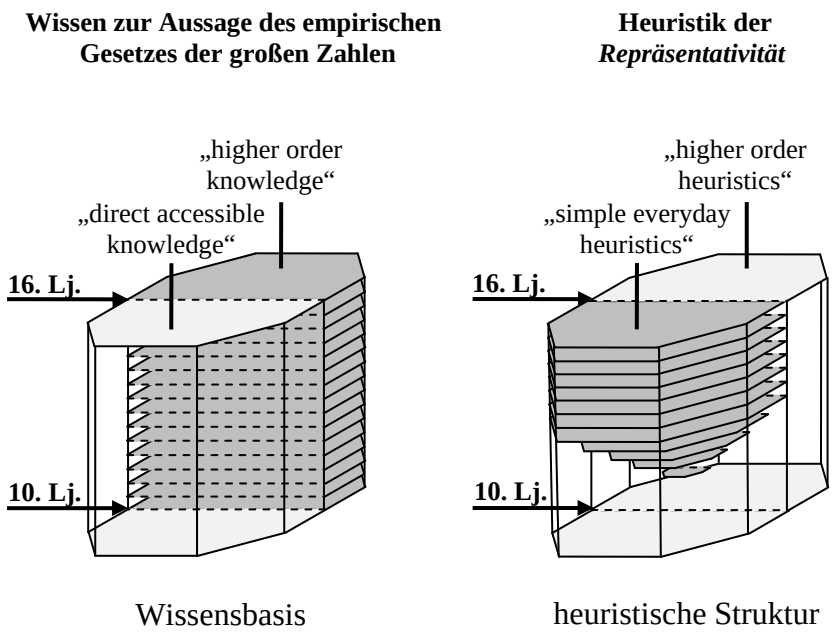
Der Übergang von der kognitiven Struktur zu Beginn der Sekundarstufe I auf die kognitive Struktur am Ende der Sekundarstufe I kann, was das Konzept Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit betrifft, als *scheinbarer* Conceptual Change angesehen werden.

Anhand der Analyse der Ergebnisse der vorgestellten Studien lässt sich vermuten, dass die *Plausibilität* der „gefilterten gelehrten Vorstellung“ des Prinzips der stochastischen Unabhängigkeit der entscheidende Faktor dafür ist, dass kein Conceptual Change stattfindet: Weil das Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit bei bestimmten Problemstellungen nicht plausibel erscheint, wird, gesteuert durch das Zielsystem, nicht das in Form des „direct accessible knowledge“ vorliegende Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit, sondern die „simple everyday heuristic“ der *Repräsentativität* zur Lösung angewendet.

Die nicht ausreichende Plausibilität der „gefilterten gelehrten Vorstellung“ des Prinzips der stochastischen Unabhängigkeit lässt sich insbesondere auf den Widerspruch zur metaphysischen Überzeugung der Determiniertheit zurückführen, welche, wie von Green (1982) und Engel und Sedlmeier (2005) hervorgehoben, mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler aufgrund der Dominanz des deterministischen Denkens im Unterricht stärker wird.

Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen. In Bezug auf das Wissen zur Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen lässt sich festhalten, dass dieses Wissen dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist. So ist die relative Lösungshäufigkeit bei den Aufgaben der vorgestellten Studien, in denen das Wissen zur Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen zur Lösung erforderlich ist, in den niedrigeren Klassenstufen vergleichsweise gering. Bei diesen Aufgaben gilt für die relative Lösungshäufigkeit entweder, dass sie mit zunehmender Klassenstufe nahezu gleich bleibt, oder, dass sie mit zunehmender Klassenstufe abnimmt. Dass die relative Lösungshäufigkeit bei Aufgaben, in denen das Wissen zur Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen zur Lösung erforderlich ist, mit zunehmender Klassenstufe abnimmt, lässt sich darauf zurückführen, dass die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Repräsentativität* mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler zunimmt.

Der Verlauf der Entwicklung, was das Wissen zur Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen und die Heuristik der *Repräsentativität* betrifft, ist im abgebildeten Modell (IV) dargestellt.



Erläuterung:

Das Wissen zur Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen ist im 10. Lebensjahr dem „higher order knowledge“ zuzuordnen. Im Laufe der Entwicklung kommt es zu keiner Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis. Die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Repräsentativität* nimmt bei Aufgaben, in denen das Wissen zur Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen zur Lösung erforderlich ist, mit zunehmendem Alter zu.

Ausblick:

Erst wenn es, ausgehend von der kognitiven Struktur, wie sie im 16. Lebensjahr dargestellt ist, zu einer Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis kommt, sodass das Wissen zur Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen von einem Element des „higher order knowledge“ zu einem Element des „direct accessible knowledge“ wird, und im Zuge dieser Umstrukturierung mit zunehmendem Alter die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Repräsentativität* bei Aufgaben, in denen das Wissen zur Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen zur Lösung erforderlich ist, abnimmt, kann die Veränderung der kognitiven Struktur als Conceptual Change angesehen werden.

Abb. 5.5. Modell (IV): Umstrukturierungen innerhalb der Wissensbasis und der heuristischen Struktur

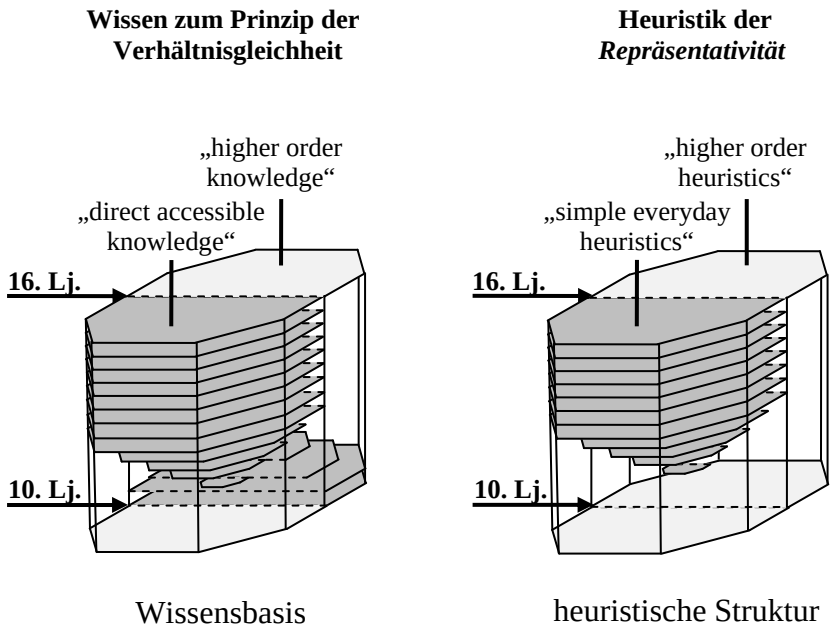
Was das Konzept Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen betrifft, so kann der Übergang von der kognitiven Struktur zu Beginn der Sekundarstufe I auf die kognitive Struktur am Ende der Sekundarstufe I *nicht* als Conceptual Change angesehen werden.

Es lässt sich anhand der Analyse der Ergebnisse der vorgestellten Studien vermuten, dass die *Verständlichkeit* der „gefilterten gelehrten Vorstellung“ der Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen der entscheidende Faktor dafür ist, dass kein Conceptual Change

stattfindet: Da die „gefilterte gelehrte Vorstellung“ der Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen nicht verständlich ist, ist das diesbezügliche Wissen dem „higher order knowledge“ zuzuordnen; im intuitiven Denkmodus wird dieses Wissen nicht zur Lösung von Problemstellungen angewendet.

Das nicht ausreichende Verstehen lässt sich insbesondere darauf zurückführen, dass sich die „gefilterte gelehrte Vorstellung“ der Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen nur schwer integrieren lässt in die vorhandene Vorstellung, das Prinzip der Verhältnisgleichheit, welches, wie von Fischbein und Schnarch (1997) beschrieben, besagt, dass ein Verhältnis für eine unbestimmte Anzahl an Paaren von Zahlen repräsentativ ist. Das Wissen zum Prinzip der Verhältnisgleichheit ist, wie im Abschnitt 3.3.3 beschrieben, mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler, nach einer Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis der Schülerinnen und Schüler, im Sinne der Theorie des Conceptual Change, nicht mehr dem „higher order knowledge“ zuzuordnen, sondern kann dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden. Durch diese Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis der Schülerinnen und Schüler wird bei Aufgaben, in denen das Wissen zur Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen zur Lösung erforderlich ist, mit zunehmendem Alter die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Repräsentativität*, mit der die Insensibilität gegenüber der Stichprobengröße, im Sinne einer kognitiven Verzerrung, einhergeht, begünstigt.

Im abgebildeten Modell (V) ist dies dargestellt.



Erläuterung:

Das Wissen zum Prinzip der Verhältnisgleichheit ist im 10. Lebensjahr noch dem „higher order knowledge“ zuzuordnen. Im Laufe der Entwicklung kommt es zu einer Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis: Das Wissen zum Prinzip der Verhältnisgleichheit wird von einem Element des „higher order knowledge“ zu einem Element des „direct accessible knowledge“. Durch diese Umstrukturierung wird bei Aufgaben, in denen das Wissen zur Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen zur Lösung erforderlich ist, mit zunehmendem Alter die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Repräsentativität*, mit der die Insensibilität gegenüber der Stichprobengröße, im Sinne einer kognitiven Verzerrung, einhergeht, begünstigt.

Abb. 5.6. Modell (V): Umstrukturierungen innerhalb der Wissensbasis und der heuristischen Struktur

Eine mögliche Erklärung dafür, dass die Anwendung der „simple everyday heuristic“ der *Repräsentativität*, mit der die Insensibilität gegenüber der Stichprobengröße, im Sinne einer kognitiven Verzerrung, einhergeht, durch die Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis der Schülerinnen und Schüler, was das Wissen zum Prinzip der Verhältnisgleichheit betrifft, bei Aufgaben, in denen das Wissen zur Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen zur Lösung erforderlich ist, begünstigt wird, ist die *Fruchtbarkeit* der „neuen Vorstellung“, des Prinzips der Verhältnisgleichheit: Das Wissen zum Prinzip der Verhältnisgleichheit, welches nicht mehr dem „higher order knowledge“ zuzuordnen ist, sondern dem „direct accessible knowledge“ zugeordnet werden kann, kann bei einer Vielzahl von nicht probabilistischen Problemstellungen erfolgreich zur Lösung herangezogen werden, beispielsweise bei Problemen im Zusammenhang mit der zentrischen Streckung, und darüber hinaus auf probabilistische Problemstellungen übertragen werden. Für Vorhersagen bei Stichproben vom Typ „Perlen in Urnen“ und „Kugeln in Beuteln“, wie von Hawkins und Kapadia (1984) beschrieben, lässt sich das Wissen zum Prinzip der Verhältnisgleichheit fruchtbar anwenden: Es bildet die Grundlage für eine universell einsetzbare Strategie zur erfolgreichen Lösung dieser Problemstellungen, die Strategie des Verhältnisvergleichs, wie von Green (1982) hervorgehoben. Zudem führt die Anwendung des Wissens zum Prinzip der Verhältnisgleichheit bei Wahrscheinlichkeitsurteilen beim Vergleich von Chancen zur Ermittlung einer korrekten Lösung; hierauf wird von Greer (2001) hingewiesen (siehe Abschnitt 3.3.3).

Zusammenfassung. Zur Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens bei den in den vorgestellten Studien untersuchten Schülerinnen und Schülern lässt sich Folgendes festhalten:

- Was das Konzept Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit betrifft, so kann der Übergang von der kognitiven Struktur zu Beginn der Sekundarstufe I auf die kognitive Struktur am Ende der Sekundarstufe I als Conceptual Change angesehen werden.
- In Bezug auf das Konzept Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit stellt der Übergang von der kognitiven Struktur zu Beginn der Sekundarstufe I auf die kognitive Struktur am Ende der Sekundarstufe I nur einen scheinbaren Conceptual Change dar. Die Fehlvorstellungen von Zufall sind, im Sinne einer „alten Vorstellung“, weiterhin vorhanden. Es lässt sich vermuten, dass die Plausibilität der „gefilterten gelehrten Vorstellung“ des Prinzips der stochastischen Unabhängigkeit der entscheidende Faktor dafür ist, dass kein Conceptual Change stattfindet. Die nicht ausreichende Plausibilität der „gefilterten gelehrten Vorstellung“ des Prinzips der stochastischen Unabhängigkeit lässt sich insbesondere auf den Widerspruch zur metaphysischen Überzeugung der Determiniertheit zurückführen, welche mit zunehmendem Alter der Schülerinnen und Schüler aufgrund der Dominanz des deterministischen Denkens im Unterricht stärker wird.
- Bezüglich des Konzeptes Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen kann der Übergang von der kognitiven Struktur zu Beginn der Sekundarstufe I auf die kognitive Struktur am Ende der Sekundarstufe I nicht als Conceptual Change angesehen werden. Es lässt sich vermuten, dass die Verständlichkeit der „gefilterten gelehrten Vorstellung“ der Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen der entscheidende Faktor dafür ist, dass kein Conceptual Change stattfindet. Das nicht ausreichende Verstehen lässt sich insbesondere darauf zurückführen, dass sich die „gefilterte gelehrte Vorstellung“ der Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen nur schwer in die vorhandene Vorstellung, das Prinzip der Verhältnisgleichheit, integrieren lässt. Durch die Fruchtbarkeit dieser Vorstellung, des Prinzips der Verhältnisgleichheit, wird bei Aufgaben, in denen das Wissen zur Aus-

sage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen zur Lösung erforderlich ist, die Insensibilität gegenüber der Stichprobengröße begünstigt.

Die Erkenntnisse zur Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens bei Schülerinnen und Schülern im Bereich der Sekundarstufe I werden im folgenden Kapitel in ein Modell der Entwicklungsschritte eingeordnet.

Kapitel 6

Einordnung in ein Modell der Entwicklungsschritte

Ausgehend von der Theorie des Conceptual Change und den im vorangegangenen Kapitel zusammengefassten Erkenntnissen zur Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens bei Schülerinnen und Schülern im Bereich der Sekundarstufe I wird vom Autor unter Bezug auf die Bildungsstandards der KMK im Fach Mathematik ein eigenes Modell mit drei Schritten der Entwicklung zum intuitiven probabilistischen Denken konzipiert.

Dieses Modell wird für die drei Konzepte Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit, Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit und Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen anhand von Aufgaben empirisch überprüft und anhand von aufgabenbasierten Tests bestätigt.

Abschließend erfolgt eine zusammenfassende Diskussion sowie ein Ausblick auf mögliche Anschluss-Forschungsschwerpunkte.

6.1 Bildungsstandards im Fach Mathematik

6.1.1 Der Begriff der Kompetenz

Bildungsstandards formulieren seitens der KMK normativ allgemeine Ziele der Bildung und „benennen die *Kompetenzen*, welche die Schule ihren Schülerinnen und Schülern vermitteln muss, damit bestimmte zentrale Bildungsziele erreicht werden“ (Klieme et al., 2003, S. 19). Dabei werden die Kompetenzen spezifiziert, die von den Schülerinnen und Schülern bis zu einer bestimmten Jahrgangsstufe erworben sein sollen.

Bezüglich des Begriffs der Kompetenz verweisen Klieme et al. (2003) auf die Definition von Weinert (2001, S. 27 f.), der Kompetenzen als „die bei Individuen verfügbaren oder durch sie erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, um bestimmte Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten, um die Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können“, charakterisiert. Dem entsprechend stellt „Kompetenz“ gemäß Klieme et al. (2003, S. 72) eine Disposition dar, „die Personen befähigt, bestimmte Arten von Problemen erfolgreich zu lösen, also konkrete Anforderungssituationen eines bestimmten Typs erfolgreich zu bewältigen“.

Was die Ausprägung der „Kompetenz“ beim Individuum betrifft, so sind folgende Facetten zu berücksichtigen: die Fähigkeit, das Wissen, das Verstehen, das Können, das Handeln, die Erfahrung und die Motivation. Von Klieme et al. (2003) wird angemerkt, dass eine konkrete Beschreibung der Kompetenzen erforderlich ist, um die Umsetzung in Aufgabenstellungen und die Erfassung mithilfe von Testverfahren zu ermöglichen.

6.1.2 Kompetenzen beim probabilistischen Denken

In den „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss“ werden die Kompetenzen beschrieben, über die Schülerinnen und Schüler am Ende der Sekundarstufe I verfügen sollen. Was das intuitive probabilistische Denken betrifft, so lassen sich an inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen – welche der Leitidee „Daten und Zufall“ zugeordnet sind – aufführen:

- „Die Schülerinnen und Schüler beschreiben Zufallserscheinungen in alltäglichen Situationen“ sowie
- „Die Schülerinnen und Schüler bestimmen Wahrscheinlichkeiten bei Zufallsexperimenten“ (KMK, 2004, S. 12).

Bezüglich der letzteren der beiden aufgeführten Kompetenz-Beschreibungen ist anzumerken, dass davon auszugehen ist, dass die Bestimmung von „formalen Wahrscheinlichkeiten“ gemeint ist.

In den „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss“ werden die Kompetenzen beschrieben, über die Schülerinnen und Schüler am Ende der Jahrgangsstufe 9 verfügen sollen. In Bezug auf das intuitive probabilistische Denken lässt sich neben den beiden bereits genannten Kompetenzen als weitere Kompetenz aufführen:

- „Die Schülerinnen und Schüler interpretieren Wahrscheinlichkeitsaussagen aus dem Alltag“ (KMK, 2005a, S. 11).

In den „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich“ wird – was das intuitive probabilistische Denken anbelangt – das Vergleichen von Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen in Zufallsexperimenten als Standard genannt, welcher an inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen die Kenntnis von Grundbegriffen wie zum Beispiel „sicher“, „unmöglich“ und „wahrscheinlich“ sowie das Einschätzen von Gewinnchancen bei einfachen Zufallsexperimenten (wie Würfelspielen) beinhaltet (KMK, 2005b, S. 11). Es kann also davon ausgegangen werden, dass die in den „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich“ aufgeführten Kompetenzen in den Kompetenzen, über die Schülerinnen und Schüler am Ende der Sekundarstufe I verfügen sollen, implizit enthalten sind.

6.2 Ein Modell der Entwicklungsschritte zum intuitiven probabilistischen Denken

6.2.1 Kompetenz-Strukturen als Leitlinie zu Anforderungen an ein Modell der Entwicklungsschritte

Ausgehend von den im Abschnitt 6.1.1 aufgeführten Facetten der individuellen Ausprägung von Kompetenz ergeben sich für Klieme et al. (2003, S. 73 f.) folgende Anforderungen in Bezug auf die Entwicklung von Kompetenzmodellen: Kompetenz lässt sich nur leistungsbezogen erfassen und messen, Kompetenz verbindet Wissen und Können, Kompetenz ist als Befähigung zu sehen, um Situationen beziehungsweise Aufgaben zu bewältigen, und Kompetenz lässt sich nicht durch einzelne, isolierte Leistungen erfassen oder darstellen.

Kompetenzmodelle geben Dimensionen und Stufen von Kompetenzen an, die sich mithilfe geeigneter Aufgaben empirisch überprüfen lassen. Jede dieser Stufen ist dabei durch kognitive Prozesse und Handlungen einer bestimmten Qualität charakterisiert, die Schülerinnen und Schüler auf dieser Stufe bewältigen können, nicht aber Schülerinnen und Schüler auf niedrigeren Stufen. Klieme et al. (2003) weisen darauf hin, dass ein Kompetenzmodell kognitive Leistungen unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades spezifizieren muss, damit zum einen Hinweise für die Konstruktion von Aufgaben vorliegen und zum anderen die Einordnung des Lösens oder Nichtlösens einer Aufgabe möglich ist, um verstehen zu können, was das Lösen oder Nichtlösen der betreffenden Aufgabe bedeutet. Zudem sollte im Rahmen der verschiedenen Stufungen von Kompetenzen im Kompetenzmodell ein bestimmter Mindeststandard ausgewiesen sein. Angemerkt wird, dass es Aufgabe eines Kompetenzmodells ist, zum einen zu beschreiben, welche Lernergebnisse von Schülerinnen und Schülern einer bestimmten Altersstufe erwartet werden können, und zum anderen aufzuzeigen, welche Wege sich zum Wissen und Können einschlagen lassen. Darüber hinaus wird eine positive Beschreibung der Kompetenzen und der Mindestanforderungen im Besonderen empfohlen. Außerdem weisen Klieme et al. darauf hin, dass sich die Stufen eines Kompetenzmodells eventuell als Schritte beim Erwerb von Kompetenzen interpretieren lassen, das heißt als Beschreibung, wie der Erwerb von Kompetenz verläuft.

Auf der Grundlage der beschriebenen Anforderungen an ein Kompetenzmodell wird im Folgenden ein Modell von Entwicklungsschritten zum intuitiven probabilistischen Denken konzipiert.

6.2.2 Das Ziel der Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens im Sinne der Bildungsstandards

Bezogen auf die Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens lässt sich aus den im Abschnitt 6.1.2 beschriebenen Kompetenzen und unter Beachtung der im vorangegangenen Abschnitt aufgeführten Anforderungen an ein Kompetenzmodell als Ziel, das die Schülerinnen und Schüler am Ende der Sekundarstufe I erreicht haben sollen, ableiten: *„Die Schülerinnen und Schüler schätzen Zufallserscheinungen und Wahrscheinlichkeiten intuitiv ein.*“

Dieses Entwicklungsziel lässt sich leistungsbezogen erfassen und messen, es verbindet Wissen und Können und beschreibt die Fähigkeit, Situationen beziehungsweise Aufgaben zu bewältigen. Was die Relevanz dieses Entwicklungsziels betrifft, so fordern beispielsweise Engel und Sedlmeier (2005), wie im Abschnitt 4.5.4 beschrieben, dass im Stochastikunterricht Vorstellungen im Sinne von validen stochastischen Sekundärintuitionen aufgebaut werden müssen, wobei der Erwerb dieser Vorstellungen als gradueller Prozess erfolgen sollte.

Für Martignon und Wassner (2005, S. 220) sind „probabilistische Intuitionen [...] nicht weniger grundlegend als arithmetische oder geometrische Intuitionen“. Rasfeld (2004, S. 33 f.) betont, dass sich der Bildungsgehalt der Stochastik unter anderem aus der Tatsache ergibt, dass Grundelemente der Stochastik dem menschlichen Denken immanent sind. Unter Bezug auf Feller (1957), der die Entwicklung von adäquaten Intuitionen als wesentliche Aufgabe des Stochastikunterrichts ansieht, wird die Wichtigkeit hervorgehoben, neues Wissen im Sinne von zustimmenden Sekundärintuitionen zu verankern. Als ein wesentliches Ziel des Stochastikunterrichts, das am Ende der Sekundarstufe I erreicht sein sollte, wird von Rasfeld (2004, S. 35) angesehen, dass Schülerinnen und Schüler gelernt haben, *„stochastische Fragestellungen angemessen intuitiv zu beurteilen*“.

Schupp (2004, S. 10) weist bezüglich der Ziele eines allgemeinbildenden Stochastikunterrichts darauf hin, dass „subjektive Voreinstellungen in stimmige Sekundärintuitionen (heute sagt man wohl: Grundvorstellungen) überführt werden müssen, weil sie sonst jede noch so ausgedehnte schulische Instruktion überleben und im Zweifelsfalle dominieren“.

Aus den „Empfehlungen zu Zielen und zur Gestaltung des Stochastikunterrichts“ des Arbeitskreises Stochastik der GDM (2003, S. 24) geht hervor, dass Schülerinnen und Schüler am Ende der Primarstufe über die Fähigkeit verfügen sollen, Wahrscheinlichkeiten einschätzen zu können, und – bezogen auf das in der Sekundarstufe I anzustrebende Abschlussniveau – im Realschul- und gymnasialen Bildungsgang „ihre Intuitionen über zufällige Erscheinungen und Wahrscheinlichkeiten überprüfen und gegebenenfalls korrigieren“ können sollen.

In den „Principles & Standards for School Mathematics“ des „National Council of Teachers of Mathematics“ wird unter dem Standard „grundlegende Konzepte von Wahrscheinlichkeit verstehen und anwenden“ als „Erwartung“ aufgeführt, dass die Schülerinnen und Schüler im Bereich der Sekundarstufe I („grades 6-8“) über ein grundlegendes Verständnis von Wahrscheinlichkeit verfügen sollen, um begründete Vermutungen anstellen zu können (NCTM, 2004).

Für Bentz und Borovcnik (1991, S. 1) muss der Stochastikunterricht „die Intuitionen, die beim Individuum vorhanden sind, aufgreifen, gestalten und verändern“, und von Biehler und Hartung (2006, S. 69) wird darauf hingewiesen, dass sich ein grundbildungsorientierter Unterricht „mit dem intuitiven Wissen und den intuitiven Strategien der [Schülerinnen und] Schüler auseinandersetzen und den [Schülerinnen und] Schülern Gelegenheit zur kognitiven Konstruktion adäquater Grundvorstellungen und Intuitionen bieten“ muss. Das Ziel des Unterrichts sollte die Erzeugung von anwendungsbereitem Wissen sein und nicht von Wissen, das neben dem in alltäglichen Situationen angewendeten Wissen unbenutzt koexistiert.

6.2.3 Eine Kennzeichnung von drei Schritten der Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens

Ausgehend von der Theorie des Conceptual Change und den im vorangegangenen Kapitel zusammengefassten Erkenntnissen zur Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens bei Schülerinnen und Schülern im Bereich der Sekundarstufe I wird vom Autor unter Berücksichtigen der im Abschnitt 6.2.1 beschriebenen Anforderungen folgendes Modell mit drei Schritten der Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens angegeben:

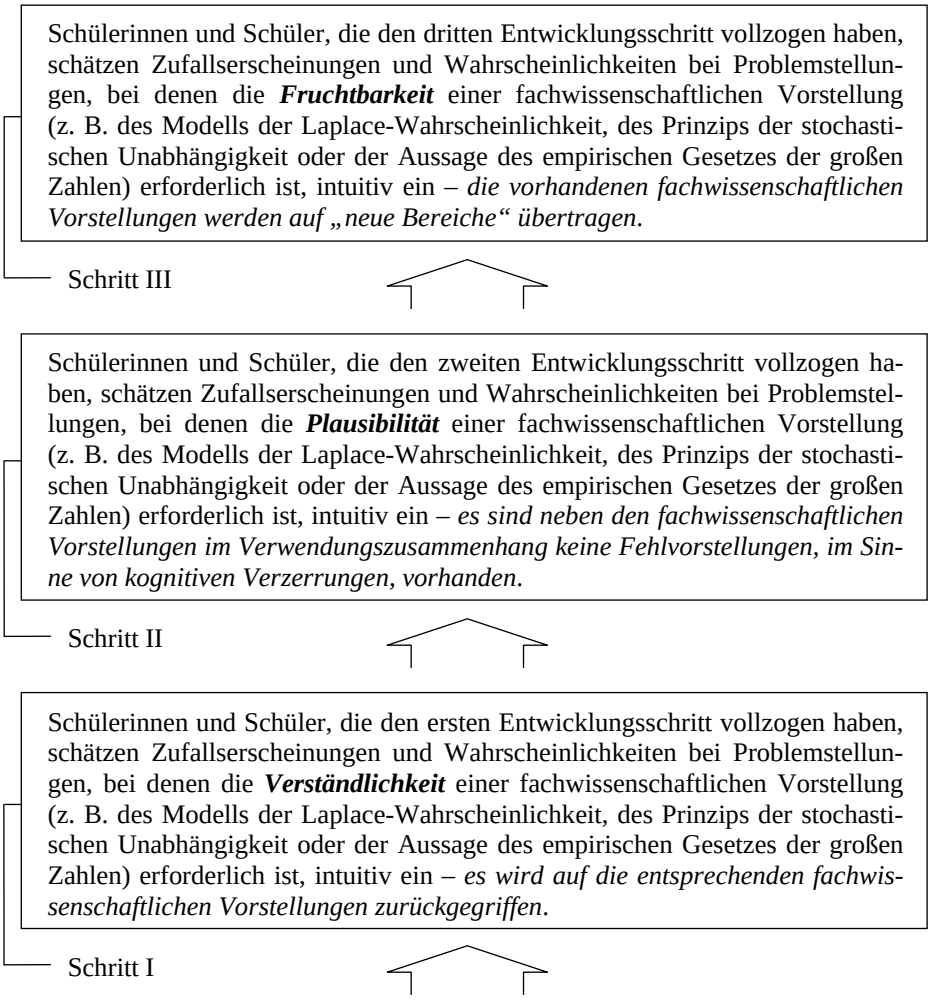


Abb. 6.1. Entwicklungsschritte des intuitiven probabilistischen Denkens nach Weixler

Die drei Schritte sind so charakterisiert, dass eine Einordnung von Aufgaben nach zunehmendem Anspruch und zunehmender Komplexität möglich ist:

- Aufgaben, die überprüfen, ob der erste Entwicklungsschritt (Schritt I) vollzogen wurde, dienen dazu zu zeigen, ob auf fachwissenschaftliche Vorstellungen, „gelehrte Vorstellungen", zurückgegriffen werden kann, das heißt ob im Sinne der Theorie des Conceptual Change die *Verständlichkeit* dieser Vorstellungen gegeben ist.
- Bei Aufgaben, die überprüfen, ob der zweite Entwicklungsschritt (Schritt II) vollzogen wurde, ist im Sinne der Theorie des Conceptual Change neben der Verständ-

lichkeit der fachwissenschaftlichen Vorstellungen auch die *Plausibilität* dieser Vorstellungen unter Beweis zu stellen. Diese Aufgaben dienen zur Feststellung, ob neben den fachwissenschaftlichen Vorstellungen im Verwendungszusammenhang (weiterhin) Fehlvorstellungen, im Sinne von kognitiven Verzerrungen, vorhanden sind.

- Aufgaben, die überprüfen, ob der dritte Entwicklungsschritt (Schritt III) vollzogen wurde, dienen dazu zu zeigen, ob im Sinne der Theorie des Conceptual Change neben der Verständlichkeit und der Plausibilität der fachwissenschaftlichen Vorstellungen auch die *Fruchtbarkeit* dieser Vorstellungen (im Sinne der Übertragbarkeit) gegeben ist.

Schülerinnen und Schüler, die beim intuitiven Einschätzen von Zufallserscheinungen und Wahrscheinlichkeiten nicht auf fachwissenschaftliche Vorstellungen zurückgreifen, weil im Sinne der Theorie des Conceptual Change die Verständlichkeit dieser Vorstellungen nicht gegeben ist, sind einem „Null-Schritt“ zuzuordnen, sodass als Mindeststandard angesehen werden kann, dass der erste Entwicklungsschritt des intuitiven probabilistischen Denkens vollzogen wurde.

Die drei Schritte der Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens bauen aufeinander auf, denn – wie im Abschnitt 1.1.3 beschrieben – ohne Verständlichkeit ist keine Plausibilität möglich und ohne Verständlichkeit und Plausibilität keine Fruchtbarkeit.

Im Folgenden werden exemplarische Aufgaben vorgestellt, die zur Überprüfung dienen können, ob ein bestimmter Entwicklungsschritt vollzogen wurde. Die Aufgaben beziehen sich hierbei inhaltlich auf die drei Konzepte, die anhand der Ergebnisse der vorgestellten Studien als zentral für die Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens der Schülerinnen und Schüler im Bereich der Sekundarstufe I angesehen werden können: das Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit, das Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit und die Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen.

6.2.4 Aufgaben zur Überprüfung

Da das *intuitive* probabilistische Denken im Zentrum der Untersuchung steht, ist für die nachfolgend vorgestellten Aufgaben charakteristisch, dass jeweils qualitative Einschätzungen der Zufallserscheinungen und Wahrscheinlichkeiten gegeben werden sollen. Hierzu eignen sich, was das Format der Aufgaben anbelangt, neben Multiple-Choice-Aufgaben auch Aufgaben, bei denen eine Skala zur (mehr oder weniger) qualitativen Angabe der eingeschätzten Wahrscheinlichkeit vorgegeben ist. Beispielhaft ist in der nachfolgenden Abbildung die Skala dargestellt, die in der Studie von Amir et al. (1999) verwendet wurde, wobei die Beschriftung der Skala ins Deutsche übertragen ist.

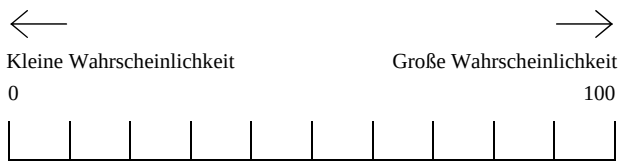


Abb. 6.2. Wahrscheinlichkeitsskala (vgl. Amir et al., 1999, S. 26)

Aus der Veröffentlichung von Amir et al. geht hervor, dass auf die Angabe des Prozentzeichens bei der Skalenbeschriftung bewusst verzichtet wurde. Dies erscheint in Bezug auf den im Abschnitt 3.4.1 beschriebenen Einfluss des Darstellungsformates als sinnvoll. Was den Einsatz von Aufgaben dieses Formates betrifft, so merken Amir et al. (1999, S. 27) an, dass die Schülerinnen und Schüler die Skalen ohne Schwierigkeiten verwendeten und ihre Bedeutung verstanden.

Bei der Bezeichnung der nachfolgend aufgeführten Aufgaben wird nach folgendem System vorgegangen, das als Vorlage für ein Kategorienschema gedacht ist:

Die vorangestellte Ziffer kennzeichnet das Konzept; so bezeichnet

- „1“ das Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit,
- „2“ das Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit und
- „3“ die Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen.

Das unmittelbar an diese Kennzeichnung anschließende römische Zahlzeichen gibt an, welchem Entwicklungsschritt des intuitiven probabilistischen Denkens die richtige Lösung der Aufgabe zugeordnet ist.

Durch einen Bindestrich getrennt folgt die Angabe der Problemrahmung, wobei die Abkürzung

- „PSF“ für „Problem Solving Framing“ und die Abkürzung
- „SJF“ für „Social Judgement Framing“ steht.

Zuletzt ist, wiederum durch einen Bindestrich getrennt, das Aufgabenformat angegeben; hierbei bezeichnet die Abkürzung

- „MC“ eine Multiple-Choice-Aufgabe und die Abkürzung
- „S“ eine Aufgabe, bei der eine Skala zur (mehr oder weniger) qualitativen Angabe der eingeschätzten Wahrscheinlichkeit vorgegeben ist.

Beispielsweise bezeichnet der Code 2III-PSF-S demnach eine Aufgabe zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit, deren richtige Lösung dem dritten Entwicklungsschritt des intuitiven probabilistischen Denkens zugeordnet ist. Die Problemrahmung entspricht dem „Problem Solving Framing“. Es handelt sich hierbei um eine Aufgabe, bei der eine Skala zur (mehr oder weniger) qualitativen Angabe der eingeschätzten Wahrscheinlichkeit vorgegeben ist.

Die Texte der exemplarischen Aufgaben sind bewusst umgangssprachlich und so präzise und kurz wie möglich formuliert, um den Einfluss der allgemeinen mathematischen Kompetenz „Kommunizieren“ auf die Lösung der Aufgaben gering zu halten. Durch die Formulierung „du“ und die Illustration der beschriebenen Situationen anhand von Abbildungen sollen das Herstellen eines persönlichen Bezuges und die Aktivierung des *intuitiven* Denkens erleichtert werden.

Zur (leichteren) Unterscheidung ist jede der exemplarischen Aufgaben mit einem inhaltsbezogenen Titel gekennzeichnet.

Exemplarisch für das Konzept Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit werden folgende Aufgaben vorgestellt, bei denen die Wahrscheinlichkeit jeweils als a-priori-Wahrscheinlichkeit zu interpretieren ist:

- 1I-PSF-S: „Spielkarten-Wurf“,
- 1II-PSF-MC: „Fast drin!“ und
- 1III-PSF-MC: „Hosentaschen-Ziehung“.

Markiere die korrekte Wahrscheinlichkeit auf der Skala mit einem Pfeil ↓.

Aufgabe 1I-PSF-S: „Spielkarten-Wurf“

Du wirfst eine Spielkarte in die Höhe.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Spielkarte

mit der Vorderseite nach oben landet?

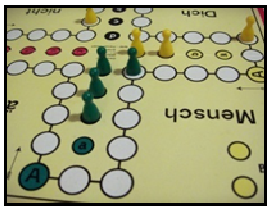
← →

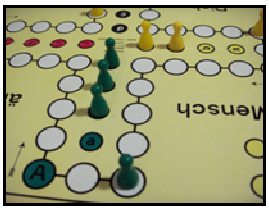
Kleine Wahrscheinlichkeit — Große Wahrscheinlichkeit

0 — 100

Bei der Aufgabe 1I-PSF-S wird erwartet, dass der Pfeil auf der Wahrscheinlichkeitsskala in der Mitte zwischen 0 und 100 eingezeichnet wird: Bei dem Wurf der Spielkarte gibt es zwei mögliche Ergebnisse – entweder die Spielkarte landet mit der Vorderseite nach oben oder sie landet mit der Rückseite nach oben. Beide Ergebnisse sind aus Symmetriegründen als gleich wahrscheinlich anzusehen. Um zur erwarteten Lösung zu gelangen, ist die *Verständlichkeit* des Konzeptes Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit erforderlich. Die richtige Lösung der vorliegenden Aufgabe kann daher dem ersten Entwicklungsschritt des intuitiven probabilistischen Denkens (Schritt I) zugeordnet werden.

Kreuze die korrekte Antwort an.





Aufgabe 1II-PSF-MC: „Fast drin!“

Du bist beim Mensch-ärgere-Dich-nicht

mit Würfeln dran.

In welchem Fall ist die Chance größer, dass du das Spiel gewinnst?

A: Wenn du eine 6 benötigst, wie im linken Bild dargestellt.

B: Wenn du eine 2 benötigst, wie im rechten Bild dargestellt.

- ☐ In A.
- ☐ In B.
- ☐ In A und B ist die Chance gleich groß.
- ☐ Weiß ich nicht.

Die erwartete Antwort bei der Aufgabe 1II-PSF-MC ist „In A und B ist die Chance gleich groß“: Bei jedem Wurf des Spielwürfels gibt es sechs mögliche Ergebnisse (Augenzahl 1 bis Augenzahl 6), die als gleich wahrscheinlich anzusehen sind. Um die erwartete Lösung zu erhalten, ist neben der Verständlichkeit des Konzeptes Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit auch die *Plausibilität* dieses Konzeptes erforderlich: Die Augenzahl 6 zu bekommen ist gleich wahrscheinlich wie die Augenzahl 2 zu bekommen; daher ist die Chance, das Spiel zu gewinnen, in beiden Fällen gleich groß, auch wenn die Anzahl der zurückzulegenden Spielfelder bis

zum „Ziel“ unterschiedlich groß ist. Die richtige Lösung der vorliegenden Aufgabe kann somit dem zweiten Entwicklungsschritt des intuitiven probabilistischen Denkens (Schritt II) zugeordnet werden.

Kreuze die korrekte Antwort an.

Aufgabe 1III-PSF-MC: „Hosentaschen-Ziehung“

In deiner Hosentasche sind zwei weiße und zwei schwarze Kugeln.

Du greifst hinein, ziehst eine Kugel heraus und legst sie ohne anzuschauen zur Seite.

Die nächste Kugel, die du herausziehst, ist weiß.

Was ist wahrscheinlicher?

A: Die zur Seite gelegte Kugel ist weiß.

B: Die zur Seite gelegte Kugel ist schwarz.

- ☐ A ist wahrscheinlicher.
- ☐ B ist wahrscheinlicher.
- ☐ A und B sind gleich wahrscheinlich.
- ☐ Weiß ich nicht.

Bei der Aufgabe 1III-PSF-MC ist die erwartete Antwort „B ist wahrscheinlicher“: Beim ersten Mal Ziehen gibt es für die gezogene Kugel vier Möglichkeiten, die als gleich wahrscheinlich anzusehen sind (es wird entweder die erste der beiden weißen oder die zweite der beiden weißen oder die erste der beiden schwarzen oder die zweite der beiden schwarzen Kugeln gezogen); da die beim ersten Mal gezogene Kugel zur Seite gelegt wurde, gibt es beim zweiten Mal Ziehen für die gezogene Kugel nur noch drei Möglichkeiten, die wiederum als gleich wahrscheinlich anzusehen sind; wenn die zur Seite gelegte Kugel weiß war, dann ist es beim zweiten Mal Ziehen wahrscheinlicher, eine schwarze Kugel zu ziehen, und wenn die zur Seite gelegte Kugel schwarz war, dann ist es beim zweiten Mal Ziehen wahrscheinlicher, eine weiße Kugel zu ziehen; im Umkehrschluss lässt sich anhand des Ergebnisses des zweiten Mal Ziehens eine Vermutung über das Ergebnis des ersten Mal Ziehens abgeben. Um zur erwarteten Lösung zu gelangen, ist neben der Verständlichkeit und der Plausibilität des Konzeptes Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit auch die *Fruchtbarkeit* dieses Konzeptes erforderlich: Es eröffnen sich „neue Bereiche“ zur Untersuchung; die Information über das Ergebnis des zweiten Mal Ziehens lässt das unbekannte Ergebnis des ersten Mal Ziehens in einem neuen Licht erscheinen und führt zu einer modifizierten Einschätzung der Wahrscheinlichkeit. Die richtige Lösung der vorliegenden Aufgabe kann demzufolge dem dritten Entwicklungsschritt des intuitiven probabilistischen Denkens (Schritt III) zugeordnet werden.

Beispielhaft für das Konzept Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit werden folgende Aufgaben vorgestellt, bei denen jeweils nicht die Vorstellung von Wahrscheinlichkeit, sondern die Vorstellung von Zufall untersucht wird:

- 2I-PSF-MC: „Zahl! Und nun?“,
- 2II-SJF-MC: „Nächste Ausspielung“ und
- 2III-PSF-MC: „6 Richtige“.

Kreuze die korrekte Antwort an.

Aufgabe 2I-PSF-MC: „Zahl! Und nun?“

Dein Freund wirft eine Münze. Er bekommt Zahl.

Nun wirfst du die Münze.

Was ist wahrscheinlicher?

A: Du bekommst Adler.

B: Du bekommst Zahl.

- ☐ A ist wahrscheinlicher.
- ☐ B ist wahrscheinlicher.
- ☐ A und B sind gleich wahrscheinlich.
- ☐ Weiß ich nicht.

Bei der Aufgabe 2I-PSF-MC wird „A und B sind gleich wahrscheinlich“ als Antwort erwartet: Bei jedem Wurf der Münze gibt es zwei mögliche Ergebnisse (entweder Adler oder Zahl), die als gleich wahrscheinlich anzusehen sind; das Ergebnis der betreffenden Würfe ist stochastisch unabhängig von den Ergebnissen der vorangegangenen Würfe. Um zur erwarteten Lösung zu gelangen, ist die *Verständlichkeit* des Konzeptes Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit erforderlich. Die richtige Lösung der vorliegenden Aufgabe kann dem ersten Entwicklungsschritt des intuitiven probabilistischen Denkens (Schritt I) zugeordnet werden.

Kreuze die korrekte Antwort an.

Aufgabe 2II-SJF-MC: „Nächste Ausspielung“

Du informierst dich, welche Lottozahlen bisher wie oft gezogen wurden.

Am öftesten war die Zahl 12 mit 358-mal dran,

am seltensten die Zahl 16 mit 249-mal.

Was ist wahrscheinlicher?

A: Bei der nächsten Ausspielung wird die Zahl 12 gezogen.

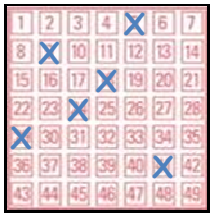
B: Bei der nächsten Ausspielung wird die Zahl 16 gezogen.

- ☐ A ist wahrscheinlicher.
- ☐ B ist wahrscheinlicher.
- ☐ A und B sind gleich wahrscheinlich.
- ☐ Weiß ich nicht.

Bei der Aufgabe 2II-SJF-MC ist die erwartete Antwort „A und B sind gleich wahrscheinlich“: Bei jeder Ausspielung gibt es bei der Ziehung der ersten Gewinnzahl 49 mögliche Ergebnisse (Zahl 1 bis Zahl 49), die als gleich wahrscheinlich anzusehen sind; da eine bereits gezogene Zahl kein zweites Mal gezogen werden kann, gibt es bei der Ziehung der zweiten Gewinnzahl noch 48 mögliche Ergebnisse, die als gleich wahrscheinlich anzusehen sind; das

Ergebnis dieser Ziehung ist stochastisch unabhängig vom Ergebnis der vorangegangenen Ziehung; bei der Ziehung der sechsten Gewinnzahl gibt es dementsprechend noch 44 mögliche Ergebnisse, die als gleich wahrscheinlich anzusehen sind; das Ergebnis dieser Ziehung ist wiederum stochastisch unabhängig von den Ergebnissen der vorangegangenen Ziehungen. Um die erwartete Lösung zu erhalten, ist neben der Verständlichkeit des Konzeptes Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit auch die *Plausibilität* dieses Konzeptes erforderlich: Die Wahrscheinlichkeit gezogen zu werden, ist für alle Zahlen von 1 bis 49 bei jeder Ausspielung gleich groß, unabhängig davon, wie oft die einzelnen Zahlen bereits bei den vorangegangenen Ausspielungen gezogen wurden. Die richtige Lösung der vorliegenden Aufgabe kann dem zweiten Entwicklungsschritt des intuitiven probabilistischen Denkens (Schritt II) zugeordnet werden – aufgrund des im Abschnitt 5.1.4 beschriebenen Einflusses des Zielsystems ist es erforderlich, dass die Problemrahmung dem „Social Judgement Framing“ (Stichworte: Beschaffenheit der Lottokugeln, Funktionsweise des Ziehungsgerätes) entspricht.

Kreuze die korrekte Antwort an.



Aufgabe 2III-PSF-MC: „6 Richtige“

Du siehst die Lottotipps von Anna und Berta.

Eine der beiden hat 6 Richtige.

Was ist wahrscheinlicher?

A: Anna hat die 6 Richtigen mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, wie im linken Bild dargestellt.

B: Berta hat die 6 Richtigen mit den Zahlen 5, 9, 18, 24, 29, 41, wie im rechten Bild dargestellt.

- ☐ A ist wahrscheinlicher.
- ☐ B ist wahrscheinlicher.
- ☐ A und B sind gleich wahrscheinlich.
- ☐ Weiß ich nicht.

Die erwartete Antwort bei der Aufgabe 2III-PSF-MC ist „A und B sind gleich wahrscheinlich“: Bei der Ziehung der ersten Gewinnzahl gibt es 49 mögliche Ergebnisse (Zahl 1 bis Zahl 49), die als gleich wahrscheinlich anzusehen sind; da eine bereits gezogene Zahl kein zweites Mal gezogen werden kann, gibt es bei der Ziehung der zweiten Gewinnzahl noch 48 mögliche Ergebnisse, die als gleich wahrscheinlich anzusehen sind; das Ergebnis dieser Ziehung ist stochastisch unabhängig vom Ergebnis der vorangegangenen Ziehung; bei der Ziehung der sechsten Gewinnzahl gibt es dementsprechend noch 44 mögliche Ergebnisse, die als gleich wahrscheinlich anzusehen sind; das Ergebnis dieser Ziehung ist wiederum stochastisch unabhängig von den Ergebnissen der vorangegangenen Ziehungen; somit ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei den getippten Zahlen um die „6 Richtigen“ handelt, für beide Lottotipps gleich groß. Um zur erwarteten Lösung zu gelangen, ist neben der Verständlichkeit und der Plausibilität des Konzeptes Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit auch die *Fruchtbarkeit* dieses Konzeptes erforderlich: Es eröffnen sich „neue Bereiche“ zur Untersuchung; die Wahrscheinlichkeiten zweier möglicher Ergebnisse eines Zufallsexperiments sind unter dem Gesichtspunkt einzuschätzen, dass eines der beiden möglichen Ergebnisse erhalten wurde. Die richtige Lösung der vorliegenden Aufgabe kann dem dritten Entwicklungsschritt des intuitiven probabilistischen Denkens (Schritt III) zugeordnet werden.

Exemplarisch für das Konzept Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen werden folgende Aufgaben vorgestellt, bei denen die Wahrscheinlichkeit jeweils als frequentistische Wahrscheinlichkeit zu interpretieren ist – ausgehend von der (impliziten) Beschreibung einer Versuchsserie ist der Einfluss der Anzahl der Versuchsdurchführungen auf die (relative) Häufigkeit eines bestimmten Ergebnisses einzuschätzen:

- 3I-PSF-MC: „Keine Eins ...“,
- 3II-PSF-MC: „Adler, wie immer!“ und
- 3III-SJF-MC: „Babystation“.

Kreuze die korrekte Antwort an.

Aufgabe 3I-PSF-MC: „Keine Eins ...“

Du machst bei einem Würfelspiel mit.

Was ist wahrscheinlicher?

A: Bei deinen ersten 6 Würfen bekommst du kein einziges Mal eine 1.

B: Bei deinen ersten 60 Würfen bekommst du kein einziges Mal eine 1.

- ☐ A ist wahrscheinlicher.
- ☐ A und B sind gleich wahrscheinlich.
- ☐ B ist wahrscheinlicher.
- ☐ Weiß ich nicht.

Bei der Aufgabe 3I-PSF-MC ist die erwartete Antwort „A ist wahrscheinlicher“: Da es bei jedem Wurf des Spielwürfels sechs mögliche Ergebnisse (Augenzahl 1 bis Augenzahl 6) gibt, die als gleich wahrscheinlich anzusehen sind, ist es wahrscheinlicher, ein bestimmtes mögliches Ergebnis bei einer kleinen Anzahl an Würfen nie zu erhalten als bei einer großen Anzahl an Würfen. Um zur erwarteten Lösung zu gelangen, ist die *Verständlichkeit* des Konzeptes Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen erforderlich. Die richtige Lösung der vorliegenden Aufgabe kann dem ersten Entwicklungsschritt des intuitiven probabilistischen Denkens (Schritt I) zugeordnet werden.

Kreuze die korrekte Antwort an.

Aufgabe 3II-PSF-MC: „Adler, wie immer!“

Du setzt beim Werfen einer Münze immer auf Adler.

Was ist wahrscheinlicher?

A: Du gewinnst 2-mal, wenn die Münze 2-mal geworfen wird.

B: Du gewinnst 100-mal, wenn die Münze 100-mal geworfen wird.

- ☐ A ist wahrscheinlicher.
- ☐ A und B sind gleich wahrscheinlich.
- ☐ B ist wahrscheinlicher.
- ☐ Weiß ich nicht.

Die erwartete Antwort bei der Aufgabe 3II-PSF-MC ist „A ist wahrscheinlicher“: Bei jedem Wurf der Münze gibt es zwei mögliche Ergebnisse (entweder Adler oder Zahl), die als gleich wahrscheinlich anzusehen sind; die relativen Häufigkeiten der beiden Ergebnisse Adler und Zahl stabilisieren sich mit wachsender Anzahl der Würfe; daher ist es wahrscheinlicher, bei einer kleinen Anzahl an Würfen stets das gleiche Ergebnis zu bekommen als bei einer großen Anzahl an Würfen. Um die erwartete Lösung zu erhalten, ist neben der Verständlichkeit des Konzeptes Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen auch die *Plausibilität* dieses Konzeptes erforderlich: Es gilt keine Proportionalitätsregel. Die richtige Lösung der vorliegenden Aufgabe kann dem zweiten Entwicklungsschritt des intuitiven probabilistischen Denkens (Schritt II) zugeordnet werden.

Kreuze die korrekte Antwort an.

Aufgabe 3III-SJF-MC: „Babystation“

Du bist in der Babystation eines Krankenhauses.

Dort wird jeden Tag ein Kind geboren.

Was ist wahrscheinlicher?

A: Unter den Kindern, die in der nächsten Woche geboren werden, sind mehr als 5 Jungen.

B: Unter den Kindern, die in den nächsten vier Wochen geboren werden, sind mehr als 20 Jungen.

- ☐ A ist wahrscheinlicher.
- ☐ A und B sind gleich wahrscheinlich.
- ☐ B ist wahrscheinlicher.
- ☐ Weiß ich nicht.

Bei der Aufgabe 3III-SJF-MC ist die erwartete Antwort „A ist wahrscheinlicher“: Bei jeder Geburt gibt es zwei mögliche „Ergebnisse“ (entweder Junge oder Mädchen), die als gleich wahrscheinlich angesehen werden können; die relativen Häufigkeiten der beiden „Ergebnisse“ Junge und Mädchen stabilisieren sich mit wachsender Anzahl der Geburten; somit ist eine Abweichung um einen bestimmten Wert oder mehr von der zu erwartenden relativen Häufigkeit bei einer kleinen Anzahl von Geburten wahrscheinlicher als bei einer großen Anzahl von Geburten. Um zur erwarteten Lösung zu gelangen, ist neben der Verständlichkeit und der Plausibilität des Konzeptes Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen auch die *Fruchtbarkeit* dieses Konzeptes erforderlich: Es eröffnen sich „neue Bereiche“ zur Untersuchung; jede Geburt kann als Zufallsexperiment angesehen werden. Die richtige Lösung der vorliegenden Aufgabe kann dem dritten Entwicklungsschritt des intuitiven probabilistischen Denkens (Schritt III) zugeordnet werden.

Bezüglich der vorgestellten „Aufgaben zur Überprüfung“ wird abschließend darauf hingewiesen, dass die in den Aufgabentexten gegebenen und vom Autor als relevant für das Verständnis der betreffenden Situationen erachteten probabilistischen Informationen aufgrund des im Abschnitt 3.4.1 beschriebenen Einflusses des Darstellungsformates in Form von „natürlichen Häufigkeiten“ vorliegen.

6.3 Pilotstudie zur Überprüfung des Modells der Entwicklungsschritte des intuitiven probabilistischen Denkens

6.3.1 Vorbemerkung

Für das beschriebene, theoretisch konzipierte Modell der Entwicklungsschritte des intuitiven probabilistischen Denkens ist von Bedeutung, inwieweit es sich empirisch bestätigen lässt. Einen ersten Anhaltspunkt dafür, dass sich dieses Modell empirisch bestätigen lässt und einen sinnvollen Ansatz zur leistungsbezogenen Messung der schrittweisen Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens darstellen kann, liefern die Ergebnisse der im Folgenden vorgestellten Untersuchung.

6.3.2 Allgemeines

Die im Abschnitt 6.2.4 vorgestellten Aufgaben zur Überprüfung der Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens wurden 32 Schülerinnen und Schülern (N = 32) der Jahrgangsstufe 10 einer Realschule im Großraum München zur Bearbeitung vorgelegt. Die getesteten Schülerinnen und Schüler verfügten gemäß dem gültigen Lehrplan für die sechsstufige Realschule in Bayern über keine schulischen Vorkenntnisse im Bereich der Stochastik, das heißt es ist zur Stochastik keine formale unterrichtliche Unterweisung erfolgt. Aufgrund der bestehenden Lehrplanstruktur ist davon auszugehen, dass auch in der Grundschule keine formale Unterweisung zu stochastischen Themenkreisen erfolgte. In Bezug auf den Stoffverteilungsplan der betreffenden Schule können die getesteten Schülerinnen und Schüler zum Zeitpunkt der Testdurchführung (Mitte März 2009) als „am Ende der Sekundarstufe I befindlich“ angesehen werden.

6.3.3 Durchführung

Durchgeführt wurde der Test von einer Lehrkraft der betreffenden Schule mit der Fächerverbindung Französisch/Englisch. In einer zweigeteilten Klasse mit mathematisch-naturwissenschaftlichem beziehungsweise sprachlichem Schwerpunkt wurden die zu bearbeitenden Aufgaben während des regulären Vormittagsunterrichts zu Beginn einer Unterrichtsstunde im Fach Mathematik beziehungsweise Französisch ausgeteilt. Die zur Verfügung stehende Bearbeitungszeit betrug 10 Minuten – dadurch sollte gewährleistet werden, dass (hauptsächlich) das intuitive Denken geprüft wird. Den Schülerinnen und Schülern wurde jeweils mitgeteilt, dass sie für eine „Untersuchung der Universität München“ ausgewählt worden waren und „verschiedene Alltagssituationen einschätzen“ sollten. Ein expliziter Bezug zum Fach Mathematik wurde bewusst vermieden.

Bezüglich der zu bearbeitenden Aufgaben ist anzumerken, dass diese auf der Vorder- und Rückseite eines DIN-A4-Blattes in Farbe abgedruckt waren, wie in Abbildung 6.3 dargestellt. Die Staffelung der Aufgaben nach „Entwicklungsschritt“ (I, II, III) an erster Stelle und „Konzept“ (1, 2, 3) an zweiter Stelle wurde als sinnvoll erachtet. Anstelle der codierten Bezeichnungen waren die Aufgaben fortlaufend nummeriert. Sie erschienen in dieser Reihenfolge:

(1) 1I-PSF-S,	(2) 2I-PSF-MC,	(3) 3I-PSF-MC,
(4) 1II-PSF-MC,	(5) 2II-SJF-MC,	(6) 3II-PSF-MC,
(7) 1III-PSF-MC,	(8) 2III-PSF-MC,	(9) 3III-SJF-MC.

Als Hinweis für die Bearbeitung war abgedruckt: „Achtung! Bitte unbedingt lesen, bevor du anfängst! Bearbeite die Aufgaben in der vorgegebenen Reihenfolge. Lies dir bei jeder Aufgabe den Text genau durch, überlege kurz und antworte dann. Wichtig ist, dass du die Aufgaben für dich bearbeitest. Du hast 10 Minuten Zeit.“

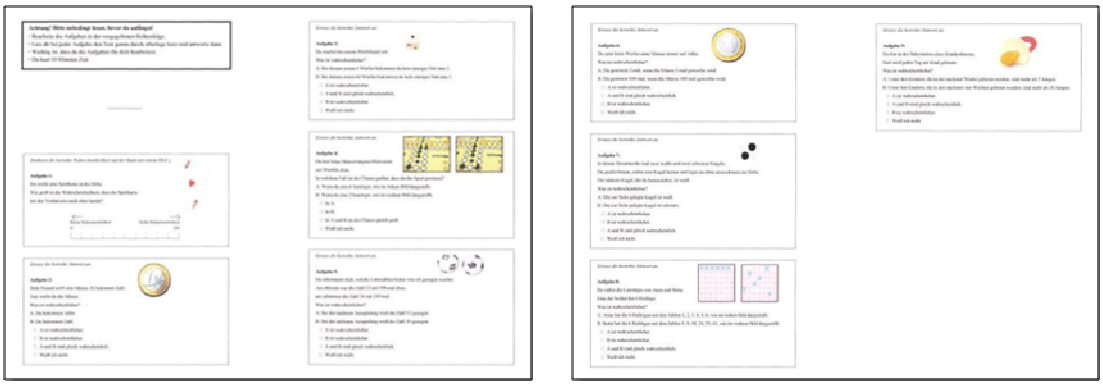


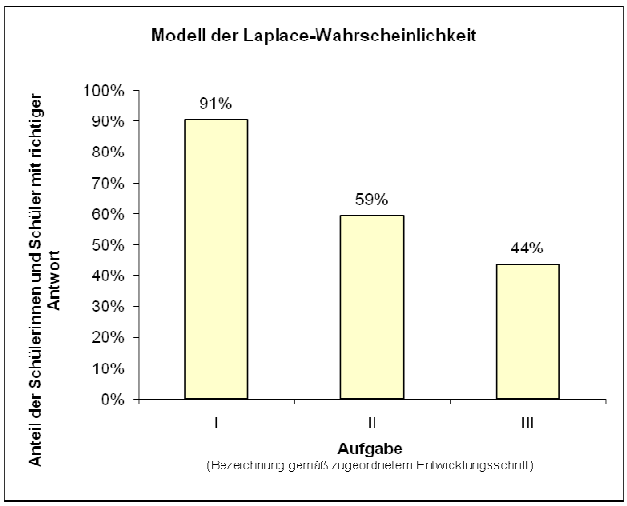
Abb. 6.3. Vorder- und Rückseite des Aufgabenblattes

6.3.4 Auswertung

Von den getesteten Schülerinnen und Schülern wurden jeweils alle neun Aufgaben in der zur Verfügung stehenden Zeit bearbeitet – die Aufgabenblätter wurden anonym abgegeben.

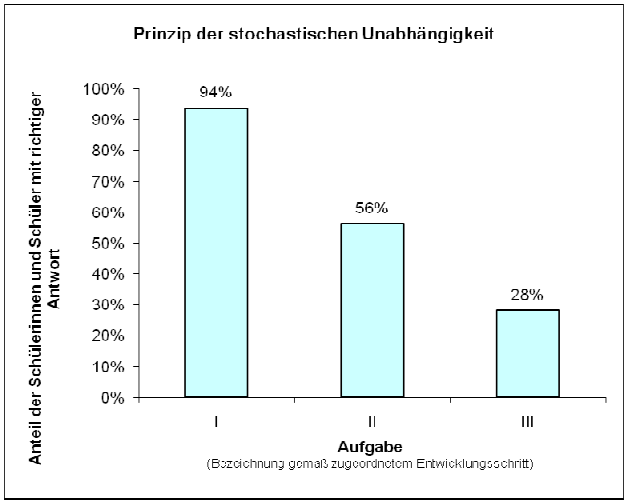
Auswertung 1a. Um festzustellen, ob die eingesetzten „Aufgaben zur Überprüfung“ für eine erste (eingeschränkte) empirische Überprüfung des Modells der Entwicklungsschritte des intuitiven probabilistischen Denkens als geeignet angesehen werden können, wurden die Antworten der Schülerinnen und Schüler in einem ersten Schritt geordnet nach den untersuchten Konzepten ausgewertet.

In Bezug auf das Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit wurde festgestellt, dass der Anteil der Schülerinnen und Schüler mit richtiger Antwort bei der dem ersten Entwicklungsschritt zugeordneten Aufgabe 91% beträgt, bei der dem zweiten Entwicklungsschritt zugeordneten Aufgabe 59% und bei der dem dritten Entwicklungsschritt zugeordneten Aufgabe 44%. Dies ist in der nachfolgenden Abbildung grafisch dargestellt.



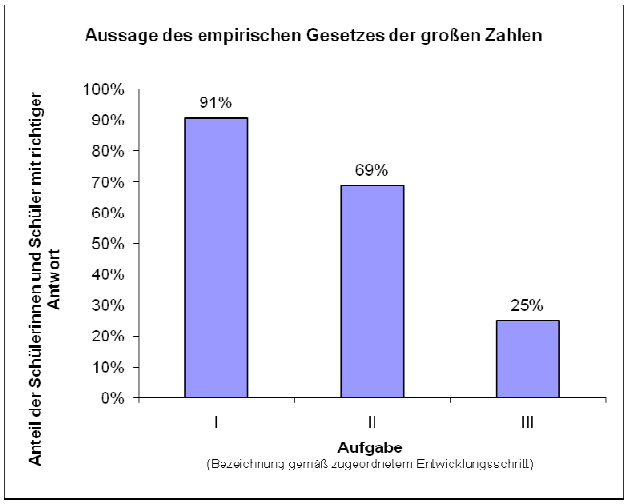
Der Anteil der Schülerinnen und Schüler mit richtiger Antwort nimmt also für die höheren zugeordneten Entwicklungsschritte ab. Die Größenunterschiede zwischen den einzelnen Anteilen können als ausreichend groß für eine gewisse „Trennschärfe“ zwischen den jeweiligen Entwicklungsschritten angesehen werden.

Was das Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit betrifft, so beträgt der Anteil der Schülerinnen und Schüler mit richtiger Antwort bei der dem ersten Entwicklungsschritt zugeordneten Aufgabe 94%, bei der dem zweiten Entwicklungsschritt zugeordneten Aufgabe 56% und bei der dem dritten Entwicklungsschritt zugeordneten Aufgabe 28%. In der nachfolgenden Abbildung ist dies ebenfalls grafisch dargestellt.



Es lässt sich festhalten, dass der Anteil der Schülerinnen und Schüler mit richtiger Antwort wiederum für die höheren zugeordneten Entwicklungsschritte abnimmt. Die Größenunterschiede zwischen den einzelnen Anteilen können auch hier als ausreichend groß für eine gewisse „Trennschärfe“ zwischen den jeweiligen Entwicklungsschritten angesehen werden.

Bezogen auf die Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen wurde festgestellt, dass der Anteil der Schülerinnen und Schüler mit richtiger Antwort bei der dem ersten Entwicklungsschritt zugeordneten Aufgabe 91% beträgt, bei der dem zweiten Entwicklungsschritt zugeordneten Aufgabe 69% und bei der dem dritten Entwicklungsschritt zugeordneten Aufgabe 25%. Dies ist in der nachfolgenden Abbildung wiederum grafisch dargestellt.



Auch bei diesem Konzept nimmt der Anteil der Schülerinnen und Schüler mit richtiger Antwort für die höheren zugeordneten Entwicklungsschritte ab. Die Größenunterschiede zwischen den einzelnen Anteilen können ebenfalls als ausreichend groß für eine gewisse „Trennschärfe“ zwischen den jeweiligen Entwicklungsschritten angesehen werden.

Auswertungsergebnis 1a. Für die untersuchten drei Konzepte gilt also jeweils,

- dass der Anteil der Schülerinnen und Schüler mit richtiger Antwort für die höheren zugeordneten Entwicklungsschritte abnimmt und
- dass zwischen den einzelnen Entwicklungsschritten eine gewisse „Trennschärfe“ gegeben ist.

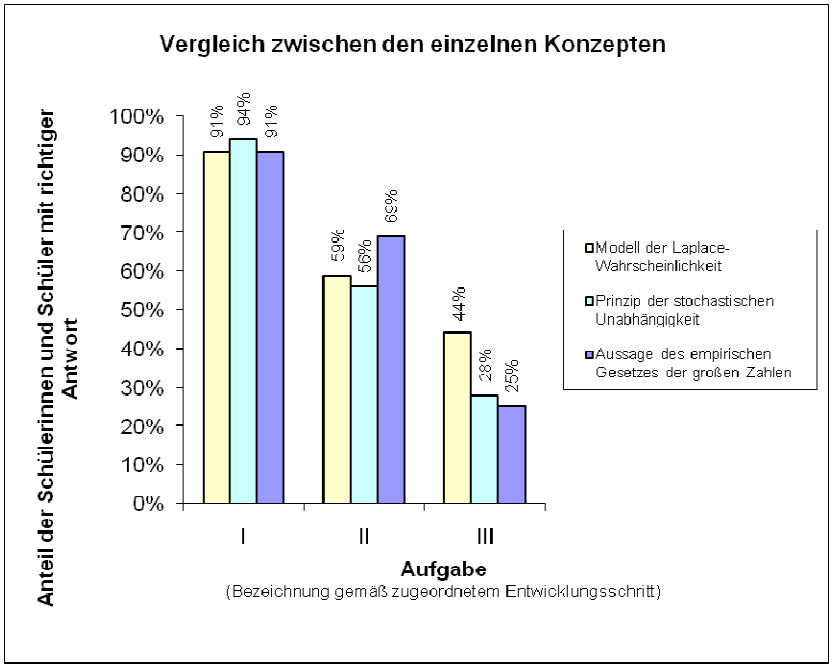
Auswertung 1b. In einem zweiten Schritt wurden die einzelnen Konzepte hinsichtlich der Anteile der Schülerinnen und Schüler mit richtiger Antwort verglichen, geordnet nach den zugeordneten Entwicklungsschritten.

Für die dem ersten Entwicklungsschritt zugeordneten Aufgaben wurde festgestellt, dass der Anteil der Schülerinnen und Schüler mit richtiger Antwort bezüglich des Modells der Laplace-Wahrscheinlichkeit 91% beträgt, in Bezug auf das Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit 94% und bezüglich der Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen 91%.

Was die dem zweiten Entwicklungsschritt zugeordneten Aufgaben betrifft, so beträgt der Anteil der Schülerinnen und Schüler mit richtiger Antwort bezüglich des Modells der Laplace-Wahrscheinlichkeit 59%, in Bezug auf das Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit 56% und bezüglich der Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen 69%.

Für die dem dritten Entwicklungsschritt zugeordneten Aufgaben wurde festgestellt, dass der Anteil der Schülerinnen und Schüler mit richtiger Antwort bezüglich des Modells der Laplace-Wahrscheinlichkeit 44% beträgt, in Bezug auf das Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit 28% und bezüglich der Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen 25%.

Dies ist in der nachfolgenden Abbildung grafisch dargestellt.



Auswertungsergebnis 1b. Für jeden der drei zugeordneten Entwicklungsschritte gilt also, dass der Anteil der Schülerinnen und Schüler mit richtiger Antwort bei den untersuchten drei Konzepten annähernd gleich groß ist. Zudem ist unabhängig vom Konzept eine gewisse „Trennschärfe“ zwischen den einzelnen Entwicklungsschritten gegeben.

Auswertungsergebnis 1. Zusammenfassend lässt sich somit festhalten, dass die verwendeten „Aufgaben zur Überprüfung“ für eine erste (eingeschränkte) empirische Überprüfung des Modells der Entwicklungsschritte des intuitiven probabilistischen Denkens als geeignet angesehen werden können.

Auswertung 2. Um festzustellen, ob sich das beschriebene Modell der Entwicklungsschritte des intuitiven probabilistischen Denkens anhand dieser ersten (eingeschränkten) empirischen Überprüfung bestätigen lässt, wurden die Antworten der Schülerinnen und Schüler einzeln ausgewertet. In der nachfolgend abgebildeten Tabelle sind für jede Schülerin bzw. jeden Schüler die anhand der Antworten bei den einzelnen Aufgaben zugeordneten Entwicklungsschritte für die untersuchten Konzepte („1“: Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit; „2“: Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit; „3“: Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen) dargestellt:

- Ein schwarz ausgefüllter Kreis bedeutet, dass bei der betreffenden Schülerin bzw. dem betreffenden Schüler davon ausgegangen wird, dass der zugehörige Entwicklungsschritt beim jeweiligen Konzept vollzogen wurde, da bei der betreffenden Aufgabe zur Überprüfung eine korrekte Antwort gegeben wurde;
- eine weiße Hinterlegung der Ziffer eines Konzeptes bei einer Schülerin bzw. einem Schüler (zum Beispiel „1“ bei „Schüler 1“) zeigt an, dass die Annahme einer schrittweisen Entwicklung bei der betreffenden Schülerin bzw. dem betreffenden Schüler beim jeweiligen Konzept als zutreffend („○○○“ oder „●○○“ oder „●●○“ oder „●●●“) angesehen wird;
- eine weiße Hinterlegung des codierten Namens (beispielsweise „Schüler 1“) zeigt an, dass die Annahme einer schrittweisen Entwicklung bei der betreffenden Schülerin bzw. dem betreffenden Schüler bei allen drei untersuchten Konzepten als zutreffend angesehen wird.

Codierter Name	Konzept	Entwicklungsschritt I	Entwicklungsschritt II	Entwicklungsschritt III
Schüler 1	1	●	○	○
	2	●	●	○
	3	●	○	○
Schüler 3	1	●	●	●
	2	●	●	○
	3	●	●	○
Schüler 5	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○
Schüler 7	1	●	●	●
	2	●	○	●
	3	○	●	○

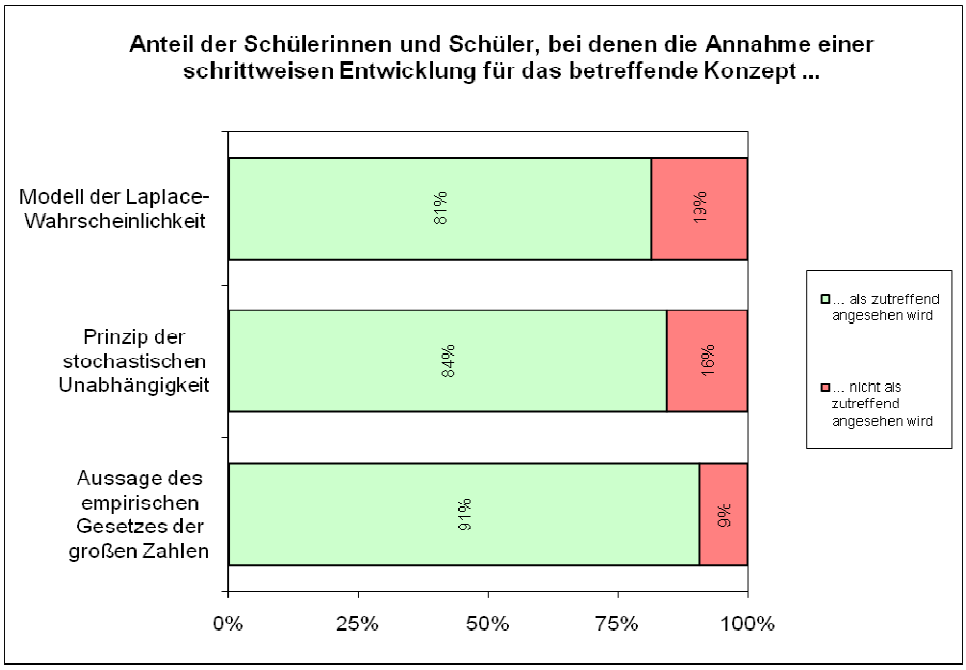
Codierter Name	Konzept	Entwicklungsschritt I	Entwicklungsschritt II	Entwicklungsschritt III
Schüler 2	1	●	●	○
	2	●	○	○
	3	●	●	○
Schüler 4	1	●	○	○
	2	●	○	○
	3	●	●	○
Schüler 6	1	●	●	○
	2	●	○	○
	3	●	●	●
Schüler 8	1	●	●	●
	2	○	○	●
	3	●	●	●

Schüler 9	1	●	●	●
	2	○	●	●
	3	●	●	●
Schüler 10	1	●	○	●
	2	●	●	○
	3	●	●	○
Schüler 11	1	○	●	○
	2	●	●	●
	3	●	○	○
Schüler 12	1	●	○	●
	2	●	●	●
	3	●	●	○
Schüler 13	1	●	●	○
	2	●	○	○
	3	●	○	○
Schüler 14	1	●	○	○
	2	●	○	●
	3	●	●	●
Schüler 15	1	●	○	●
	2	●	●	●
	3	●	○	●
Schüler 16	1	●	○	○
	2	●	●	○
	3	●	○	○
Schüler 17	1	●	○	○
	2	●	○	○
	3	○	○	○
Schüler 18	1	○	○	●
	2	●	○	○
	3	●	●	●
Schüler 19	1	●	●	○
	2	●	○	○
	3	○	○	○
Schüler 20	1	●	●	●
	2	●	●	○
	3	●	○	○
Schüler 21	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	○
Schüler 22	1	●	○	○
	2	●	○	○
	3	●	●	○
Schüler 23	1	●	●	●
	2	●	○	○
	3	●	●	○
Schüler 24	1	○	●	●
	2	●	●	○
	3	●	●	○
Schüler 25	1	●	●	○
	2	●	○	●
	3	●	●	○
Schüler 26	1	●	○	○
	2	●	●	○
	3	●	○	●
Schüler 27	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○
Schüler 28	1	●	●	●
	2	●	●	○
	3	●	●	●
Schüler 29	1	●	○	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○
Schüler 30	1	●	●	●
	2	●	●	○
	3	●	○	○
Schüler 31	1	●	○	○
	2	●	○	○
	3	●	●	●
Schüler 32	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Auswertungsergebnis 2. In Bezug auf die empirische Bestätigung des Modells der Entwicklungsschritte lässt sich für die untersuchten Konzepte Folgendes festhalten:

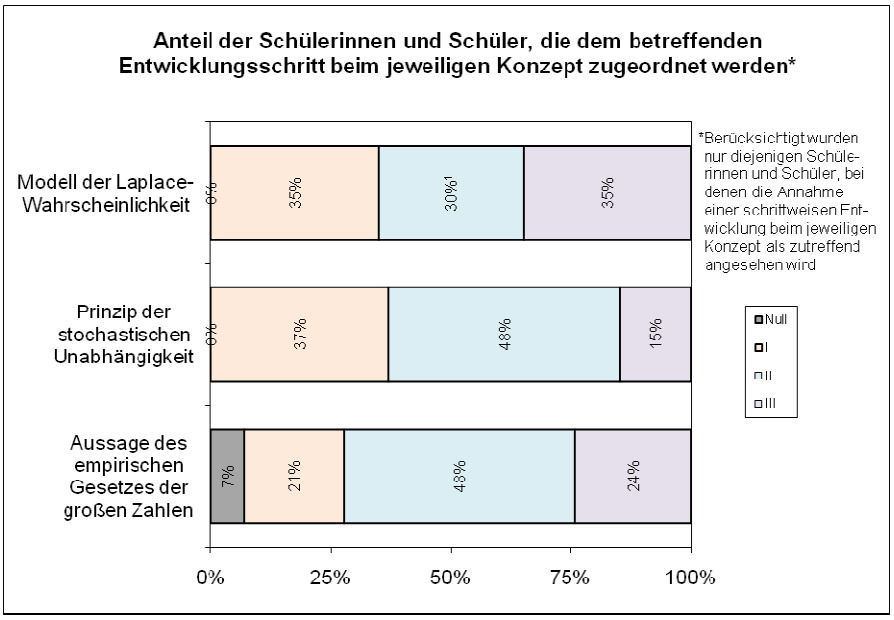
- Bei 26 der 32 getesteten Schülerinnen und Schüler (dies entspricht 81%) wird die Annahme einer schrittweisen Entwicklung für das Konzept Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit als zutreffend angesehen,
- bei 27 der 32 getesteten Schülerinnen und Schüler (dies entspricht 84%) für das Konzept Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit und
- bei 29 der 32 getesteten Schülerinnen und Schüler (dies entspricht 91%) für das Konzept Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen.

In der nachfolgenden Abbildung ist dies grafisch verdeutlicht.



Dieses Ergebnis kann als erster Beleg dafür angesehen werden, dass sich das beschriebene Modell der Entwicklungsschritte des intuitiven probabilistischen Denkens empirisch bestätigen lässt – zumindest für die untersuchten drei Konzepte und anhand der eingesetzten „Aufgaben zur Überprüfung“. Zu berücksichtigen ist jedoch die sehr geringe Anzahl der getesteten Schülerinnen und Schüler bei der vorliegenden Untersuchung.

Extras. Für diejenigen Schülerinnen und Schüler, bei denen die Annahme einer schrittweisen Entwicklung beim jeweiligen Konzept als zutreffend angesehen wird (dies sind, wie beschrieben, beim Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit 26 der 32 getesteten Schülerinnen und Schüler, beim Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit 27 der 32 getesteten Schülerinnen und Schüler und bei der Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen 29 der 32 getesteten Schülerinnen und Schüler), ist in der nachfolgenden Abbildung grafisch dargestellt, welche Anteile den einzelnen Entwicklungsschritten zugeordnet werden.



Festhalten lässt sich: In Bezug auf das Konzept Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit beträgt der Anteil der Schülerinnen und Schüler,

- die dem ersten Entwicklungsschritt zugeordnet werden, 35%,
- die dem zweiten Entwicklungsschritt zugeordnet werden, 30%[1],
- die dem dritten Entwicklungsschritt zugeordnet werden, 35% und der Anteil der Schülerinnen und Schüler,
- die einem „Null-Schritt“ zuzuordnen sind, 0%.

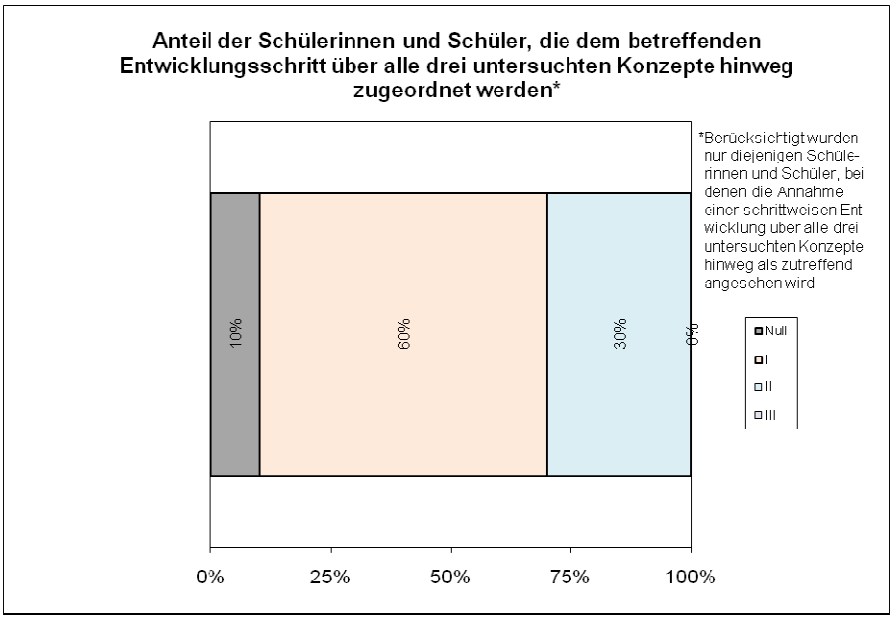
Was das Konzept Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit betrifft, so beträgt der Anteil der Schülerinnen und Schüler,

- die dem ersten Entwicklungsschritt zugeordnet werden, 37%,
- die dem zweiten Entwicklungsschritt zugeordnet werden, 48%,
- die dem dritten Entwicklungsschritt zugeordnet werden, 15% und der Anteil der Schülerinnen und Schüler,
- die einem „Null-Schritt“ zuzuordnen sind, 0%.

Bezüglich des Konzeptes Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen beträgt der Anteil der Schülerinnen und Schüler,

- die dem ersten Entwicklungsschritt zugeordnet werden, 21%,
- die dem zweiten Entwicklungsschritt zugeordnet werden, 48%,
- die dem dritten Entwicklungsschritt zugeordnet werden, 24% und der Anteil der Schülerinnen und Schüler,
- die einem „Null-Schritt“ zuzuordnen sind, 7%.

Bei 20 der 32 getesteten Schülerinnen und Schüler (dies entspricht 63%) wird die Annahme einer schrittweisen Entwicklung über alle drei untersuchten Konzepte hinweg als zutreffend angesehen. In der nachfolgenden Abbildung ist grafisch dargestellt, welche Anteile dieser Schülerinnen und Schüler den einzelnen Entwicklungsschritten über alle drei untersuchten Konzepte hinweg zugeordnet werden, wenn die Zuordnung jeder Schülerin bzw. jedes Schülers jeweils zu dem höchsten Entwicklungsschritt erfolgt, der über alle drei untersuchten Konzepte hinweg als vollzogen angesehen werden kann.



[1]Dieser Wert wird anstelle des korrekt gerundeten Wertes 31% angegeben, damit sich insgesamt 100% ergeben.

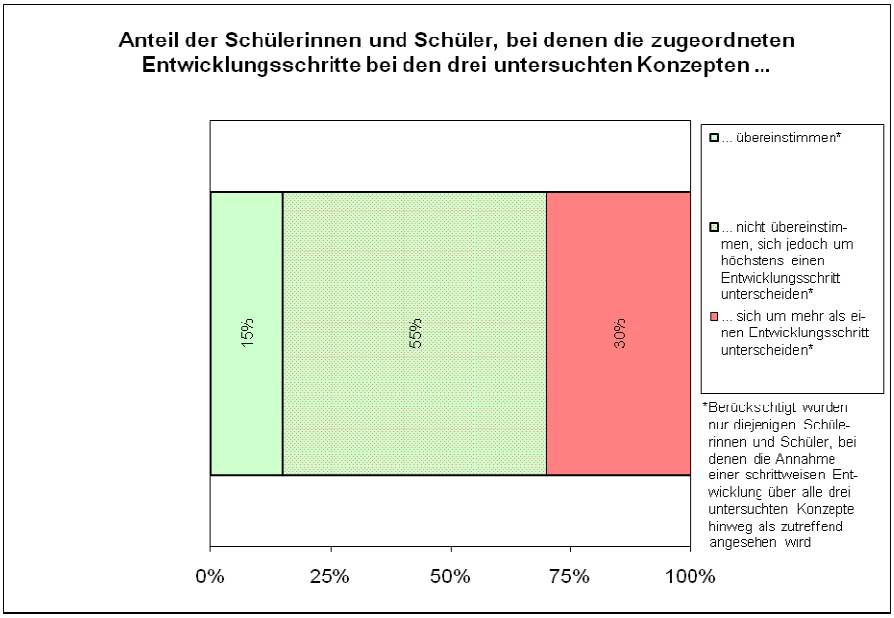
Es lässt sich festhalten, dass der Anteil der Schülerinnen und Schüler, die über alle drei untersuchten Konzepte hinweg

- dem ersten Entwicklungsschritt zugeordnet werden, 60% beträgt,
- dem zweiten Entwicklungsschritt zugeordnet werden, 30% beträgt,
- dem dritten Entwicklungsschritt zugeordnet werden, 0% beträgt und der Anteil der Schülerinnen und Schüler, die über alle drei untersuchten Konzepte hinweg
- einem „Null-Schritt“ zuzuordnen sind, 10% beträgt.

Anzumerken ist bezüglich derjenigen Schülerinnen und Schüler, bei denen die Annahme einer schrittweisen Entwicklung über alle drei untersuchten Konzepte hinweg als zutreffend angesehen wird, dass der Anteil der Schülerinnen und Schüler,

- bei denen die zugeordneten Entwicklungsschritte bei den drei untersuchten Konzepten übereinstimmen, 15% beträgt,
- bei denen die zugeordneten Entwicklungsschritte bei den drei untersuchten Konzepten nicht übereinstimmen, sich jedoch um höchstens einen Entwicklungsschritt unterscheiden, 55% beträgt und der Anteil der Schülerinnen und Schüler,
- bei denen sich die zugeordneten Entwicklungsschritte bei den drei untersuchten Konzepten um mehr als einen Entwicklungsschritt unterscheiden, 30% beträgt.

In der nachfolgenden Abbildung ist dies ebenfalls grafisch dargestellt.



6.3.5 Fazit aus der Pilotstudie

Die Ergebnisse dieser ersten pilotartigen empirischen Überprüfung deuten darauf hin, dass das Modell der Entwicklungsschritte des intuitiven probabilistischen Denkens einen sinnvollen Ansatz zur leistungsbezogenen Messung der schrittweisen Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens darstellen kann und sich auch in einer Untersuchung mit größerem Stichprobenumfang empirisch bestätigen lässt. So wird die Annahme einer schrittweisen Entwicklung bei allen drei untersuchten Konzepten jeweils bei mehr als drei Viertel der Schülerinnen und Schüler als zutreffend angesehen.

Bei ungefähr zwei Drittel der Schülerinnen und Schüler wird die Annahme einer schrittweisen Entwicklung über alle drei untersuchten Konzepte hinweg als zutreffend angesehen. Bei wiederum etwa zwei Drittel dieser Schülerinnen und Schüler stimmen die bei den drei untersuchten Konzepten zugeordneten Entwicklungsschritte überein beziehungsweise unterscheiden sich um höchstens einen Entwicklungsschritt.

Bezüglich des Modells der Entwicklungsschritte des intuitiven probabilistischen Denkens lassen sich die Ergebnisse dieser ersten pilotartigen empirischen Überprüfung wie folgt interpretieren:

- Was das Konzept Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit betrifft, so kann bei ungefähr zwei Drittel der Schülerinnen und Schüler, bei denen die Annahme einer schrittweisen Entwicklung als zutreffend angesehen wird, angenommen werden, dass mindestens der zweite Entwicklungsschritt vollzogen wurde.
- In Bezug auf das Konzept Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit kann ebenfalls bei ungefähr zwei Drittel der Schülerinnen und Schüler, bei denen die Annahme einer schrittweisen Entwicklung als zutreffend angesehen wird, angenommen werden, dass mindestens der zweite Entwicklungsschritt vollzogen wurde.
- Bezüglich des Konzeptes Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen kann sogar bei ungefähr drei Viertel der Schülerinnen und Schüler, bei denen die Annahme einer schrittweisen Entwicklung als zutreffend angesehen wird, angenommen werden, dass mindestens der zweite Entwicklungsschritt vollzogen wurde.

Über alle drei untersuchten Konzepte hinweg kann bei der überwiegenden Mehrzahl der Schülerinnen und Schüler, bei denen die Annahme einer schrittweisen Entwicklung bei allen drei untersuchten Konzepten als zutreffend angesehen wird, angenommen werden, dass mindestens der erste Entwicklungsschritt vollzogen wurde.

Dass der zweite Entwicklungsschritt vollzogen wurde, kann dagegen nur bei ungefähr einem Drittel der Schülerinnen und Schüler, bei denen die Annahme einer schrittweisen Entwicklung bei allen drei untersuchten Konzepten als zutreffend angesehen wird, angenommen werden.

Dass der dritte Entwicklungsschritt vollzogen wurde, kann bei keiner der Schülerinnen und keinem der Schüler, bei denen die Annahme einer schrittweisen Entwicklung bei allen drei untersuchten Konzepten als zutreffend angesehen wird, angenommen werden.

6.4 Empirische Studie zur Überprüfung des Modells der Entwicklungsschritte des intuitiven probabilistischen Denkens (Hauptstudie)

6.4.1 Vorbemerkung

Zur Überprüfung, ob sich das Modell der Entwicklungsschritte des intuitiven probabilistischen Denkens auch in einer Untersuchung mit größerem Stichprobenumfang empirisch bestätigen lässt, wurde eine analoge Untersuchung zu der im Abschnitt 6.3 beschriebenen durchgeführt – jedoch wurde eine größere Anzahl an Schülerinnen und Schülern getestet.

6.4.2 Allgemeines

Im Zeitraum Ende März bis Anfang April 2009 wurden die in Abbildung 6.3 dargestellten Aufgabenblätter mit den „Aufgaben zur Überprüfung“ insgesamt 521 Schülerinnen und Schülern (N = 521) der Jahrgangsstufe 10 verschiedener zufällig ausgewählter Realschulen in Bayern zur Bearbeitung vorgelegt. Wie bei der Pilotstudie, so ist auch bei der vorliegenden Hauptstudie davon auszugehen, dass aufgrund der bestehenden Lehrplanstruktur keine formale Unterweisung zu stochastischen Themenkreisen erfolgte. In Bezug auf den Zeitraum der Testdurchführung – weniger als acht Schulwochen vor dem Beginn der schriftlichen Abschlussprüfungen für den Mittleren Schulabschluss – können die getesteten Schülerinnen und Schüler als „am Ende der Sekundarstufe I befindlich“ angesehen werden.

Die Versuchspersonen der Pilotstudie wurden in die vorliegende Untersuchung nicht mit einbezogen.

6.4.3 Durchführung

Um vergleichbare Bedingungen bei den einzelnen Testdurchführungen und in Bezug auf die Pilotstudie zu gewährleisten, wurde Wert darauf gelegt, dass die betreffenden Tests jeweils von einer Lehrkraft mit der Fächerverbindung Französisch/Beifach oder Englisch/Beifach durchgeführt wurden. Die zu bearbeitenden Aufgaben waren während des regulären Vormittagsunterrichts zu Beginn einer Unterrichtsstunde im Fach Französisch oder Englisch auszuteilen beziehungsweise – falls dies aus organisatorischen Gründen nicht möglich war – zumindest in einem nicht mathematisch-naturwissenschaftlichen Fach. Zur Bearbeitung sollte (wie bei der Pilotstudie) eine Zeit von 10 Minuten zur Verfügung gestellt werden. Den Schülerinnen und Schülern sollte jeweils mitgeteilt werden, dass sie für eine „Untersuchung der Universität München“ ausgewählt worden waren und „verschiedene Alltagssituationen einschätzen“ sollten. Ein expliziter Bezug zum Fach Mathematik sollte vermieden werden.

6.4.4 Auswertung

Die bearbeiteten Aufgabenblätter wurden von den getesteten Schülerinnen und Schülern anonym abgegeben.

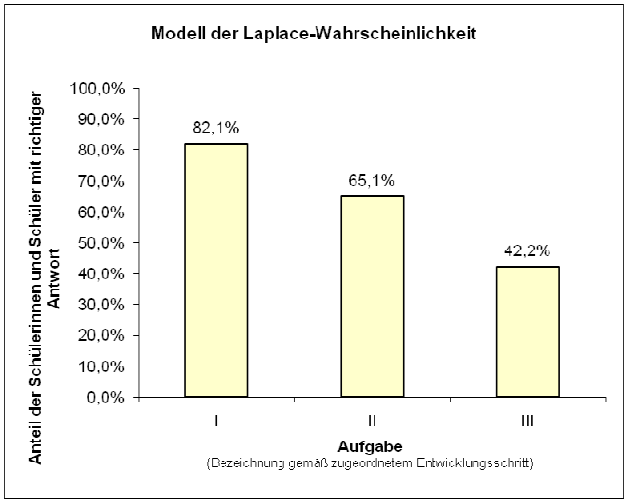
Auswertung 1a. Analog zur Pilotstudie wurden die Antworten der Schülerinnen und Schüler in einem ersten Schritt geordnet nach den untersuchten Konzepten ausgewertet, um festzustellen, ob bestätigt werden kann, dass die eingesetzten „Aufgaben zur Überprüfung“ für die empirische Überprüfung des Modells der Entwicklungsschritte des intuitiven probabilistischen Denkens als geeignet angesehen werden können.

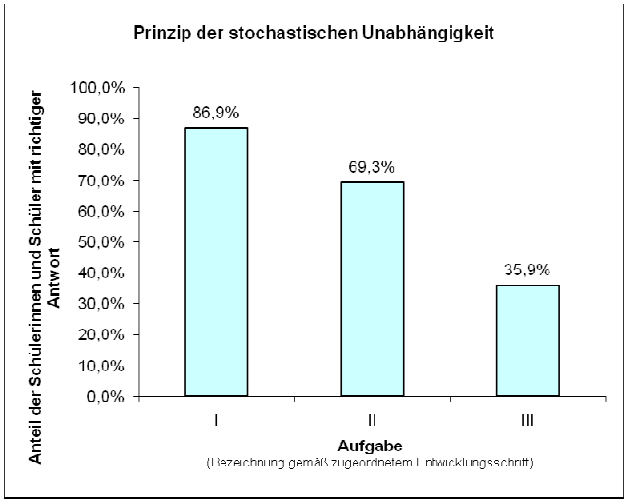
Bezüglich des Modells der Laplace-Wahrscheinlichkeit wurde festgestellt, dass der Anteil der Schülerinnen und Schüler mit richtiger Antwort bei der dem ersten Entwicklungsschritt zugeordneten Aufgabe 82,1% beträgt, bei der dem zweiten Entwicklungsschritt zugeordneten Aufgabe 65,1% und bei der dem dritten Entwicklungsschritt zugeordneten Aufgabe 42,2%.

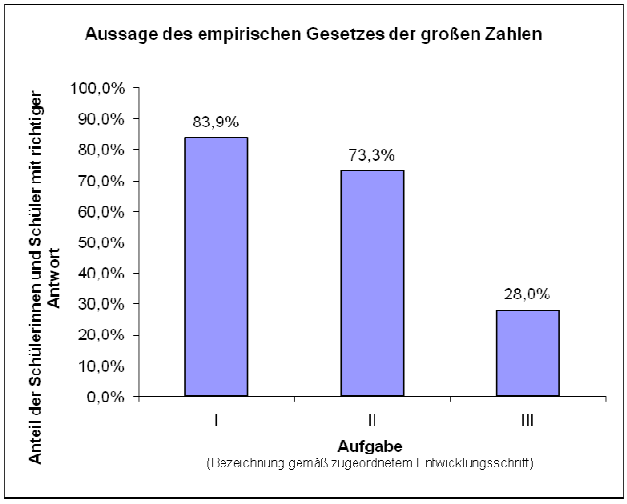
Was das Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit betrifft, so beträgt der Anteil der Schülerinnen und Schüler mit richtiger Antwort bei der dem ersten Entwicklungsschritt zugeordneten Aufgabe 86,9%, bei der dem zweiten Entwicklungsschritt zugeordneten Aufgabe 69,3% und bei der dem dritten Entwicklungsschritt zugeordneten Aufgabe 35,9%.

In Bezug auf die Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen beträgt der Anteil der Schülerinnen und Schüler mit richtiger Antwort bei der dem ersten Entwicklungsschritt zugeordneten Aufgabe 83,9%, bei der dem zweiten Entwicklungsschritt zugeordneten Aufgabe 73,3% und bei der dem dritten Entwicklungsschritt zugeordneten Aufgabe 28,0%.

In den nachfolgenden Abbildungen sind die einzelnen Ergebnisse zum besseren Überblick grafisch dargestellt.







Auswertungsergebnis 1a. Es lässt sich festhalten,

- dass der Anteil der Schülerinnen und Schüler mit richtiger Antwort bei allen drei untersuchten Konzepten für die höheren zugeordneten Entwicklungsschritte abnimmt und
- dass die Größenunterschiede zwischen den einzelnen Anteilen bei allen drei untersuchten Konzepten als ausreichend groß für eine gewisse „Trennschärfe“ zwischen den jeweiligen Entwicklungsschritten angesehen werden können.

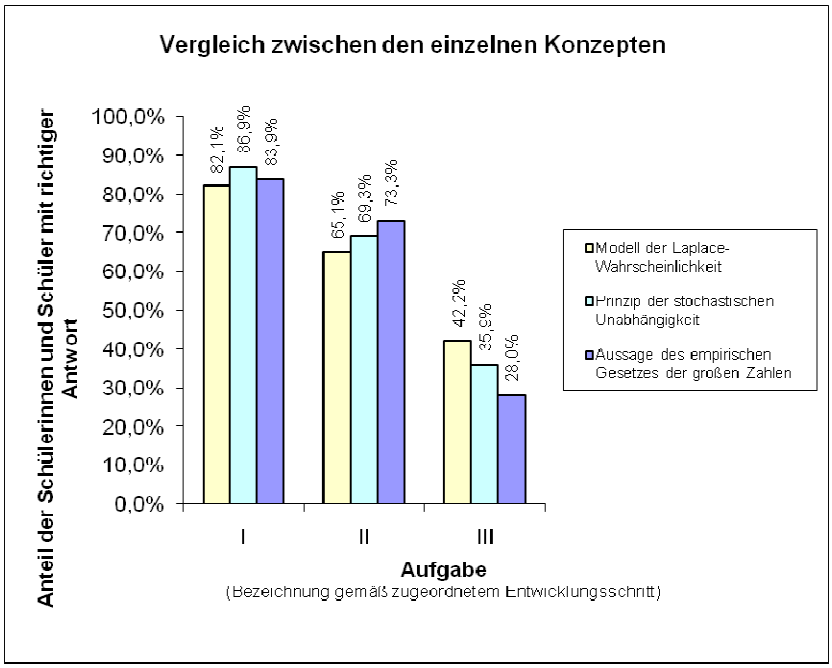
Auswertung 1b. In einem zweiten Schritt wurden die einzelnen Konzepte – analog zur Pilotstudie – hinsichtlich der Anteile der Schülerinnen und Schüler mit richtiger Antwort verglichen, geordnet nach den zugeordneten Entwicklungsschritten.

Für die dem ersten Entwicklungsschritt zugeordneten Aufgaben wurde festgestellt, dass der Anteil der Schülerinnen und Schüler mit richtiger Antwort bezüglich des Modells der Laplace-Wahrscheinlichkeit 82,1% beträgt, in Bezug auf das Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit 86,9% und bezüglich der Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen 83,9%.

Was die dem zweiten Entwicklungsschritt zugeordneten Aufgaben betrifft, so beträgt der Anteil der Schülerinnen und Schüler mit richtiger Antwort bezüglich des Modells der Laplace-Wahrscheinlichkeit 65,1%, in Bezug auf das Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit 69,3% und bezüglich der Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen 73,3%.

Für die dem dritten Entwicklungsschritt zugeordneten Aufgaben wurde festgestellt, dass der Anteil der Schülerinnen und Schüler mit richtiger Antwort bezüglich des Modells der Laplace-Wahrscheinlichkeit 42,2% beträgt, in Bezug auf das Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit 35,9% und bezüglich der Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen 28,0%.

Dies ist in der nachfolgenden Abbildung grafisch dargestellt.



Auswertungsergebnis 1b. Es gilt also für jeden der drei zugeordneten Entwicklungsschritte, dass der Anteil der Schülerinnen und Schüler mit richtiger Antwort bei den untersuchten drei

Konzepten annähernd gleich groß ist. Zudem ist unabhängig vom Konzept eine gewisse „Trennschärfe“ zwischen den einzelnen Entwicklungsschritten gegeben.

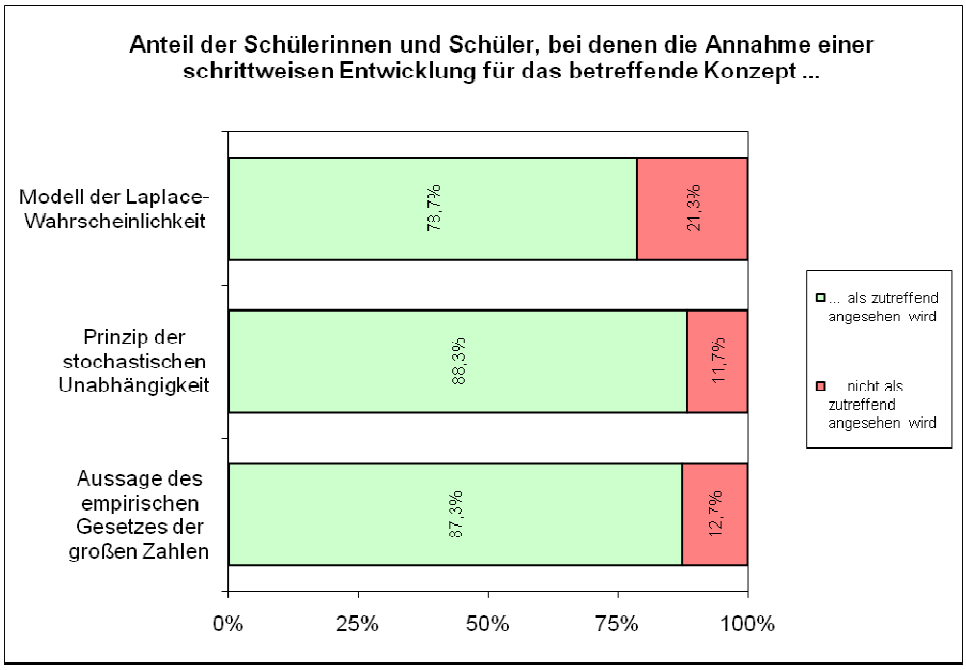
Auswertungsergebnis 1. Somit lässt sich zusammenfassend festhalten, dass durch die Testdaten bestätigt wird, dass die verwendeten „Aufgaben zur Überprüfung“ für die empirische Überprüfung des Modells der Entwicklungsschritte des intuitiven probabilistischen Denkens als geeignet angesehen werden können.

Auswertung 2. Um festzustellen, ob sich das beschriebene Modell der Entwicklungsschritte des intuitiven probabilistischen Denkens anhand der vorliegenden Untersuchung empirisch bestätigen lässt, wurden die Antworten der Schülerinnen und Schüler einzeln ausgewertet – analog zur Pilotstudie. In der im Anhang abgebildeten Tabelle sind für jede Schülerin bzw. jeden Schüler die anhand der Antworten bei den einzelnen Aufgaben zugeordneten Entwicklungsschritte für die untersuchten drei Konzepte aufgeführt.

Auswertungsergebnis 2. Folgendes lässt sich in Bezug auf das Zutreffen des Modells der Entwicklungsschritte für die untersuchten Konzepte festhalten:

- Bei 410 der 521 getesteten Schülerinnen und Schüler (dies entspricht 78,7%) lässt sich die Annahme einer schrittweisen Entwicklung für das Konzept Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit durch die Testdaten bestätigen,
- bei 460 der 521 getesteten Schülerinnen und Schüler (dies entspricht 88,3%) für das Konzept Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit und
- bei 455 der 521 getesteten Schülerinnen und Schüler (dies entspricht 87,3%) für das Konzept Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen.

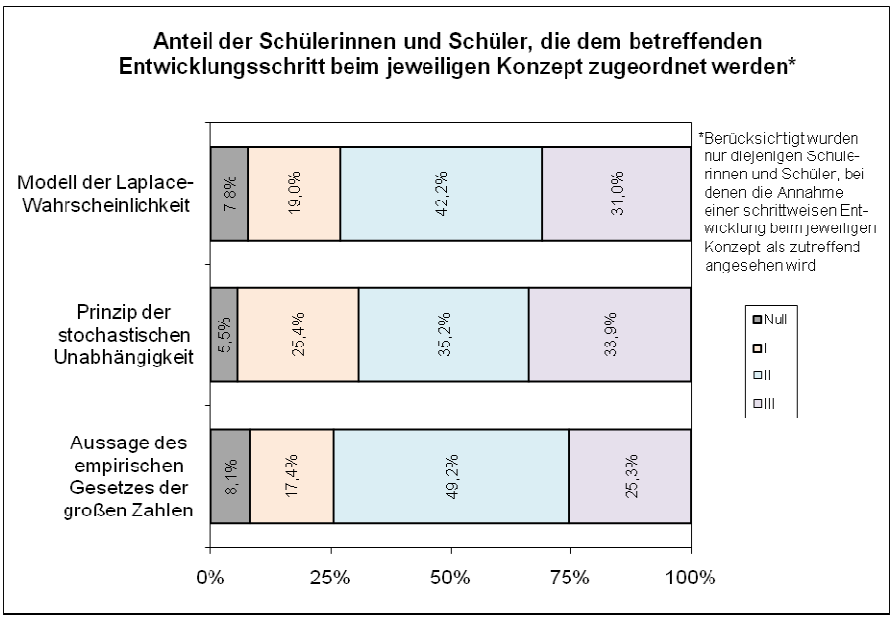
In der nachfolgenden Abbildung ist dies grafisch verdeutlicht.



Das beschriebene Modell der Entwicklungsschritte des intuitiven probabilistischen Denkens lässt sich also, wie anhand des Ergebnisses der Pilotstudie vermutet, auch durch die vorliegende Untersuchung (in welcher eine größere Anzahl an Schülerinnen und Schülern als bei der Pilotstudie getestet wurde) empirisch bestätigen – zumindest für die untersuchten drei Konzepte und anhand der eingesetzten „Aufgaben zur Überprüfung“.

Eine mögliche Ursache für den in Bezug auf die Annahme einer schrittweisen Entwicklung geringeren Anteil des Zutreffens beim Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit im Vergleich zu den beiden anderen Konzepten könnte das für die Schülerinnen und Schüler unter Umständen ungewohnte Format („Skala“) der Aufgabe 1I-PSF-S („Spielkarten-Wurf“) darstellen.

Extras. Analog zur Pilotstudie ist für diejenigen Schülerinnen und Schüler, bei denen die Annahme einer schrittweisen Entwicklung beim jeweiligen Konzept als zutreffend angesehen wird (dies sind, wie beschrieben, beim Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit 410 der 521 getesteten Schülerinnen und Schüler, beim Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit 460 der 521 getesteten Schülerinnen und Schüler und bei der Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen 455 der 521 getesteten Schülerinnen und Schüler), in der nachfolgenden Abbildung grafisch dargestellt, welche Anteile den einzelnen Entwicklungsschritten zugeordnet werden.



Festhalten lässt sich: Bezüglich des Konzeptes Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit beträgt der Anteil der Schülerinnen und Schüler,

- die dem ersten Entwicklungsschritt zugeordnet werden, 19,0%,
- die dem zweiten Entwicklungsschritt zugeordnet werden, 42,2%,
- die dem dritten Entwicklungsschritt zugeordnet werden, 31,0% und der Anteil der Schülerinnen und Schüler,
- die einem „Null-Schritt“ zuzuordnen sind, 7,8%.

Was das Konzept Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit betrifft, so beträgt der Anteil der Schülerinnen und Schüler,

- die dem ersten Entwicklungsschritt zugeordnet werden, 25,4%,
- die dem zweiten Entwicklungsschritt zugeordnet werden, 35,2%,

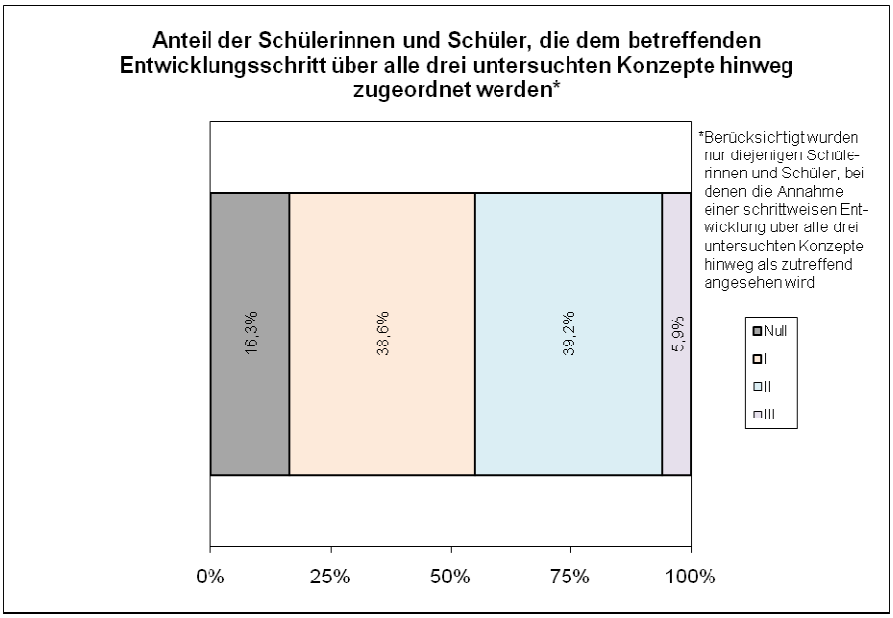
- die dem dritten Entwicklungsschritt zugeordnet werden, 33,9% und der Anteil der Schülerinnen und Schüler,
- die einem „Null-Schritt“ zuzuordnen sind, 5,5%.

In Bezug auf das Konzept Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen beträgt der Anteil der Schülerinnen und Schüler,

- die dem ersten Entwicklungsschritt zugeordnet werden, 17,4%,
- die dem zweiten Entwicklungsschritt zugeordnet werden, 49,2%,
- die dem dritten Entwicklungsschritt zugeordnet werden, 25,3% und der Anteil der Schülerinnen und Schüler,
- die einem „Null-Schritt“ zuzuordnen sind, 8,1%.

Bei allen drei untersuchten Konzepten entfällt also jeweils der größte Anteil auf den zweiten Entwicklungsschritt, der zweitgrößte Anteil auf den dritten Entwicklungsschritt, der drittgrößte Anteil auf den ersten Entwicklungsschritt und der viertgrößte Anteil – welcher diesbezüglich dem kleinsten Anteil entspricht – auf einen „Null-Schritt“.

Bei 319 der 521 getesteten Schülerinnen und Schüler (dies entspricht 61,2%) wird die Annahme einer schrittweisen Entwicklung über alle drei untersuchten Konzepte hinweg als zutreffend angesehen. In der nachfolgenden Abbildung ist grafisch dargestellt, welche Anteile dieser Schülerinnen und Schüler den einzelnen Entwicklungsschritten über alle drei untersuchten Konzepte hinweg zugeordnet werden, wenn die Zuordnung jeder Schülerin bzw. jedes Schülers jeweils zu dem höchsten Entwicklungsschritt erfolgt, der über alle drei untersuchten Konzepte hinweg als vollzogen angesehen werden kann.



Es lässt sich festhalten, dass der Anteil der Schülerinnen und Schüler, die über alle drei untersuchten Konzepte hinweg

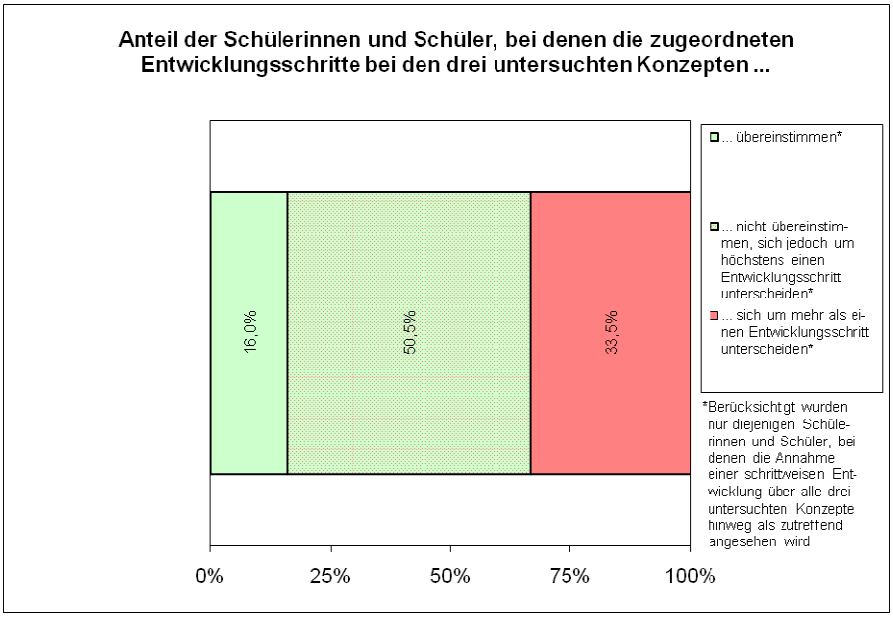
- dem ersten Entwicklungsschritt zugeordnet werden, 38,6% beträgt,
- dem zweiten Entwicklungsschritt zugeordnet werden, 39,2% beträgt,
- dem dritten Entwicklungsschritt zugeordnet werden, 5,9% beträgt und der Anteil der Schülerinnen und Schüler, die über alle drei untersuchten Konzepte hinweg
- einem „Null-Schritt“ zuzuordnen sind, 16,3% beträgt.

Über alle drei untersuchten Konzepte hinweg entfallen also die beiden „größten“ Anteile, welche annähernd gleich groß sind, auf den ersten und den zweiten Entwicklungsschritt, der drittgrößte Anteil entfällt auf einen „Null-Schritt“ und der viertgrößte Anteil – welcher diesbezüglich dem kleinsten Anteil entspricht – auf den dritten Entwicklungsschritt.

Anzumerken ist bezüglich derjenigen Schülerinnen und Schüler, bei denen die Annahme einer schrittweisen Entwicklung über alle drei untersuchten Konzepte hinweg als zutreffend angesehen wird, dass der Anteil der Schülerinnen und Schüler,

- bei denen die zugeordneten Entwicklungsschritte bei den drei untersuchten Konzepten übereinstimmen, 16,0% beträgt,
- bei denen die zugeordneten Entwicklungsschritte bei den drei untersuchten Konzepten nicht übereinstimmen, sich jedoch um höchstens einen Entwicklungsschritt unterscheiden, 50,5% beträgt und der Anteil der Schülerinnen und Schüler,
- bei denen sich die zugeordneten Entwicklungsschritte bei den drei untersuchten Konzepten um mehr als einen Entwicklungsschritt unterscheiden, 33,5% beträgt.

In der nachfolgenden Abbildung ist dies ebenfalls grafisch dargestellt.



6.4.5 Fazit aus der Hauptstudie

Die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung bestätigen die Ergebnisse der Pilotstudie. So wird die Annahme einer schrittweisen Entwicklung für das Konzept Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit, das Konzept Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit und das Konzept Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen jeweils bei mehr als drei Viertel der Schülerinnen und Schüler als zutreffend angesehen.

Bei ungefähr zwei Drittel der Schülerinnen und Schüler wird die Annahme einer schrittweisen Entwicklung über alle drei untersuchten Konzepte hinweg als zutreffend angesehen. Bei wiederum etwa zwei Drittel dieser Schülerinnen und Schüler stimmen die bei den drei untersuchten Konzepten zugeordneten Entwicklungsschritte überein beziehungsweise unterscheiden sich um höchstens einen Entwicklungsschritt.

In Bezug auf das Modell der Entwicklungsschritte des intuitiven probabilistischen Denkens lassen sich die Ergebnisse der Hauptstudie wie folgt interpretieren:

- Was das Konzept Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit betrifft, so kann bei ungefähr drei Viertel der Schülerinnen und Schüler, bei denen die Annahme einer schrittweisen Entwicklung als zutreffend angesehen wird, angenommen werden, dass mindestens der zweite Entwicklungsschritt vollzogen wurde. Es lässt sich also davon ausgehen, dass bei etwa drei Viertel der Schülerinnen und Schüler, bei denen die Annahme einer schrittweisen Entwicklung als zutreffend angesehen wird, die *Plausibilität* des Konzeptes Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit vorhanden ist. Bei etwas weniger als der Hälfte dieser Schülerinnen und Schüler lässt sich sogar von der *Fruchtbarkeit* des Konzeptes Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit ausgehen.

Aufgrund der vermuteten Problematik des ungewohnten Formates der Aufgabe 1I-PSF-S („Spielkarten-Wurf“) wird von einer Interpretation hinsichtlich der *Verständlichkeit* des Konzeptes Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit abgesehen.

- In Bezug auf das Konzept Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit kann bei ungefähr zwei Drittel der Schülerinnen und Schüler, bei denen die Annahme einer schrittweisen Entwicklung als zutreffend angesehen wird, angenommen werden, dass mindestens der zweite Entwicklungsschritt vollzogen wurde. Es lässt sich also in Bezug auf das Konzept Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit davon ausgehen, dass bei etwa zwei Drittel der Schülerinnen und Schüler, bei denen die Annahme einer schrittweisen Entwicklung als zutreffend angesehen wird, die *Plausibilität* vorhanden ist. Von der *Fruchtbarkeit* des Konzeptes Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit lässt sich bei knapp der Hälfte dieser Schülerinnen und Schüler ausgehen. Nur bei einem sehr kleinen Teil der Schülerinnen und Schüler, bei denen die Annahme einer schrittweisen Entwicklung als zutreffend angesehen wird, ist anzunehmen, dass (lediglich) ein „Null-Schritt“ vollzogen wurde. Es ist somit davon auszugehen, dass nur bei einem sehr kleinen Teil der Schülerinnen und Schüler, bei denen die Annahme einer schrittweisen Entwicklung als zutreffend angesehen wird, die *Verständlichkeit* des Konzeptes Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit nicht vorhanden ist.
- Bezüglich des Konzeptes Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen kann bei ungefähr drei Viertel der Schülerinnen und Schüler, bei denen die Annahme einer schrittweisen Entwicklung als zutreffend angesehen wird, angenommen werden, dass mindestens der zweite Entwicklungsschritt vollzogen wurde. Es lässt sich somit davon ausgehen, dass bei etwa drei Viertel der Schülerinnen und Schüler, bei denen die Annahme einer schrittweisen Entwicklung als zutreffend angesehen wird, die *Plausibilität* des Konzeptes Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen vorhanden ist. Bei ungefähr einem Drittel dieser Schülerinnen und Schüler lässt sich auch von der *Fruchtbarkeit* des Konzeptes Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen ausgehen. Dem gegenüber ist bei einem kleinen (aber im Vergleich zum Konzept Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit annähernd eineinhalbmal so großen) Teil der Schülerinnen und Schüler, bei denen die Annahme einer schrittweisen Entwicklung als zutreffend angesehen wird, anzunehmen, dass (lediglich) ein „Null-Schritt“ vollzogen wurde. Es ist also davon auszugehen, dass bei einem kleinen Teil der Schülerinnen und Schüler, bei denen die Annahme einer schrittweisen Entwicklung als zutreffend angesehen wird, die *Verständlichkeit* des Konzeptes Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen nicht vorhanden ist.

Über alle drei untersuchten Konzepte hinweg kann bei der überwiegenden Mehrzahl der Schülerinnen und Schüler, bei denen die Annahme einer schrittweisen Entwicklung bei allen drei untersuchten Konzepten als zutreffend angesehen wird, angenommen werden, dass mindestens der erste Entwicklungsschritt vollzogen wurde. Somit lässt sich bei der überwiegenden Mehrzahl der Schülerinnen und Schüler, bei denen die Annahme einer schrittweisen Entwicklung bei allen drei untersuchten Konzepten als zutreffend angesehen wird, davon ausgehen, dass Zufallserscheinungen und Wahrscheinlichkeiten bei Problemstellungen, bei denen die *Verständlichkeit* einer fachwissenschaftlichen Vorstellung erforderlich ist, intuitiv eingeschätzt werden – das heißt: Von diesen Schülerinnen und Schülern wird auf die entsprechenden fachwissenschaftlichen Vorstellungen zurückgegriffen.

Dass mindestens der zweite Entwicklungsschritt vollzogen wurde, kann dagegen nur bei etwas weniger als der Hälfte der Schülerinnen und Schüler, bei denen die Annahme einer schrittweisen Entwicklung bei allen drei untersuchten Konzepten als zutreffend angesehen wird, angenommen werden. Es lässt sich demzufolge davon ausgehen, dass Zufallserscheinungen und Wahrscheinlichkeiten bei Problemstellungen, bei denen die *Plausibilität* einer fachwissenschaftlichen Vorstellung erforderlich ist, nur von etwas weniger als der Hälfte der Schülerinnen und Schüler, bei denen die Annahme einer schrittweisen Entwicklung bei allen drei untersuchten Konzepten als zutreffend angesehen wird, intuitiv eingeschätzt werden – im Umkehrschluss bedeutet dies, dass bei etwas mehr als der Hälfte der Schülerinnen und Schüler, bei denen die Annahme einer schrittweisen Entwicklung bei allen drei untersuchten Konzepten als zutreffend angesehen wird, neben den fachwissenschaftlichen Vorstellungen Fehlvorstellungen, im Sinne von kognitiven Verzerrungen, vorhanden sind.

Dass der dritte Entwicklungsschritt vollzogen wurde, kann dagegen nur bei einem sehr kleinen Teil der Schülerinnen und Schüler, bei denen die Annahme einer schrittweisen Entwicklung bei allen drei untersuchten Konzepten als zutreffend angesehen wird, angenommen werden. Somit lässt sich nur bei einem sehr kleinen Teil der Schülerinnen und Schüler, bei denen die Annahme einer schrittweisen Entwicklung bei allen drei untersuchten Konzepten als zutreffend angesehen wird, davon ausgehen, dass Zufallserscheinungen und Wahrscheinlichkeiten bei Problemstellungen, bei denen die *Fruchtbarkeit* einer fachwissenschaftlichen Vorstellung erforderlich ist, intuitiv eingeschätzt werden – dies bedeutet, dass lediglich von einem sehr kleinen Teil der Schülerinnen und Schüler, bei denen die Annahme einer schrittweisen Entwicklung bei allen drei untersuchten Konzepten als zutreffend angesehen wird, vorhandene fachwissenschaftliche Vorstellungen auf „neue Bereiche“ übertragen werden.

Abschließend ist anzumerken, dass sich die für die getesteten Schülerinnen und Schüler bei der vorliegenden Untersuchung erhaltenen Ergebnisse auch mit den im Kapitel 5 vorgestellten Erkenntnissen zur Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens gut interpretieren lassen:

- Was das Konzept Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit betrifft, so kann davon ausgegangen werden, dass die in Abbildung 5.2 dargestellten Umstrukturierungen innerhalb der Wissensbasis und der heuristischen Struktur bei ungefähr drei Viertel der Schülerinnen und Schüler, bei denen die Annahme einer schrittweisen Entwicklung als zutreffend angesehen wird, stattgefunden haben – es ist anzunehmen, dass bei den betreffenden Schülerinnen und Schülern ein Conceptual Change erfolgt ist. Dass das in Form des „direct accessible knowledge“ vorliegende Wissen zum Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit von etwas mehr als der Hälfte dieser Schülerinnen und Schüler nicht auf „neue Bereiche“ übertragen wird beziehungsweise diesbezüglich korrekt angewendet wird, lässt sich – im Zusammenhang mit den in Abbildung 5.3 dargestellten, das Prinzip der Kausalität betreffenden Umstrukturie-

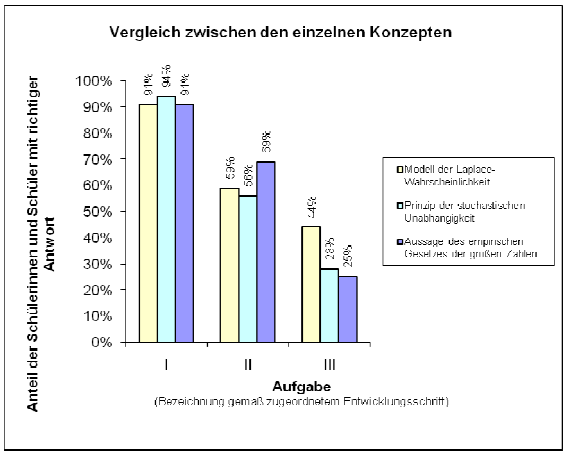
rungen innerhalb der Wissensbasis und der heuristischen Struktur – auf den Einfluss der evaluativen Struktur zurückführen.

- In Bezug auf das Konzept Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit kann davon ausgegangen werden, dass die in Abbildung 5.4 dargestellte Umstrukturierung innerhalb der Wissensbasis bei etwa zwei Drittel der Schülerinnen und Schüler, bei denen die Annahme einer schrittweisen Entwicklung als zutreffend angesehen wird, stattgefunden hat. Da die Problemrahmung der zugehörigen „Aufgabe zur Überprüfung“ dem „Social Judgement Framing“ entspricht, kann angenommen werden, dass bei den betreffenden Schülerinnen und Schülern auch eine Umstrukturierung innerhalb der heuristischen Struktur stattgefunden hat und somit insgesamt betrachtet ein Conceptual Change erfolgt ist.
- Bezüglich des Konzeptes Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen kann davon ausgegangen werden, dass bei ungefähr drei Viertel der Schülerinnen und Schüler, bei denen die Annahme einer schrittweisen Entwicklung als zutreffend angesehen wird, eine Umstrukturierung sowohl innerhalb der Wissensbasis als auch innerhalb der heuristischen Struktur stattgefunden hat – es ist folglich anzunehmen, dass bei den betreffenden Schülerinnen und Schülern ein Conceptual Change erfolgt ist. Dem gegenüber ist davon auszugehen, dass bei einem kleinen Teil der Schülerinnen und Schüler, bei denen die Annahme einer schrittweisen Entwicklung als zutreffend angesehen wird, die in Abbildung 5.5 dargestellten Umstrukturierungen innerhalb der Wissensbasis und der heuristischen Struktur stattgefunden haben – ein Conceptual Change ist bei den betreffenden Schülerinnen und Schülern nicht erfolgt.

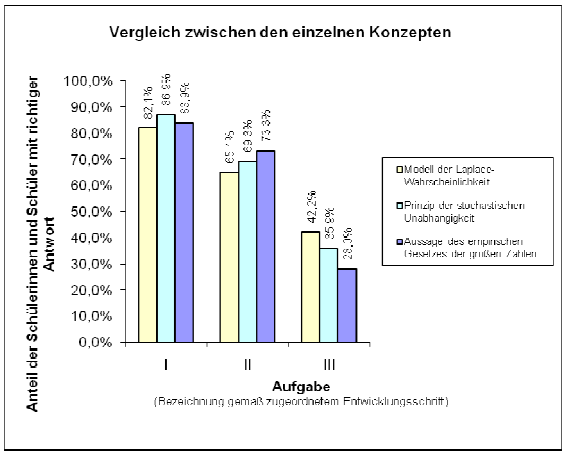
Zusammenfassung. Es lässt sich festhalten, dass die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung die Ergebnisse der ersten pilotartigen empirischen Überprüfung bestätigen und damit einhergehend auch das theoretisch konzipierte Modell der Entwicklungsschritte des intuitiven probabilistischen Denkens – zumindest für die untersuchten drei Konzepte und anhand der eingesetzten „Aufgaben zur Überprüfung“.

Dass zwischen den zentralen Befunden (Auswertungsergebnis 1 und Auswertungsergebnis 2) von Pilotstudie und Hauptstudie keine signifikanten Unterschiede feststellbar sind, verdeutlicht die Gegenüberstellung der Diagramme der zugehörigen Auswertungen:

Pilotstudie (N = 32):

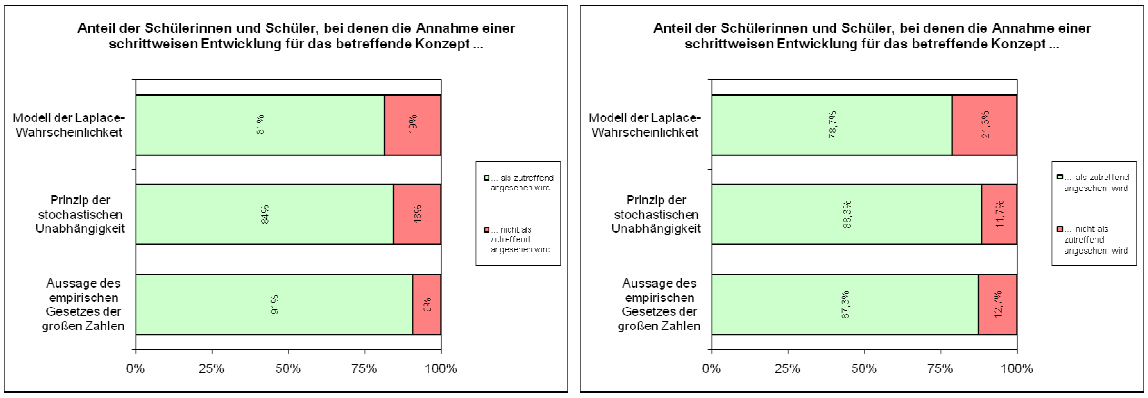


Hauptstudie (N = 521):



(Auswertung 1)

Pilotstudie (N = 32): Hauptstudie (N = 521):



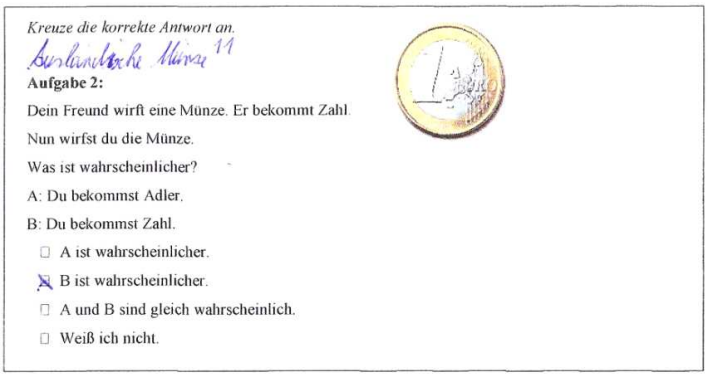
(Auswertung 2)

Die jeweils vorhandenen Abweichungen lassen sich mit der geringen Anzahl der getesteten Schülerinnen und Schüler bei der Pilotstudie erklären.

6.5 Diskussion und Ausblick

6.5.1 Optimierungsmöglichkeiten bei der Erhebung

Im Zuge der Auswertung der Antworten der getesteten Schülerinnen und Schüler bei der empirischen Studie zur Überprüfung des Modells der Entwicklungsschritte des intuitiven probabilistischen Denkens wurde auf zwei Aufgabenblättern jeweils bei einer der zu bearbeitenden Aufgaben eine Erläuterung zur gegebenen Antwort vorgefunden, die darauf hindeutet, dass die betreffende Lösung der Aufgabe nicht dem *intuitiven*, sondern dem *analytischen* Denken zuzuordnen ist.


Kreuze die korrekte Antwort an.

Ausländische Münze 11

Aufgabe 2:

Dein Freund wirft eine Münze. Er bekommt Zahl.

Nun wirfst du die Münze.

Was ist wahrscheinlicher?

A: Du bekommst Adler.

B: Du bekommst Zahl.

- ☐ A ist wahrscheinlicher.
- ☒ B ist wahrscheinlicher.
- ☐ A und B sind gleich wahrscheinlich.
- ☐ Weiß ich nicht.

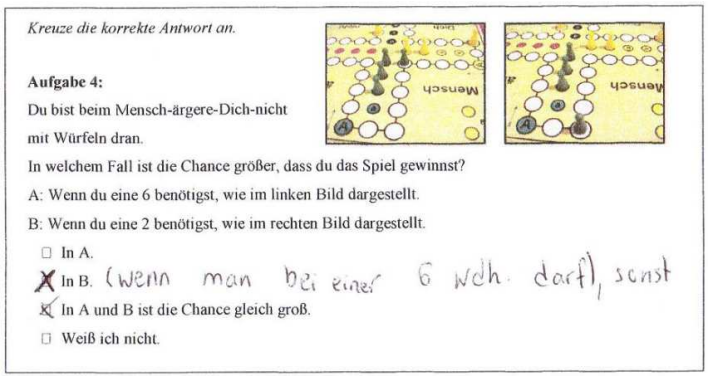
Abb. 6.4. Schülerlösung (I)

So könnte bezüglich der in Abbildung 6.4 dargestellten Schülerlösung folgende Überlegung zugrunde liegen: Bei der auf dem Aufgabenblatt abgebildeten Münze ist nur die einheit-

lich gestaltete, gemeinsame „europäische“ Seite zu sehen, die „nationale“ Seite ist unbekannt; die möglichen „nationalen“ Seiten sind (zum Testzeitpunkt) „Deutschland“, „Belgien“, „Finnland“, „Frankreich“, „Griechenland“, „Irland“, „Italien“, „Luxemburg“, „Malta“, „Monaco“, „Niederlande“, „Österreich“, „Portugal“, „San Marino“, „Slowakei“, „Slowenien“, „Spanien“, „Vatikanstadt“ und „Zypern“ – insgesamt 19 Stück; handelt es sich bei der abgebildeten Münze um eine Münze, bei der die „nationale“ Seite nicht „Deutschland“ ist, so ist beim Werfen der Münze das Ergebnis „Adler“ unmöglich – es ist im Vergleich dazu wahrscheinlicher, das Ergebnis „Zahl“ zu erhalten. Im Vordergrund steht also bei dieser Schülerlösung nicht – wie beabsichtigt – die *intuitive* Anwendung des Wissens zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit, sondern die *analytische* Einschätzung der Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei der abgebildeten Münze um eine Münze handelt, bei der die „nationale“ Seite „Deutschland“ ist.

Die beschriebene Problematik lässt sich bei der Aufgabe 2I-PSF-MC („Zahl! Und nun?“) vermeiden, indem bei der abgebildeten Münze nicht die einheitlich gestaltete, gemeinsame „europäische“ Seite gezeigt wird, sondern die „nationale“ Seite „Deutschland“.

Auf die Ergebnisse der Pilotstudie und der empirischen Studie zur Überprüfung des Modells der Entwicklungsschritte des intuitiven probabilistischen Denkens hat die beschriebene Problematik keinen Einfluss, da aufgrund der diesbezüglich angekreuzten Antwort „B ist wahrscheinlicher“ bei der Auswertung nicht fälschlicherweise darauf geschlossen wird, dass der zugeordnete Entwicklungsschritt des *intuitiven* probabilistischen Denkens von der betreffenden Schülerin beziehungsweise dem betreffenden Schüler vollzogen wurde.


Kreuze die korrekte Antwort an.

Aufgabe 4:

Du bist beim Mensch-ärgere-Dich-nicht mit Würfeln dran.

In welchem Fall ist die Chance größer, dass du das Spiel gewinnst?

A: Wenn du eine 6 benötigst, wie im linken Bild dargestellt.

B: Wenn du eine 2 benötigst, wie im rechten Bild dargestellt.

☐ In A.

☒ In B. (wenn man bei einer 6 wdh. darf), sonst

☒ In A und B ist die Chance gleich groß.

☐ Weiß ich nicht.

Abb. 6.5. Schülerlösung (II)

In Bezug auf die in Abbildung 6.5 dargestellte Schülerlösung (welche als hoch belastbare „Surplus-Antwort“ aufgefasst werden kann) lässt sich folgende Überlegung vermuten: Darf, in Abhängigkeit von den vereinbarten Spielregeln, bei einer gewürfelten „Sechs“ nochmals gewürfelt werden, so ist die Chance, das Spiel zu gewinnen, bei der im rechten Bild dargestellten Situation größer – darf bei einer gewürfelten „Sechs“ nicht nochmals gewürfelt werden, so ist die Chance, das Spiel zu gewinnen, bei den beiden im linken und rechten Bild dargestellten Situationen gleich groß. Bei dieser Schülerlösung steht also nicht – wie beabsichtigt – (allein) die *intuitive* Anwendung des Wissens zum Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit im Vordergrund, sondern (auch) die *analytische* Einschätzung, wie sich die Chance, das Spiel zu gewinnen, in Abhängigkeit von den vereinbarten Spielregeln verändert.

Die beschriebene Problematik lässt sich bei der Aufgabe 1II-PSF-MC („Fast drin!“) vermeiden, indem die Fragestellung präzisiert wird: „In welchem Fall ist die Chance größer, dass du das Spiel *mit diesem Wurf* gewinnst?“ – allerdings besteht die Gefahr, dass dadurch die Aktivierung des analytischen Denkens begünstigt wird.

Auf die Ergebnisse der Pilotstudie und der empirischen Studie zur Überprüfung des Modells der Entwicklungsschritte des intuitiven probabilistischen Denkens hat die beschriebene Problematik ebenfalls keinen Einfluss, da aufgrund der diesbezüglich angekreuzten Antworten „In B“ und „In A und B ist die Chance gleich groß“ – wie auch aufgrund der eventuell allein angekreuzten Antwort „In B“, wenn (analytisch) die Spielregel berücksichtigt wird, dass bei einer gewürfelten „Sechs“ nochmals gewürfelt werden darf – bei der Auswertung nicht fälschlicherweise darauf geschlossen wird, dass der zugeordnete Entwicklungsschritt des *intuitiven* probabilistischen Denkens von der betreffenden Schülerin beziehungsweise dem betreffenden Schüler vollzogen wurde.

Dass bei den beiden abgebildeten Schülerlösungen jeweils *analytisch* und nicht *intuitiv* vorgegangen wurde, könnte darauf zurückzuführen sein, dass die betreffenden Schülerinnen beziehungsweise Schüler – entgegen der Annahme – über (schulische) Vorkenntnisse aus dem Bereich der Stochastik verfügten. Eine mögliche Erklärung hierfür ist, dass diese Schülerinnen bzw. Schüler jeweils aus einem anderen Bundesland nach Bayern zugezogen sind und gemäß den in dem betreffenden Bundesland gültigen Lehrplänen bereits in Stochastik unterrichtet wurden.

Zusammenfassend lässt sich bezogen auf die Pilotstudie und die empirische Studie zur Überprüfung des Modells der Entwicklungsschritte des intuitiven probabilistischen Denkens Folgendes festhalten: Anhand eines schriftlichen Tests sollte das *intuitive* Denken der Schülerinnen und Schüler überprüft werden – hierzu wurden „Aufgaben zur Überprüfung“ konstruiert; die zur Verfügung stehende Bearbeitungszeit wurde auf 10 Minuten begrenzt. Die Daten der empirischen Studie zur Überprüfung des Modells der Entwicklungsschritte des intuitiven probabilistischen Denkens zeigen jedoch, dass (zumindest bei einem Teil der getesteten Schülerinnen und Schüler) bei einzelnen Aufgaben *analytisches* Denken nicht ausgeschlossen werden kann. Zudem sollte berücksichtigt werden, dass bei den untersuchten drei Konzepten zu jedem Entwicklungsschritt lediglich eine einzige „Aufgabe zur Überprüfung“ zu bearbeiten war (Stichwort: Ratewahrscheinlichkeit).

Aus den genannten Gründen wurde bei der *Beschreibung und Interpretation* der erhaltenen Ergebnisse (vgl. Abschnitt 6.4.5) auf die Angabe von Prozentzahlen verzichtet; diese würden eine nicht gegebene „(Mess-)Genauigkeit“ des Tests vortäuschen. Mit der Einschränkung auf die stark vergröberte Angabe (zum Beispiel „etwa zwei Drittel der getesteten Schülerinnen und Schüler“ beziehungsweise „ungefähr drei Viertel der Schülerinnen und Schüler, bei denen ...“) können die Ergebnisse der auf die „Aufgaben zur Überprüfung“ beschränkten empirischen Überprüfung als eine Art Referenz für weitere umfassendere empirische Überprüfungen des Modells der Entwicklungsschritte des intuitiven probabilistischen Denkens angesehen werden – anzumerken ist, dass der Anteil des Testergebnisses einer einzelnen Schülerin bzw. eines einzelnen Schülers am Gesamtergebnis aller 521 getesteten Schülerinnen und Schüler bei der empirischen Studie zur Überprüfung des Modells der Entwicklungsschritte des intuitiven probabilistischen Denkens weniger als 0,2% beträgt.

6.5.2 Perspektiven

Den Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit bildet die Beschreibung der Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens bei Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I unter dem Aspekt des Conceptual Change. Für die drei zentralen Konzepte Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit, Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit und Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen wurde der Übergang von der kognitiven Struktur zu Beginn der Sekundarstufe I auf die kognitive Struktur am Ende der Sekundarstufe I in einem Modell dargestellt, welches an Elemente des Prozess-Struktur-Modells von Scholz (1987) anknüpft (vgl.

Abschnitt 5.1.4). Ergänzend wurden die Erkenntnisse zur Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens in ein Modell der Entwicklungsschritte eingeordnet (vgl. Abschnitt 6.2.3). Die Ergebnisse der Pilotstudie und der empirischen Studie zur Überprüfung des Modells der Entwicklungsschritte des intuitiven probabilistischen Denkens bestätigen das Modell der Entwicklungsschritte anhand der eingesetzten „Aufgaben zur Überprüfung“ für die untersuchten Konzepte Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit, Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit und Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen – trotz der beschriebenen Optimierungsmöglichkeiten bei der Erhebung.

In Bezug auf eine umfassendere empirische Bestätigung des Modells der Entwicklungsschritte des intuitiven probabilistischen Denkens werden vom Autor folgende Aspekte für erfolgversprechend erachtet:

- *(„Aufgabenteleskop“)* erstens, dass für die untersuchten drei Konzepte, ausgehend von den exemplarischen „Aufgaben zur Überprüfung“, weitere Aufgaben zur Überprüfung zu jedem der drei Entwicklungsschritte konstruiert werden, sodass insgesamt ein umfangreicherer und damit aussagekräftigerer Test (Stichwort: Ratewahrscheinlichkeit) zur Verfügung steht.
- *(Einbeziehung weiterer Konzepte)* Zweitens erscheint es angebracht, dass zusätzlich zu den untersuchten drei Konzepten weitere Konzepte des intuitiven probabilistischen Denkens (beispielsweise die Regeln für die Wahrscheinlichkeit konjunktiver und disjunktiver Ereignisse) überprüft werden.
- *(Konzeptmix)* Drittens ist zu untersuchen, ob das Modell der Entwicklungsschritte auch bestätigt werden kann, wenn zur Lösung einer Problemstellung schwerpunktmäßig nicht nur ein einzelnes Konzept erforderlich ist (zum Beispiel das Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit), sondern mehrere Konzepte zugleich benötigt werden (beispielsweise das Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit in Verbindung mit dem Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit).
- *(Intuition vs. Analyse)* Und viertens ist bei der Testdurchführung für jede der eingesetzten Aufgaben zu evaluieren, ob von den Schülerinnen und Schülern bei der Bearbeitung *intuitiv* vorgegangen wird, wie angenommen, oder aber *analytisch*.

In Bezug auf den letzten der vier aufgeführten Aspekte bietet sich als mögliche Ergänzung zu dem durchgeführten (strukturorientierten) Paper-Pencil-Test die Durchführung einzelner videobasierter Interview-Studien an (zum Beispiel mit Schülerinnen und Schülern, bei denen das Auswertungsergebnis „○●●“ bei einem oder mehreren der untersuchten Konzepte vorliegt). Der jeweiligen Probandin bzw. dem jeweiligen Probanden könnte jede der zu bearbeitenden Aufgaben (mit der betreffenden Fragestellung) in Form einer kurzen Videosequenz präsentiert werden. Die Antwort auf die gestellte Frage wäre direkt im Anschluss an die jeweilige Präsentation einem Interviewer zu geben, der gegebenenfalls (Nach-)Fragen stellen könnte, um herauszufinden, ob die Überlegungen der Probandin bzw. des Probanden eher dem intuitiven oder eher dem analytischen Denken zugeordnet werden müssten. Ein weiterer Vorteil wäre, dass anhand der (sequentiellen) Begleitung durch einen Interviewer festgestellt werden könnte, ob sich Einschätzungen der Probandinnen bzw. Probanden während der Testdurchführung wandeln beziehungsweise unter Umständen erst konstituieren.

Anzumerken ist, dass sich die untersuchten drei Konzepte zwar theoretisch gut voneinander abgrenzen lassen, bei der praktischen Umsetzung in realitätsbezogenen Aufgaben jedoch nicht immer eine klare Trennung zwischen den einzelnen Konzepten möglich ist. So ist beispielsweise zum Lösen der Aufgabe 2II-SJF-MC („Nächste Ausspielung“) schwerpunktmäßig das Wissen zum Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit anzuwenden – darüber hinaus muss aber auch auf das Wissen zum Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit zurückgegriffen werden (vgl. Abschnitt 6.2.4). Zu berücksichtigen ist außerdem, dass möglicherweise von ver-

schiedenen Schülerinnen und Schülern bei ein und derselben Problemstellung unterschiedliche (mehr oder weniger gut zutreffende) Konzepte zur Lösung herangezogen werden. Die im vorangegangenen Abschnitt in Abbildung 6.4 dargestellte Schülerlösung lässt dies vermuten: Es wird höchstwahrscheinlich nicht, wie bei der Konstruktion der betreffenden Aufgabe angenommen, auf das Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit zurückgegriffen.

Eine weitere Frage, die der Klärung bedarf, ist die der Art des Übergangs zwischen den einzelnen Entwicklungsschritten beim jeweiligen Konzept. Es ist zu untersuchen, ob der Übergang von einem Entwicklungsschritt zum nächsten in der Regel eher fließend erfolgt, das heißt nach und nach, oder eher sprunghaft. Zumindest für die drei Konzepte Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit, Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit und Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen lässt sich ein eher fließender Übergang vermuten, so wie dies aufgrund der Ergebnisse der Analyse der im vierten Kapitel vorgestellten Studien in dem im Abschnitt 5.1.4 beschriebenen Modell dargestellt ist: *Fehlvorstellungen* werden in unterschiedlichen Verwendungszusammenhängen nach und nach durch fachwissenschaftlich zutreffende Vorstellungen ersetzt, *plausible* Vorstellungen nach und nach auf (weitere) „neue Bereiche“ übertragen.

Des Weiteren ist zu untersuchen, ob der einer Schülerin oder einem Schüler bei einem bestimmten Konzept zugeordnete Entwicklungsschritt des intuitiven probabilistischen Denkens im Allgemeinen jeweils nur für das betreffende Konzept zutrifft oder über eine Vielzahl an Konzepten des intuitiven probabilistischen Denkens hinweg. Ersteres erscheint aufgrund des Ergebnisses der empirischen Studie zur Überprüfung als naheliegender: Nur bei einem kleinen Teil der Schülerinnen und Schüler, bei denen die Annahme einer schrittweisen Entwicklung über alle drei untersuchten Konzepte hinweg als zutreffend angesehen wird, stimmen die zugeordneten Entwicklungsschritte bei den drei untersuchten Konzepten überein.

In Bezug auf die im Abschnitt 2.2.3 beschriebenen *animistischen* Vorstellungen erscheint es darüber hinaus von Interesse, zu klären, ob die Zuordnung zu einem bestimmten Entwicklungsschritt des intuitiven probabilistischen Denkens in *subjektiven Risikosituationen* bestätigt werden kann.

Abschließend bleibt der Hinweis, dass ein Nutzen des Modells der Entwicklungsschritte darin gesehen werden kann, dass die Einschätzung, welche Anforderungen an das intuitive probabilistische Denken mit einer bestimmten Aufgabenstellung verbunden sind, erleichtert wird. So weisen Reiss und Winkelmann (2008) darauf hin, dass die Schwierigkeit einer Aufgabe selbst von erfahrenen Lehrkräften nicht immer richtig beurteilt wird. Was die Entwicklung von Kompetenzstufenmodellen betrifft, so geht die Forschung gegenwärtig in die Richtung, ausgehend von Kompetenz*stufen*modellen zu Kompetenze*ntwicklungs*modellen zu gelangen, welche die wesentlichen Entwicklungsschritte im Verlauf einer bestimmten Phase der Schulzeit (zum Beispiel der Grundschulzeit) aufzeigen. Diese Entwicklungsmodelle können in Bezug auf die gezielte Förderung von Lernprozessen eine wesentliche Hilfe für Lehrkräfte darstellen. Analoges gilt für die beiden in dieser Arbeit beschriebenen Modelle bezüglich der Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens – das im Abschnitt 5.1.4 dargestellte Modell, welches an Elemente des Prozess-Struktur-Modells von Scholz (1987) anknüpft, und das im Abschnitt 6.2.3 beschriebene Modell der Entwicklungsschritte des intuitiven probabilistischen Denkens. Beide Modelle können Lehrkräften die Orientierung erleichtern, welcher Förderbedarf bei Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I besteht und welche Möglichkeiten für eine angemessene Förderung zur Verfügung stehen. Darüber hinaus inspirieren und unterstützten sie die Konstruktion geeigneter Aufgaben und tragen so zu einer Bereicherung des Stochastikunterrichts bei.

6.5.3 Zum Schluss

Im Anschluss an die Auswertung der Hauptstudie wurden die „Aufgaben zur Überprüfung“ einer Gruppe von Studierenden des Lehramts an Realschulen beziehungsweise Gymnasien in Bayern zur Bearbeitung vorgelegt. Dies erfolgte im Rahmen einer Vorlesung des Autors zur Didaktik der Mathematik im Bereich „Daten und Zufall“. Die Ergebnisse dieser nicht repräsentativen Erhebung führen den Autor zu der Auffassung, dass im Sinne des vorgestellten Modells der Entwicklungsschritte des intuitiven probabilistischen Denkens zumindest bei einem Teil der angehenden Lehrerinnen und Lehrer nicht einmal die *Plausibilität* von Konzepten vorhanden ist, die für das intuitive probabilistische Denken als zentral anzusehen sind, wie das Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit, das Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit und die Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen.

Es ist darüber hinaus nicht auszuschließen, dass dieser Befund auch für Lehrkräfte zutrifft, die – unter Umständen seit vielen Jahren – aktiv im Schuldienst tätig sind.

Damit weiterhin und künftig eine angemessene Qualität des Stochastikunterrichts gesichert werden kann, soweit dies die Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens bei Schülerinnen und Schülern im Bereich der Sekundarstufe I betrifft, sieht der Autor daher folgenden an die vorliegende Arbeit anschließenden Arbeits- und Forschungsschwerpunkt als zentral an:

Die Entwicklung eines Programms für eine
„lebensbegleitende kompetenzorientierte Lehrerinnen- und Lehrerbildung“
zum intuitiven probabilistischen Denken

Dies beinhaltet unter anderem

- die Konzeption und Durchführung von empirischen Studien zum intuitiven probabilistischen Denken bei Lehrerinnen und Lehrern des Faches Mathematik sowie anderer, für das Lernen von Mathematik relevanter Fächer im Bereich der Sekundarstufe I und (daran angelehnt)
- die Erarbeitung von konkreten Vorschlägen, in welcher Form Erkenntnisse zum intuitiven probabilistischen Denken in das Studium künftiger Lehrerinnen und Lehrer beziehungsweise in Fortbildungen für aktiv im Schuldienst tätige Lehrerinnen und Lehrer des Faches Mathematik sowie anderer, für das Lernen von Mathematik relevanter Fächer im Bereich der Sekundarstufe I integriert werden können.

Als eine Leitlinie für ein solches Programm dient das eingangs in dieser Arbeit aufgeführte Zitat von Fischbein und Schnarch (1997, S. 104): “In learning probability, students must create new intuitions” – übertragen auf die Lehrerinnen- und Lehrerbildung: „Beim Lernen von Wahrscheinlichkeit sind neue Intuitionen zu schaffen.“

Literaturverzeichnis

Amir, G. S., Linchevski, L. & Shefet, M. (1999). The probabilistic thinking of 11-12 year old children. In O. Zaslavsky (Hrsg.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2* (S. 25-32). Haifa: University of Haifa.

Amir, G. S. & Williams, J. S. (1999). Cultural influences on children's probabilistic thinking. *Journal of Mathematical Behavior*, 18, 85-107.

Arbeitskreis Stochastik der GDM (2003). Empfehlungen zu Zielen und zur Gestaltung des Stochastikunterrichts. *Stochastik in der Schule*, 23 (3), 21-26.

Baillargeon, R. (1994). Physical reasoning in young infants: Seeking explanations for impossible events. *British Journal of Developmental Psychology*, 12, 9-33.

Bar-Hillel, M. (1983). The base-rate fallacy controversy. In R. W. Scholz (Hrsg.), *Decision Making under Uncertainty* (S. 39-63). Amsterdam: Elsevier (North Holland).

Bentz, H.-J. & Borovcnik, M. (1986). Zur Repräsentativitätsheuristik – eine fundamentale statistische Strategie. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, 39, 398-407.

Bentz, H.-J. & Borovcnik, M. (1991). Empirische Untersuchungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff. Ein Fundus von Problemaufgaben. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 33 (1), 1-6.

Beyth-Marom, R. (1982). How probable is probable? – A numerical translation of verbal probability expressions. *Journal of Forecasting*, 1, 257-269.

Biehler, R. & Hartung, R. (2006). Die Leitidee Daten und Zufall. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret* (S. 51-80). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Borovcnik, M. (1992). *Stochastik im Wechselspiel von Intuitionen und Mathematik*. Mannheim: Bibliographisches Institut.

Borovcnik, M. & Bentz, H.-J. (1991). Empirical research in understanding probability. In R. Kapadia & M. Borovcnik (Hrsg.), *Chance Encounters – Probability in Education* (S. 73-105). Dordrecht: Kluwer.

Büchter, A. & Henn, H.-W. (2007). *Elementare Stochastik*. Berlin u. a.: Springer.

Burtt, E. A. (1932). *The Metaphysical Foundations of Modern Science*. [Revised edition]. Garden City, NY: Doubleday and Company, Doubleday Anchor Books.

Caravita, S. (2001). Commentary: A re-framed conceptual change theory? *Learning and Instruction*, 11, 421-429.

Caravita, S. & Halldén, O. (1994). Re-framing the problem of conceptual change. *Learning and Instruction*, 4, 89-111.

Chan, C., Burtis, J. & Bereiter, C. (1997). Knowledge building as a mediator of conflict in conceptual change. *Cognition and Instruction*, 15, 1-40.

Chi, M. T. H., Slotta, J. D. & de Leeuw, N. (1994). From things to processes: A theory of conceptual change for learning science concepts. *Learning and Instruction*, 4, 27-43.

Chinn, C. A. & Brewer, W. F. (1993). The role of anomalous data in knowledge acquisition: A theoretical framework and implications for science instruction. *Review of Educational Research*, 63, 1-49.

Collins, A., Brown, J. S. & Newman, S. E. (1989). Cognitive apprenticeship: Teaching the crafts of reading, writing, and mathematics. In L. B. Resnick (Hrsg.), *Knowing, Learning, and Instruction* (S. 453-494). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Coutinho, C. (2001). *Introduction aux situations aléatoires dès le collège: de la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri-géomètre-II*. [Unveröffentlichte Dissertation]. Grenoble: Université de Grenoble.

Cummins, J. (1984). *Bilingualism and Special Education*. Clevedon: Multilingual Matters.

D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 5 (1), 44-48.

David, F. N. (1970). Dicing and gaming (A note on the history of probability). In E. S. Pearson & M. G. Kendall (Hrsg.), *Studies in the History of Statistics and Probability* (S. 1-17). London: Griffin.

Di Sessa, A. A. (1988). Knowledge in pieces. In G. Forman & P. B. Pufall (Hrsg.), *Constructivism in the Computer Age* (S. 49-70). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Duit, R. (1999). Conceptual change approaches in science education. In W. Schnotz, S. Vosniadou & M. Carretero (Hrsg.), *New Perspectives on Conceptual Change* (S. 263-282). Amsterdam u. a.: Pergamon.

Duit, R. & Treagust, D. F. (2003). Conceptual change: A powerful framework for improving science teaching and learning. *International Journal of Science Education*, 25, 671-688.

Eichelsbacher, P. (2002). Mit Runs den Zufall besser verstehen. *Stochastik in der Schule*, 22 (1), 2-8.

Elkana, Y. (1977). The historical roots of modern physics. In C. Weiner (Hrsg.), *Italian Physical Society, Proceedings of the International School of Physics: History of Twentieth Century Physics, Course LVII* (S. 1-200). New York: Academic Press.

Engel, J. (2002). Activity-based statistics, computer simulation and formal mathematics. In B. Phillips (Hrsg.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*. [CD-ROM]. Cape Town: International Association for Statistical Education.

Engel, J. & Sedlmeier, P. (2005). On middle-school students' comprehension of randomness and chance variability in data. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37, 168-177.

Falk, R. (1979). Revision of probabilities and the time axis. In D. Tall (Hrsg.), *Proceedings of the Third International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (S. 64-66). Warwick, UK: University of Warwick.

Falk, R. (1982). Children's choice behaviour in probabilistic situations. In D. R. Grey, P. Holmes, V. Barnett & G. M. Constable (Hrsg.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics, Vol. 2* (S. 714-726). Sheffield, UK: University of Sheffield.

Feller, W. (1957). *An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol. 1*. New York: John Wiley & Sons.

Fischbein, E. (1975). *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach*. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E., Bărbat, I. & Mînzat, I. (1971). Primary and secondary intuitions in the introduction of probability. In E. Fischbein (Hrsg.), *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children* (Appendix I, S. 138-155). Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E. & Grossmann, A. (1997). Schemata and intuitions in combinatorial reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 34, 27-47.

Fischbein, E., Nello, M. S. & Marino, M. S. (1991). Factors affecting probabilistic judgements in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 523-549.

Fischbein, E., Pampu, I. & Mînzat, I. (1967). The child's intuition of probability. In E. Fischbein (Hrsg.), *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children* (Appendix II, S. 156-174). Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E. & Schnarch, D. (1996). Intuitions and schemata in probabilistic thinking. In L. Puig & A. Gutièrrez (Hrsg.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2* (S. 361-368). València: Universitat de València.

Fischbein, E. & Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 96-105.

Freudenthal, H. (1975). *Wahrscheinlichkeit und Statistik*. München: Oldenbourg.

Gaifman, H. (1988). A theory of higher ordered probabilities. In B. Skyrms & W. L. Harper (Hrsg.), *Causation, Chance, and Credence* (S. 191-219). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gigerenzer, G. (1987). Probabilistic thinking and the fight against subjectivity. In L. Krüger, G. Gigerenzer & M. S. Morgan (Hrsg.), *The Probabilistic Revolution, Vol. 2: Ideas in the Sciences* (S. 11-33). Cambridge, MA: MIT Press.

Gigerenzer, G. (2004). Die Evolution des statistischen Denkens. *Stochastik in der Schule*, 24 (2), 2-13.

Gigerenzer, G. & Goldstein, D. G. (1996). Reasoning the fast and frugal way: Models of bounded rationality. *Psychological Review*, 103, 650-669.

Gigerenzer, G. & Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats. *Psychological Review*, 102, 684-704.

Green, D. R. (1982). A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. In D. R. Grey, P. Holmes, V. Barnett & G. M. Constable (Hrsg.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics, Vol. 2* (S. 766-783). Sheffield, UK: University of Sheffield..

Green, D. R. (1990). *A Longitudinal Study of Pupils' Probability Concepts*. Loughborough: Loughborough University.

Greer, B. (2001). Understanding probabilistic thinking: The legacy of Efraim Fischbein. *Educational Studies in Mathematics*, 45, 15-33.

Hájek, A. (2007). Interpretations of probability. In E. N. Zalta (Hrsg.), *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. [Online-Enzyklopädie]. http://plato.stanford.edu/entries/probability-interpret/ [Zugriff am 21.06.2008].

Hasher, L. & Zacks, R. T. (1984). Automatic processing of fundamental information: The case of frequency of occurrence. *American Psychologist*, 39, 1372-1388.

Hawkins, A. & Kapadia, R. (1984). Children's conceptions of probability – a psychological and pedagogical review. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 349-377.

Henn, H.-W. (2002). *Einführung in die Stochastik*. [Skriptum zur Vorlesung im WS 2002/ 2003. Universität Dortmund].

Henry, M. (1997). Notion de modèle et modélisation dans l'enseignement. In Commission inter-IREM Statistique et Probabilités (Hrsg.), *Enseigner les probabilités au lycée* (S. 77-84). Reims: IREM de Reims.

Hertwig, R. & Gigerenzer, G. (1999). The "conjunction fallacy" revisited: How intelligent inferences look like reasoning error. *Journal of Behavioral Decision Making*, 12, 275-305.

Hewson, P. W. (1981). A conceptual change approach to learning science. *European Journal of Science Education*, 3, 383-396.

Hewson, P. W. & Hewson, M. G. A'B. (1984). The role of conceptual conflict in conceptual change and the design of science instruction. *Instructional Science*, 13, 1-13.

Hitchcock, C. (2001). Probability and chance: Philosophical aspects. In N. J. Smelser & P. B. Baltes (Hrsg.), *International Encyclopedia of the Social and Behavioral Sciences, Vol. 18* (S. 12089-12095). Oxford: Pergamon.

Howard, R. (1987). *Concepts and Schemata*. London: Cassell Educational.

Hutchinson, J. M. C. & Gigerenzer, G. (2005). Simple heuristics and rules of thumb: Where psychologists and behavioural biologists might meet. *Behavioural Processes*, 69, 97-124.

Inhelder, B. & Piaget, J. (1964). *The Early Growth of Logic in the Child*. London: Routledge & Kegan Paul.

Jeffrey, R. C. (1992). *Probability and the Art of Judgment*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Kahneman, D., Slovic, P. & Tversky, A. (1982). *Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Kahneman, D. & Tversky, A. (1972). Subjective probability: A judgement of representativeness. *Cognitive Psychology*, 3, 430-454.

Kahneman, D. & Tversky, A. (1973). On the psychology of prediction. *Psychological Review*, 80, 237-251.

Kattmann, U. (2005). Lernen mit anthropomorphen Vorstellungen? – Ergebnisse von Untersuchungen zur Didaktischen Rekonstruktion in der Biologie. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften*, 11, 165-174.

Klieme, E., Avenarius, H., Blum, W., Döbrich, P., Gruber, H., Prenzel, M., Reiss, K., Riquarts, K., Rost, J., Tenorth, H.-E. & Vollmer, H. J. (2003). Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards – eine Expertise. In BMBF (Hrsg.), *Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards*. http://www.bmbf.de [Zugriff am 21.06.2008].

KMK (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss – Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 4.12.2003*. München: Wolters Kluwer.

KMK (2005a). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss – Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004*. München: Wolters Kluwer.

KMK (2005b). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich – Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004*. München: Wolters Kluwer.

Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction*, 6, 59-98.

Konold, C. (1995). Issues in assessing conceptual understanding in probability and statistics. *Journal of Statistics Education*, 3 (1). [Online-Journal]. http://www.amstat.org/publications/jse/v3n1/konold.html [Zugriff am 21.06.2008].

Krauss, S. (2003). Wie man das Verständnis von Wahrscheinlichkeiten verbessern kann: Das „Häufigkeitskonzept". *Stochastik in der Schule*, 23 (1), 2-9.

Krüger, D. (2007). Die Conceptual Change-Theorie. In D. Krüger & H. Vogt (Hrsg.), *Theorien in der biologiedidaktischen Forschung* (S. 81-92). Berlin u. a.: Springer.

Krüger, D. & Vogt, H. (2007). *Theorien in der biologiedidaktischen Forschung*. Berlin u. a.: Springer.

Kuhn, T. S. (1970). *The Structure of Scientific Revolutions*. [2nd edition]. Chicago: University of Chicago Press.

Lakatos, I. (1970). Falsification and the methodology of scientific research programmes. In I. Lakatos & A. Musgrave (Hrsg.), *Criticism and the Growth of Knowledge* (S. 91-196). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Langer, E. (1975). The illusion of control. *Journal of Personality and Social Psychology*, 32, 311-328.

Lecoutre, M.-P. (1992). Cognitive models and problem spaces in “purely random” situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 557-568.

Martignon, L. & Wassner, C. (2002). Teaching decision making and statistical thinking with natural frequencies. In B. Phillips (Hrsg.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*. [CD-ROM]. Cape Town: International Association for Statistical Education.

Martignon, L. & Wassner, C. (2005). Schulung frühen stochastischen Denkens von Kindern. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 8, 202-222.

Mason, L. (2001). Responses to anomalous data on controversial topics and theory change. *Learning and Instruction*, 11, 453-484.

Mellers, B., Hertwig, R. & Kahneman, D. (2001). Do frequency representations eliminate conjunction effects? An exercise in adversarial collaboration. *Psychological Science*, 12, 269-275.

Merenluoto, K. & Lehtinen, E. (2004). Number concept and conceptual change: Towards a systemic model of the processes of change. *Learning and Instruction*, 14, 519-534.

Myers, J. L. (1982). The role of explanation in teaching elementary probability. In D. R. Grey, P. Holmes, V. Barnett & G. M. Constable (Hrsg.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics, Vol. 2* (S. 802-812). Sheffield, UK: University of Sheffield.

NCTM (2004). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. http://www.nctm.org/standards/ [Zugriff am 23.05.2008].

Nothbaum, N. & Scholz, R. W. (1995). Wahrscheinlichkeiten im kommunikativen Diskurs – eine Studie im Spannungsfeld von kognitiver Psychologie, mathematischer Konzeptentwicklung und Mathematikdidaktik. In H. G. Steiner & H.-J. Vollrath (Hrsg.), *Neue problem- und praxisbezogene Forschungsansätze*. *IDM-Reihe Bielefeld, Vol. 20* (S. 97-106). Köln: Aulis-Verlag Deubner.

Piaget, J. (1950). *The Psychology of Intelligence*. London: Routledge & Kegan Paul.

Piaget, J. (1976). Le possible, l’impossible et le nécessaire. *Archives de Psychologie*, 44, 281-299.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1951). *La genèse de l’idée de hazard chez l’enfant*. Paris: Presses Universitaires de France.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1975). *The Origin of the Idea of Chance in Children*. London: Routledge & Kegan Paul.

Piattelli-Palmarini, M. (1994). *Inevitable Illusions: How Mistakes of Reason Rule our Minds*. New York: Wiley.

Pintrich, P. R. (1999). Motivational beliefs as resources for and constraints on conceptual change. In W. Schnotz, S. Vosniadou & M. Carretero (Hrsg.), *New Perspectives on Conceptual Change* (S. 33-50). Amsterdam u. a.: Pergamon.

Pintrich, P. R., Marx, R. W. & Boyle, R. A. (1993). Beyond cold conceptual change: The role of motivational beliefs and classroom contextual factors in the process of conceptual change. *Review of Educational Research*, 63, 167-199.

Posner, G. J., Strike, K. A., Hewson, P. W. & Gertzog, W. A. (1982). Accomodation of a scientific conception: Toward a theory of conceptual change. *Science Education*, 66, 211-227.

Rasfeld, P. (2004). Verbessert der Stochastikunterricht intuitives stochastisches Denken? Ergebnisse aus einer empirischen Studie. *Journal für Didaktik der Mathematik*, 25, 33-61.

Redmayne, M. (1998). The DNA database: Civil liberty and evidentiary issues. *Criminal Law Review*, 437-454.

Reiss, K. & Winkelmann, H. (2008). Step by step. Ein Kompetenzstufenmodell für das Fach Mathematik. *Grundschule*, 40 (10), 34-37.

Rowlands, S., Graham, T., Berry, J. & McWilliam, P. (2007). Conceptual change through the lens of Newtonian mechanics. *Science & Education*, 16, 21-42.

Sander, E., Jelemenská, P. & Kattmann, U. (2006). Toward a better understanding of ecology. *Journal of Biological Education*, 40, 119-123.

Schnotz, W. (2006). Conceptual change. In D. Rost (Hrsg.), *Handwörterbuch Pädagogische Psychologie* (S. 77-82). Weinheim u. a.: BeltzPVU.

Schnotz, W. & Preuß, A. (1999). Task-dependent construction of mental models as a basis for conceptual change. In W. Schnotz, S. Vosniadou & M. Carretero (Hrsg.), *New Perspectives on Conceptual Change* (S. 193-222). Amsterdam u. a.: Pergamon.

Schoenfeld, A. H. (2002). Research methods in (mathematics) education. In L. English (Hrsg.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (S. 435-487). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Scholz, R. W. (1981). *Stochastische Problemaufgaben – Analysen aus didaktischer und psychologischer Perspektive*. *IDM Materialien und Studien*. Bielefeld: Universität Bielefeld.

Scholz, R. W. (1986). Zur Konzeptualisierung kognitiver Strategien beim stochastischen Denken: Urteilsheuristiken und Denkmodi. Theoretische Anmerkungen und Experimentelle Befunde. In H. G. Steiner (Hrsg.), *Grundfragen der Entwicklung mathematischer Fähigkeiten*. *IDM-Reihe Bielefeld, Vol. 13* (S. 69-86). Köln: Aulis-Verlag Deubner.

Scholz, R. W. (1987). *Cognitive Strategies in Stochastic Thinking*. Dordrecht: Reidel.

Scholz, R. W. (1988). Urteile und Entscheidungen – mathematikdidaktische und psychologische Grundlagen. In B. Winkelmann (Hrsg.), *Wissenschaftliches Kolloquium Hans-Georg Steiner zu Ehren* (S. 41-70). Bielefeld: Universität Bielefeld.

Scholz, R. W. (1991). Psychological research in probabilistic understanding. In R. Kapadia & M. Borovcnik (Hrsg.), *Chance Encounters – Probability in Education* (S. 213-254). Dordrecht: Kluwer.

Scholz, R. W. & Köntopp, M. B. (1990). Elemente der heuristischen Struktur bei Wahrscheinlichkeitsurteilen. In K. Haussmann & M. Reiss (Hrsg.), *Mathematische Lehr-, Lern-, Denk-Prozesse* (S. 107-130). Göttingen: Hogrefe.

Schupp, H. (2004). Allgemeinbildender Stochastikunterricht. *Stochastik in der Schule*, 24 (3), 4-13.

Sedlmeier, P. (1997). BasicBayes: A tutor system for simple Bayesian inference. *Behavior Research Methods, Instruments, and Computers*, 29, 328-336.

Sedlmeier, P. (1998). The distribution matters: Two types of sample-size tasks. *Journal of Behavioral Decision Making*, 11, 281-301.

Sedlmeier, P. (1999). *Improving Statistical Reasoning: Theoretical Models and Practical Implications*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Sedlmeier, P. & Gigerenzer, G. (1997). Intuitions about sample size: The empirical law of large numbers. *Journal of Behavioral Decision Making*, 10, 33-51.

Sedlmeier, P. & Gigerenzer, G. (2001). Teaching Bayesian reasoning in less than two hours. *Journal of Experimental Psychology: General*, 130, 380-400.

Shayer, M., Kuchemann, D. E. & Wylam, H. (1976). The distribution of Piagetian stages of thinking in British middle and secondary school children. *British Journal of Educational Psychology*, 46, 164-173.

Siegel, S. & Andrews, J. (1962). Magnitude of reinforcement and choice behavior in children. *Journal of Experimental Psychology: General*, 63, 337-341.

Siegler, R. S. (1986). *Children's Thinking*. Englewood Cliffs: Prentice Hall.

Sinatra, G. M. & Pintrich, P. R. (2003). *Intentional Conceptual Change*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Streib, H. (1994). Magical feeling and thinking in childhood and adolescence: A developmental perspective. *British Journal of Religious Education*, 16, 70-81.

Strike, K. A. & Posner, G. J. (1982). Conceptual change and science teaching. *European Journal of Science Education*, 4, 231-240.

Strike, K. A. & Posner, G. J. (1992). A revisionist theory of conceptual change. In R. Duschl & R. Hamilton (Hrsg.), *Philosophy of Science, Cognitive Psychology, and Educational Theory and Practice* (S. 147-176). Albany, NY: SUNY.

Tietze, U., Klika, M. & Wolpers, H. (2002). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Band 3: Didaktik der Stochastik*. Wiesbaden: Vieweg.

Tirosh, D. & Tsamir, P. (2004). What can mathematics education gain from the conceptual change approach? And what can the conceptual change approach gain from its application to mathematics education? *Learning and Instruction*, 14, 535-540.

Toulmin, S. (1972). *Human Understanding: An Inquiry into the Aims of Science*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Tversky, A. & Kahneman, D. (1982a). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. In D. Kahneman, P. Slovic & A. Tversky (Hrsg.), *Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases* (S. 3-20). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Tversky, A. & Kahneman, D. (1982b). Judgments of and by representativeness. In D. Kahneman, P. Slovic & A. Tversky (Hrsg.), *Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases* (S. 84-98). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Tversky, A. & Kahneman, D. (1982c). Causal schemas in judgments under uncertainty. In D. Kahneman, P. Slovic & A. Tversky (Hrsg.), *Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases* (S. 117-128). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Tversky, A. & Kahneman, D. (1983). Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment. *Psychological Review*, 90, 293-315.

Tynjälä, P., Merenluoto, K. & Murtonen, M. (2002). What has been meant by "concept" and "change" in conceptual change studies? A framework for a meta-analytical study. In S. Lehti & K. Merenluoto (Hrsg.), *Proceedings of the Third European Symposium on Conceptual Change: A Process Approach to Conceptual Change* (S. 28-45). Turku: University of Turku.

Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2002). Conceptual change in mathematics, from the set of natural to the set of rational numbers. In S. Lehti & K. Merenluoto (Hrsg.), *Proceedings of the Third European Symposium on Conceptual Change: A Process Approach to Conceptual Change* (S. 201-204). Turku: University of Turku.

Van Dooren, W., de Bock, D., Hessels, A., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2004). Remedying secondary school students' illusion of linearity: A teaching experiment aiming at conceptual change. *Learning and Instruction*, 14, 485-501.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: What and why? In G. Harel & J. Confrey (Hrsg.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (S. 41-59). Albany, NY: State University of New York Press.

Viennot, L. (1979). Spontaneous reasoning in elementary dynamics. *European Journal of Science Education*, 1, 205-221.

Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in "negativity". *Learning and Instruction*, 14, 469-484.

Vosniadou, S. (1994). Capturing and modeling the process of conceptual change. *Learning and Instruction*, 4, 45-69.

Vosniadou, S. (1999). Conceptual change research: State of the art and future directions. In W. Schnotz, S. Vosniadou & M. Carretero (Hrsg.), *New Perspectives on Conceptual Change* (S. 3-14). Amsterdam u. a.: Pergamon.

Vosniadou, S. & Brewer, W. F. (1992). Mental models of the earth: A study of conceptual change in childhood. *Cognitive Psychology*, 24, 535-585.

Vosniadou, S., Ioannides, C., Dimitrakopoulou, A. & Papademetriou, E. (2001). Designing learning environments to promote conceptual change in science. *Learning and Instruction*, 11, 381-419.

Vosniadou, S. & Verschaffel, L. (2004). Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching. *Learning and Instruction*, 14, 445-451.

Vygotsky, L. S. (1962). *Thought and Language*. Cambridge, MA: MIT Press.

Vygotsky, L. S. (1964). *Denken und Sprechen*. Stuttgart: Fischer.

Vygotsky, L. S. (1987). *The Collected Works of L. S. Vygotsky, Vol. 1: Problems of General Psychology*. New York: Plenum Press.

Wassner, C., Martignon, L. & Sedlmeier, P. (2002). Entscheidungsfindung unter Unsicherheit als fächerübergreifende Kompetenz. In M. Prenzel & J. Doll (Hrsg.), *45. Beiheft zur Zeitschrift für Pädagogik* (S. 35-50). Weinheim: Beltz.

Weaver, W. (1963). *Lady Luck: The Theory of Probability*. Garden City, NY: Doubleday and Company.

Weinert, F. E. (2001). Vergleichende Leistungsmessung in Schulen – eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In F. E. Weinert (Hrsg.), *Leistungsmessung in Schulen* (S. 17-31). Weinheim u. a.: Beltz.

White, R. T. (1994). Commentary: Conceptual and conceptional change. *Learning and Instruction*, 4, 117-121.

Wiser, M. & Amin, T. (2001). Is heat hot? Inducing conceptual change by integrating everyday and scientific perspectives on thermal phenomena. *Learning and Instruction*, 11, 331-355.

Wollring, B. (1994a). Animistische Vorstellungen von Vor- und Grundschulkindern in stochastischen Situationen. *Journal für Didaktik der Mathematik*, 15, 3-34.

Wollring, B. (1994b). Zur situativen Bedingtheit des Wahrscheinlichkeitsverständnisses. In K. P. Müller (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 1994* (S. 454-457). Hildesheim: Franzbecker.

Wollring, B. (1995). *Qualitative empirische Untersuchungen zum Wahrscheinlichkeitsverständnis bei Vor- und Grundschulkindern*. Münster: Habilitationsschrift im Fachbereich Mathematik der Universität Münster.

Wollring, B. (2007). Den Zufall festhalten – Spielräume und Dokumente bei Zufallsexperimenten für die Grundschule. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007* (S. 472-475). Hildesheim: Franzbecker.

Zembylas, M. (2005). Three perspectives on linking the cognitive and the emotional in science learning: Conceptual change, socio-constructivism and poststructuralism. *Studies in Science Education*, 41, 91-116.

Zhu, L. & Gigerenzer, G. (2006). Children can solve Bayesian problems: The role of representation in mental computation. *Cognition*, 98, 287-308.

Anhang

Codierter Name	Konzept	Entwicklungsschritt I	Entwicklungsschritt II	Entwicklungsschritt III
Schüler 1	1	○	●	○
	2	●	○	○
	3	●	●	○
Schüler 2	1	○	●	○
	2	●	●	○
	3	○	●	○
Schüler 3	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	○	○
Schüler 4	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	○	○
Schüler 5	1	○	●	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○
Schüler 6	1	●	○	○
	2	●	○	○
	3	●	●	○
Schüler 7	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	●	●
Schüler 8	1	●	○	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○
Schüler 9	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	○	○
Schüler 10	1	●	○	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○
Schüler 11	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○
Schüler 12	1	○	○	○
	2	○	○	○
	3	●	○	●
Schüler 13	1	○	●	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○
Schüler 14	1	●	●	●
	2	●	●	○
	3	●	○	○
Schüler 15	1	●	●	○
	2	●	○	○
	3	●	●	●
Schüler 16	1	●	○	●
	2	●	●	○
	3	●	●	●
Schüler 17	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	○	●	●
Schüler 18	1	○	○	●
	2	○	○	○
	3	●	●	○
Schüler 19	1	●	○	○
	2	●	○	○
	3	●	●	○
Schüler 20	1	●	○	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○
Schüler 21	1	○	●	○
	2	●	○	○
	3	●	●	○
Schüler 22	1	○	○	○
	2	●	○	○
	3	●	●	○
Schüler 23	1	●	○	○
	2	●	●	○
	3	●	○	○
Schüler 24	1	○	●	●
	2	●	○	○
	3	●	●	●
Schüler 25	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○
Schüler 26	1	●	○	○
	2	●	●	○
	3	●	○	●
Schüler 27	1	●	○	○
	2	●	○	○
	3	●	○	○
Schüler 28	1	●	○	○
	2	●	○	○
	3	●	○	○
Schüler 29	1	●	○	○
	2	○	○	○
	3	○	●	●
Schüler 30	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 31	1	○	●	○
	2	●	●	○
	3	○	○	○

Schüler 32	1	●	○	●
	2	●	●	●
	3	●	●	●

Schüler 33	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	○	○	○

Schüler 34	1	○	○	●
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 35	1	○	●	●
	2	○	●	●
	3	●	●	●

Schüler 36	1	●	○	○
	2	●	○	○
	3	●	○	○

Schüler 37	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 38	1	●	●	○
	2	●	○	●
	3	●	●	○

Schüler 39	1	●	○	●
	2	○	●	○
	3	●	●	○

Schüler 40	1	●	○	●
	2	○	●	○
	3	●	○	●

Schüler 41	1	●	○	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 42	1	●	○	●
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 43	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	○	○	○

Schüler 44	1	●	○	○
	2	●	●	○
	3	●	○	○

Schüler 45	1	●	●	●
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 46	1	●	●	○
	2	●	○	○
	3	○	●	○

Schüler 47	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	○	○

Schüler 48	1	●	●	○
	2	●	○	●
	3	●	○	○

Schüler 49	1	●	○	○
	2	●	●	○
	3	○	●	○

Schüler 50	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	○	●	○

Schüler 51	1	●	●	○
	2	●	○	○
	3	○	○	○

Schüler 52	1	●	●	○
	2	●	○	○
	3	●	○	○

Schüler 53	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 54	1	○	●	●
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 55	1	○	●	●
	2	○	○	○
	3	●	○	○

Schüler 56	1	●	○	●
	2	○	●	○
	3	○	○	○

Schüler 57	1	○	●	●
	2	○	●	○
	3	●	●	●

Schüler 58	1	●	●	●
	2	●	●	○
	3	●	●	●

Schüler 59	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	○	○	○

Schüler 60	1	●	●	●
	2	○	●	○
	3	●	●	○

Schüler 61	1	●	○	●
	2	●	●	○
	3	●	●	●

Schüler 62	1	●	○	○
	2	●	○	○
	3	●	○	●

Schüler 63	1	●	○	●
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 64	1	●	●	●
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 65	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	○	○

Schüler 66	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 67	1	○	●	○
	2	●	○	○
	3	●	○	○

Schüler 68	1	●	●	●
	2	●	●	○
	3	●	●	●

Schüler 69	1	○	●	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 70	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	●

Schüler 71	1	●	○	○
	2	●	●	●
	3	○	●	○

Schüler 72	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 73	1	●	●	●
	2	●	○	○
	3	●	○	○

Schüler 74	1	●	○	●
	2	●	●	●
	3	●	●	●

Schüler 75	1	●	○	●
	2	●	●	●
	3	●	○	○

Schüler 76	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	○	○	○

Schüler 77	1	●	●	○
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 78	1	○	○	●
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 79	1	●	○	○
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 80	1	●	○	○
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 81	1	●	●	●
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 82	1	●	●	○
	2	●	○	○
	3	●	●	●

Schüler 83	1	●	●	●
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 84	1	●	●	●
	2	●	●	○
	3	●	●	●

Schüler 85	1	●	○	○
	2	●	●	○
	3	○	●	○

Schüler 86	1	●	●	○
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 87	1	●	○	○
	2	●	○	●
	3	●	●	○

Schüler 88	1	○	○	●
	2	○	●	○
	3	○	○	○

Schüler 89	1	●	●	○
	2	○	●	●
	3	●	●	○

Schüler 90	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 91	1	●	●	○
	2	○	●	●
	3	●	○	○

Schüler 92	1	○	○	○
	2	●	○	○
	3	●	○	●

Schüler 93	1	●	●	○
	2	○	○	○
	3	●	●	●

Schüler 94	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	●	●

Schüler 95	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 96	1	○	●	○
	2	○	●	●
	3	●	●	○

Schüler 97	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	○	○

Schüler 98	1	●	○	○
	2	●	○	○
	3	○	●	○

Schüler 99	1	●	○	○
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 100	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 101	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 102	1	●	●	○
	2	●	○	○
	3	●	○	○

Schüler 103	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	●	●

Schüler 104	1	●	●	●
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 105	1	●	●	●
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 106	1	○	○	●
	2	○	○	○
	3	○	●	●

Schüler 107	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 108	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	○	●	○

Schüler 109	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 110	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 111	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	○	○	○

Schüler 112	1	○	○	●
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 113	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 114	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 115	1	●	○	●
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 116	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 117	1	●	●	○
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 118	1	●	○	●
	2	○	●	○
	3	●	○	○

Schüler 119	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 120	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 121	1	●	○	●
	2	○	●	●
	3	○	●	●

Schüler 122	1	●	○	○
	2	●	●	●
	3	●	●	●

Schüler 123	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	○	○

Schüler 124	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	○	●

Schüler 125	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	○	○

Schüler 126	1	●	●	○
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 127	1	●	●	●
	2	○	●	○
	3	○	○	○

Schüler 128	1	○	○	●
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 129	1	●	●	○
	2	●	○	○
	3	○	○	○

Schüler 130	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	○	○

Schüler 131	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 132	1	●	○	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 133	1	●	●	●
	2	●	●	○
	3	●	●	●

Schüler 134	1	●	●	○
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 135	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 136	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	○	○

Schüler 137	1	●	○	○
	2	○	●	○
	3	○	○	○

Schüler 138	1	●	○	●
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 139	1	●	○	○
	2	●	●	○
	3	●	○	○

Schüler 140	1	●	○	○
	2	●	○	○
	3	●	○	○

Schüler 141	1	●	○	○
	2	○	●	●
	3	●	●	○

Schüler 142	1	●	○	●
	2	●	●	●
	3	●	●	●

Schüler 143	1	●	●	○
	2	●	○	●
	3	●	●	○

Schüler 144	1	○	○	○
	2	○	●	●
	3	●	●	○

Schüler 145	1	●	●	●
	2	●	○	○
	3	●	●	●

Schüler 146	1	●	○	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 147	1	●	○	○
	2	○	○	○
	3	○	●	○

Schüler 148	1	●	○	○
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 149	1	●	●	●
	2	●	○	○
	3	●	●	●

Schüler 150	1	●	●	●
	2	●	●	○
	3	●	●	●

Schüler 151	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 152	1	○	●	○
	2	○	●	○
	3	●	●	●

Schüler 153	1	●	○	○
	2	●	○	○
	3	●	○	●

Schüler 154	1	●	●	●
	2	○	○	○
	3	●	○	○

Schüler 155	1	●	○	○
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 156	1	●	○	○
	2	●	○	○
	3	●	○	○

Schüler 157	1	●	○	○
	2	●	○	○
	3	●	○	○

Schüler 158	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 159	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	●	●

Schüler 160	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 161	1	●	●	●
	2	●	●	○
	3	●	●	●

Schüler 162	1	●	○	○
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 163	1	●	○	●
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 164	1	○	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	●

Schüler 165	1	●	●	○
	2	●	○	○
	3	●	○	○

Schüler 166	1	●	○	●
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 167	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 168	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	●	●

Schüler 169	1	●	●	●
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 170	1	●	●	●
	2	●	●	○
	3	●	●	●

Schüler 171	1	●	●	○
	2	●	○	○
	3	○	○	○

Schüler 172	1	●	●	●
	2	●	●	○
	3	○	●	○

Schüler 173	1	●	○	●
	2	●	●	○
	3	●	●	●

Schüler 174	1	●	○	○
	2	●	●	●
	3	●	●	●

Schüler 175	1	●	●	●
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 176	1	●	●	●
	2	●	○	●
	3	●	○	○

Schüler 177	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	●

Schüler 178	1	●	●	○
	2	○	●	●
	3	●	●	○

Schüler 179	1	○	●	○
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 180	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 181	1	●	●	●
	2	○	○	○
	3	●	●	●

Schüler 182	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	●	●

Schüler 183	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 184	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	○	○	○

Schüler 185	1	●	●	●
	2	●	○	●
	3	●	●	○

Schüler 186	1	●	○	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 187	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	○	●	○

Schüler 188	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	○	○	○

Schüler 189	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	○	○	○

Schüler 190	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	●

Schüler 191	1	●	○	○
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 192	1	●	●	○
	2	○	○	○
	3	●	●	○

Schüler 193	1	●	●	●
	2	●	○	●
	3	●	●	●

Schüler 194	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	○	○	●

Schüler 195	1	●	●	●
	2	●	●	○
	3	●	●	●

Schüler 196	1	●	●	○
	2	●	○	○
	3	○	●	○

Schüler 197	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	●

Schüler 198	1	●	○	○
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 199	1	●	○	○
	2	●	○	○
	3	●	●	●

Schüler 200	1	●	○	●
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 201	1	●	●	●
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 202	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	○	○

Schüler 203	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	○	○

Schüler 204	1	●	○	●
	2	●	●	○
	3	○	○	○

Schüler 205	1	○	○	○
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 206	1	●	○	○
	2	●	●	○
	3	○	○	●

Schüler 207	1	●	○	●
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 208	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 209	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	○	○	○

Schüler 210	1	●	○	○
	2	●	●	○
	3	●	●	●

Schüler 211	1	○	●	●
	2	●	●	○
	3	●	●	●

Schüler 212	1	●	●	●
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 213	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	○	○

Schüler 214	1	○	○	○
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 215	1	○	○	○
	2	○	○	○
	3	●	●	○

Schüler 216	1	●	●	●
	2	●	●	○
	3	○	●	○

Schüler 217	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 218	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	○	○

Schüler 219	1	●	○	●
	2	●	●	○
	3	●	●	●

Schüler 220	1	●	●	○
	2	●	○	●
	3	○	○	○

Schüler 221	1	○	○	○
	2	○	○	○
	3	●	●	○

Schüler 222	1	●	●	○
	2	●	○	○
	3	○	○	○

Schüler 223	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 224	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	●

Schüler 225	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	●	●

Schüler 226	1	○	○	●
	2	○	○	○
	3	●	●	○

Schüler 227	1	●	●	○
	2	●	○	●
	3	●	●	●

Schüler 228	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	○	●	○

Schüler 229	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	○	●	○

Schüler 230	1	○	●	○
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 231	1	○	●	●
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 232	1	●	●	○
	2	●	○	○
	3	●	●	●

Schüler 233	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	●	●

Schüler 234	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 235	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	○	○	○

Schüler 236	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	●

Schüler 237	1	○	●	●
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 238	1	●	○	●
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 239	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	●

Schüler 240	1	●	○	○
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 241	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	○	○

Schüler 242	1	○	○	○
	2	○	●	○
	3	●	○	○

Schüler 243	1	●	○	○
	2	○	○	○
	3	○	●	○

Schüler 244	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	○	○	○

Schüler 245	1	●	○	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 246	1	●	○	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 247	1	●	○	●
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 248	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	○	●	●

Schüler 249	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 250	1	●	○	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 251	1	●	○	●
	2	●	●	○
	3	●	○	○

Schüler 252	1	●	○	●
	2	●	●	●
	3	●	○	○

Schüler 253	1	○	●	●
	2	●	○	○
	3	●	○	○

Schüler 254	1	○	○	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 255	1	●	○	○
	2	●	●	○
	3	○	●	●

Schüler 256	1	●	●	○
	2	○	●	○
	3	●	●	○

Schüler 257	1	●	●	○
	2	●	○	●
	3	○	○	○

Schüler 258	1	○	●	●
	2	○	●	○
	3	○	●	○

Schüler 259	1	●	●	●
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 260	1	●	●	○
	2	●	○	○
	3	○	●	○

Schüler 261	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	○	○	○

Schüler 262	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 263	1	●	○	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 264	1	●	○	●
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 265	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 266	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	●

Schüler 267	1	●	●	●
	2	●	○	●
	3	●	●	●

Schüler 268	1	●	●	○
	2	●	○	○
	3	●	●	●

Schüler 269	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	●

Schüler 270	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	●	●

Schüler 271	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 272	1	●	●	○
	2	●	○	○
	3	●	○	○

Schüler 273	1	●	●	●
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 274	1	●	●	●
	2	●	○	○
	3	○	○	○

Schüler 275	1	●	○	●
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 276	1	●	○	○
	2	●	●	●
	3	●	○	○

Schüler 277	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 278	1	●	●	●
	2	●	●	○
	3	●	○	●

Schüler 279	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	○	○

Schüler 280	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	○	○

Schüler 281	1	●	●	○
	2	●	○	○
	3	●	○	○

Schüler 282	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 283	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 284	1	●	●	●
	2	●	●	○
	3	●	●	●

Schüler 285	1	○	○	○
	2	●	●	○
	3	●	●	●

Schüler 286	1	○	●	○
	2	○	●	●
	3	●	●	○

Schüler 287	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	○	○

Schüler 288	1	●	○	○
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 289	1	○	○	○
	2	●	○	○
	3	●	●	●

Schüler 290	1	○	●	●
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 291	1	●	○	○
	2	●	●	○
	3	●	●	●

Schüler 292	1	●	○	○
	2	●	○	○
	3	●	○	●

Schüler 293	1	○	○	○
	2	●	○	○
	3	●	○	●

Schüler 294	1	○	○	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 295	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	●	●

Schüler 296	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	●	●

Schüler 297	1	●	●	○
	2	●	○	○
	3	●	●	●

Schüler 298	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 299	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	○	●	●

Schüler 300	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	●	●

Schüler 301	1	●	○	○
	2	●	●	○
	3	●	○	●

Schüler 302	1	●	●	●
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 303	1	●	○	●
	2	●	●	○
	3	●	●	●

Schüler 304	1	●	○	○
	2	●	●	○
	3	●	○	○

Schüler 305	1	○	○	●
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 306	1	○	○	●
	2	○	●	○
	3	●	○	●

Schüler 307	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 308	1	●	○	●
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 309	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 310	1	●	●	●
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 311	1	●	●	●
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 312	1	●	○	○
	2	●	○	○
	3	●	○	●

Schüler 313	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 314	1	○	○	○
	2	○	●	○
	3	●	○	○

Schüler 315	1	○	●	○
	2	●	●	○
	3	●	●	●

Schüler 316	1	●	○	●
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 317	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	○	○	○

Schüler 318	1	●	○	●
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 319	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 320	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	○	○	○

Schüler 321	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	○	○

Schüler 322	1	●	○	●
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 323	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 324	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	○	○	○

Schüler 325	1	●	○	○
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 326	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 327	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	○	○

Schüler 328	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 329	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	●	●

Schüler 330	1	●	●	●
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 331	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	○	○	○

Schüler 332	1	○	○	○
	2	○	●	○
	3	○	○	○

Schüler 333	1	○	●	●
	2	●	○	○
	3	●	●	●

Schüler 334	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	○	●	○

Schüler 335	1	●	●	●
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 336	1	●	●	●
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 337	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 338	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 339	1	●	●	●
	2	●	●	○
	3	○	●	○

Schüler 340	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 341	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	●

Schüler 342	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	●

Schüler 343	1	●	●	●
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 344	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	○	●	●

Schüler 345	1	●	●	○
	2	●	○	○
	3	●	●	●

Schüler 346	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 347	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 348	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	○	○	○

Schüler 349	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	○	○	○

Schüler 350	1	●	○	○
	2	●	●	○
	3	○	●	○

Schüler 351	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	○	○	○
Schüler 352	1	○	○	○
	2	●	●	○
	3	○	●	○
Schüler 353	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	●
Schüler 354	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	○
Schüler 355	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○
Schüler 356	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	●	○
Schüler 357	1	●	○	○
	2	●	○	○
	3	●	●	○
Schüler 358	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	●	○
Schüler 359	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	●	○
Schüler 360	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	●	●
Schüler 361	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○
Schüler 362	1	●	○	○
	2	●	●	●
	3	○	●	○
Schüler 363	1	○	●	●
	2	○	●	○
	3	●	○	○
Schüler 364	1	○	●	●
	2	●	●	○
	3	●	○	○
Schüler 365	1	●	○	●
	2	●	○	○
	3	●	●	○
Schüler 366	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	○	○
Schüler 367	1	●	●	●
	2	●	○	○
	3	●	●	●
Schüler 368	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	●
Schüler 369	1	●	●	●
	2	●	●	○
	3	●	●	●
Schüler 370	1	●	●	●
	2	●	○	○
	3	●	●	○
Schüler 371	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	○
Schüler 372	1	○	●	●
	2	●	○	○
	3	●	●	○
Schüler 373	1	○	○	●
	2	●	●	○
	3	●	●	○
Schüler 374	1	●	○	●
	2	○	●	○
	3	●	●	○
Schüler 375	1	●	○	●
	2	●	●	○
	3	●	○	○
Schüler 376	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	●	○
Schüler 377	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	○	●	○
Schüler 378	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	●	○
Schüler 379	1	●	●	●
	2	●	●	○
	3	●	●	○
Schüler 380	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	○	○
Schüler 381	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	●	○
Schüler 382	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	○	○

Schüler 383	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	●	●

Schüler 384	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	●

Schüler 385	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	○	○

Schüler 386	1	●	○	○
	2	●	●	○
	3	●	●	●

Schüler 387	1	○	○	●
	2	●	○	●
	3	●	●	○

Schüler 388	1	●	●	●
	2	○	●	○
	3	●	●	●

Schüler 389	1	●	○	●
	2	●	●	○
	3	○	●	○

Schüler 390	1	○	○	●
	2	●	○	○
	3	●	○	○

Schüler 391	1	○	○	●
	2	○	○	○
	3	●	○	○

Schüler 392	1	●	○	○
	2	○	○	○
	3	●	○	○

Schüler 393	1	●	○	●
	2	○	●	○
	3	●	●	○

Schüler 394	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 395	1	●	○	○
	2	●	○	●
	3	●	●	○

Schüler 396	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 397	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	○	○

Schüler 398	1	○	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 399	1	●	○	○
	2	●	●	○
	3	●	●	●

Schüler 400	1	●	●	○
	2	●	○	○
	3	●	●	●

Schüler 401	1	○	●	○
	2	●	○	○
	3	●	●	●

Schüler 402	1	○	●	○
	2	○	●	●
	3	●	●	○

Schüler 403	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	●

Schüler 404	1	●	○	●
	2	○	○	○
	3	●	●	●

Schüler 405	1	●	○	○
	2	●	○	○
	3	●	●	●

Schüler 406	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 407	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	○	○

Schüler 408	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	○	●	○

Schüler 409	1	●	●	●
	2	●	○	●
	3	●	●	●

Schüler 410	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 411	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 412	1	○	●	○
	2	○	●	○
	3	●	○	●

Schüler 413	1	○	○	○
	2	○	●	○
	3	●	○	●

Schüler 414	1	●	○	●
	2	○	○	○
	3	●	●	○

Schüler 415	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 416	1	○	○	●
	2	○	●	○
	3	●	●	●

Schüler 417	1	●	○	●
	2	○	●	●
	3	●	●	○

Schüler 418	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	○	●	○

Schüler 419	1	●	●	○
	2	○	●	●
	3	●	●	●

Schüler 420	1	●	●	○
	2	○	●	○
	3	●	●	○

Schüler 421	1	●	●	●
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 422	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 423	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 424	1	●	●	○
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 425	1	○	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 426	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	●

Schüler 427	1	○	○	○
	2	●	●	○
	3	●	○	○

Schüler 428	1	●	●	●
	2	●	○	○
	3	●	●	●

Schüler 429	1	○	○	○
	2	●	●	○
	3	●	○	●

Schüler 430	1	○	●	●
	2	○	○	○
	3	●	●	○

Schüler 431	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	○	●	○

Schüler 432	1	○	○	○
	2	○	○	○
	3	●	○	○

Schüler 433	1	○	○	○
	2	●	●	○
	3	●	●	●

Schüler 434	1	●	○	○
	2	●	○	○
	3	●	○	●

Schüler 435	1	○	○	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 436	1	●	●	●
	2	●	●	○
	3	●	●	●

Schüler 437	1	●	●	●
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 438	1	●	●	●
	2	●	●	○
	3	○	●	○

Schüler 439	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	○	●	○

Schüler 440	1	○	○	○
	2	●	○	○
	3	●	○	○

Schüler 441	1	●	●	○
	2	●	○	●
	3	●	●	●

Schüler 442	1	●	○	○
	2	●	○	○
	3	○	●	○

Schüler 443	1	●	○	○
	2	●	○	○
	3	●	○	○

Schüler 444	1	●	●	●
	2	●	○	○
	3	●	○	○

Schüler 445	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 446	1	●	●	○
	2	●	○	●
	3	●	●	●

Schüler 447	1	●	○	●
	2	●	○	○
	3	●	○	○

Schüler 448	1	●	●	●
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 449	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 450	1	●	●	○
	2	○	●	○
	3	●	●	●

Schüler 451	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	●	●

Schüler 452	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 453	1	○	○	●
	2	●	●	○
	3	●	●	●

Schüler 454	1	○	○	○
	2	○	●	○
	3	●	○	○

Schüler 455	1	●	●	●
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 456	1	○	○	○
	2	●	●	○
	3	●	●	●

Schüler 457	1	○	○	●
	2	○	●	○
	3	●	●	●

Schüler 458	1	●	○	●
	2	●	●	●
	3	●	●	●

Schüler 459	1	○	○	○
	2	●	○	○
	3	●	●	●

Schüler 460	1	○	○	○
	2	○	○	○
	3	○	○	●

Schüler 461	1	●	●	●
	2	●	○	○
	3	●	○	○

Schüler 462	1	○	●	●
	2	○	○	○
	3	●	●	○

Schüler 463	1	●	○	○
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 464	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 465	1	●	●	●
	2	○	●	●
	3	○	●	○

Schüler 466	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	●

Schüler 467	1	●	●	○
	2	●	○	○
	3	●	●	●

Schüler 468	1	●	○	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 469	1	○	○	○
	2	○	●	○
	3	●	●	●

Schüler 470	1	●	●	●
	2	○	○	○
	3	●	●	○

Schüler 471	1	●	○	○
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 472	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 473	1	○	○	○
	2	●	○	●
	3	●	○	○

Schüler 474	1	○	○	●
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 475	1	●	○	●
	2	●	○	○
	3	●	●	●

Schüler 476	1	○	○	○
	2	●	○	○
	3	●	○	○

Schüler 477	1	●	○	○
	2	●	○	○
	3	●	●	●

Schüler 478	1	○	○	○
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 479	1	●	○	●
	2	●	○	○
	3	●	●	●

Schüler 480	1	●	●	●
	2	●	○	○
	3	●	●	●

Schüler 481	1	●	○	●
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 482	1	●	○	●
	2	●	○	○
	3	●	○	○

Schüler 483	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 484	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	●

Schüler 485	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	○	○

Schüler 486	1	●	●	●
	2	●	●	○
	3	●	○	○

Schüler 487	1	●	○	●
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 488	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	○	○

Schüler 489	1	●	●	○
	2	○	●	○
	3	●	●	○

Schüler 490	1	○	○	●
	2	○	●	○
	3	○	●	○

Schüler 491	1	○	○	●
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 492	1	●	●	●
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 493	1	●	○	○
	2	●	○	○
	3	●	●	●

Schüler 494	1	●	●	●
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 495	1	●	○	○
	2	●	○	○
	3	●	●	●

Schüler 496	1	●	○	○
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 497	1	○	○	●
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 498	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 499	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	○	○	○

Schüler 500	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	○	○	○

Schüler 501	1	○	●	●
	2	●	●	○
	3	○	●	○

Schüler 502	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	○	○

Schüler 503	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 504	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	○	○

Schüler 505	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 506	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	○	○	○

Schüler 507	1	●	●	○
	2	●	○	○
	3	●	●	○

Schüler 508	1	●	○	●
	2	●	●	○
	3	●	●	○

Schüler 509	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	○	●

Schüler 510	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	●	●

Schüler 511	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	○	○	●

Schüler 512	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	○	○	○

Schüler 513	1	○	○	●
	2	○	○	○
	3	●	●	○

Schüler 514	1	●	○	○
	2	○	○	○
	3	●	○	●

Schüler 515	1	●	○	○
	2	●	○	○
	3	●	●	●

Schüler 516	1	○	●	○
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 517	1	●	●	●
	2	●	●	●
	3	●	●	●

Schüler 518	1	●	●	○
	2	●	●	●
	3	●	●	○

Schüler 519	1	●	●	○
	2	●	○	●
	3	○	●	○

Schüler 520	1	●	●	○
	2	●	●	○
	3	●	●	●

Schüler 521	1	●	○	●
	2	●	●	○
	3	●	●	●