Ludwig-Maximilians-Universität München
Mathematisches Institut
Gregor Kleen

WiSe 2023/24

Programmieren II für Studierende der Mathematik

Blatt 12

Aufgabe 13 Wir bezeichnen im Folgenden die i-te Zeile einer Matrix M mit m^i, die j-te Spalte einer Matrix M mit m_j und den j-ten Eintrag der i-ten Zeile einer Matrix M mit m^i_j.

Das zyklische Jacobi-Verfahren dient zur Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix $A = \left(a^i_j\right)_{i,j=0,\dots,n-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Wir beobachten zunächst, dass A als symmetrischer Matrix ähnlich ist zu einer Diagonalmatrix, d.h. es existiert U mit $A' = U^\top AU$ diagonal. Aus U und A' lassen sich die Eigenwerte bzw. die Eigenvektoren der Matrix A ablesen.

Es ist U das Produkt einer Folge von Rotationsmatrizen Q, die sich von der Einheitsmatrix jeweils in den folgenden vier Einträgen unterscheiden:

$$
\begin{aligned}
q^i_i &= q^j_j = c \\
q^i_j &= -q^j_i = s
\end{aligned}
$$

Ansatz des zyklischen Jacobi Verfahrens ist es nun die Matrix A sukzessive den Transformationen $A^{\text{neu}} = Q^\top A^{\text{alt}} Q$ zu unterwerfen und hierbei Buch zu führen über $U^{\text{neu}} = U^{\text{alt}}Q$. c und s werden für jedes Q hierbei geeignet gewählt sodass ein $\left(a^{\text{alt}}\right)^i_j \neq 0$ auf $\left(a^{\text{neu}}\right)^i_j = 0$ gesetzt wird. Ist $\left(a^{\text{alt}}\right)^i_j = 0$ bereits der Fall, so wählen wir $c = 1$ und $s = 0$. Mit dem Ansatz $c = st$ und den Nebenbedingungen $c^2 + s^2 = 1$, $c > 0$ und $s \in (-c, c]$ erhält man:

$$
\begin{aligned}
\tau &= \frac{\left(a^{\text{alt}}\right)^j_j - \left(a^{\text{alt}}\right)^i_i}{2\left(a^{\text{alt}}\right)^i_j} \\
t &= \frac{\operatorname{sign}(\tau)}{|\tau| + \sqrt{1+\tau^2}} \\
c &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\
s &= ct
\end{aligned}
$$

Bei der Multiplikation von A^{alt} mit Q werden jeweils nur die i-te Zeile und die j-te Spalte verändert, wie folgt:

$$
\begin{aligned}
a'_i &= c a^{\text{alt}}_i - s a^{\text{alt}}_j \\
a'_j &= s a^{\text{alt}}_i + c a^{\text{alt}}_j \\
(a'')^i &= c(a')^i - s(a')^j \\
(a'')^j &= s(a')^i + c(a')^j \\
\left(a^{\text{neu}}\right)^k_l &= \begin{cases} (a')^k_l & l \in \{i,j\}, k \notin \{i,j\} \\ (a'')^k_l & k \in \{i,j\} \\ \left(a^{\text{alt}}\right)^k_l & \text{sonst} \end{cases} \qquad k = 0,1,\dots \qquad l = 0,1,\dots
\end{aligned}
$$

Ebenso für U:

$$
\begin{aligned}
u_i^{\text{neu}} &= c u_i^{\text{alt}} - s u_j^{\text{alt}} \\
u_j^{\text{neu}} &= s u_i^{\text{alt}} + c u_j^{\text{alt}}
\end{aligned}
$$

In einem *Zyklus* sollen zeilenweise die Indexpaare (i, j) der oberen rechten Hälfte von A druchlaufen werden, d.h. $j = i+1, \ldots, n-1$ mit $i = 0, \ldots, n-1$.

Die Berechnung soll abgebrochen werden, sobald eine vorgegebene Anzahl von Zykeln $\text{cyc}_{\text{max}} = 50$ überschritten wird, oder gilt:

$$
N\left(A^{\text{neu}}\right) := 2 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n-1} \left| \left(a^{\text{neu}}\right)_j^i \right|^2 \leq \varepsilon \cdot N(A)
$$

Es gilt:

$$
N\left(A^{\text{neu}}\right) = N\left(A^{\text{alt}}\right) - 2 \left| \left(a^{\text{alt}}\right)_j^i \right|^2
$$

Nach Abschluss des Verfahrens lässt sich eine Näherung für die Eigenwerte in der Diagonale von A^{neu} und Näherungen für die Eigenvektoren in den Spalten von U^{neu} ablesen.

Erstellen Sie eine Funktion `jacobi` die das zyklische Jacobi-Verfahren durchführt, wie beschrieben. Rückgabewert der Funktion soll sein, ob das Verfahren erfolgreich war.

Rechnen Sie die folgenden Beispiele:

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 & 0 & -2 & 5 \\ 1 & 6 & -3 & 2 & 0 & 6 \\ -2 & -3 & 8 & -5 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 5 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -6 & 1 & 6 & -3 \\ 5 & 6 & 0 & -2 & -3 & 8 \end{pmatrix}$