Ludwig-Maximilians-Universität München
Mathematisches Institut
Gregor Kleen

Programmieren II für Studierende der Mathematik

Blatt 10

Aufgabe 11 Es soll im Folgenden das Konvergenzverhalten des Newton-Verfahrens zur Bestimmung von Nullstellen analytischer Funktionen f untersucht werden.

Für $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ betrachten wir die Folge $(z)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_0 \in \mathbb{C}$ beliebig und:

$$z_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{f'(z_k)}$$

Wir untersuchen die Konvergenz der Folge $(z)_{n\in\mathbb{N}}$ für Startwerte z_0 in einem Rechteck mit Eckpunkten $a + ib$ und $c + id$.

Implementieren Sie eine Klasse `Konvergenz`. Ein Objekt der Klasse soll der Untersuchung einer Instanz des Problems dienen, also konkrete Werte enthalten für a, b, c, d, f, f', sowie $M, N \in \mathbb{N}$ und $D \in \mathbb{R}$.

Implementieren Sie eine statische Komponentenfunktion `newtonverfahren` für als Parameter gegebene z_0, f und f'. Liefern Sie als Rückgabewert einen `bool` Wert der beschreibt ob bei der Iteration des Newton-Verfahrens nach maximal $\mathrm{it}_{\mathrm{max}} = 200$ Durchläufen die relative Abweichung aufeinander folgender Glieder $\varepsilon = 10^{-12}$ unterschritten hat, die Folge also auf einen Wert z konvergiert ist. Stellen Sie sicher, dass der Wert z auf geeignete Weise an den Code, in dem die Funktion `newtonverfahren` später aufgerufen wird, zurück kommuniziert werden kann.

Implementieren Sie eine Methode `analysieren` in der Sie das Verfahren auf den Punkten eines homogenen rechteckigen Gitters mit $M \cdot N$ Punkten ausführen. Speichern Sie den jeweils gefunden Wert z (die Nullstelle) in einem Vektor komplexer Zahlen ab, jedoch nur wenn er von allen bereits gespeicherten Werten betragsmäßig um mehr als $D > 0$ abweicht. Halten Sie zudem fest wie oft jede Nullstelle und der Fall, dass die Folge nicht innerhalb von $\mathrm{it}_{\mathrm{max}}$ Gliedern bis auf ε konvergiert ist, aufgetreten ist.

Überladen Sie den Ausgabeoperator für Objekte der Klasse `Konvergenz` sodass die beobachteten Nullstellen jeweils zusammen mit ihrer Häufigkeit ausgegeben werden.

Analysieren Sie die folgenden Beispiele für geeignet einzulesende Werte a, b, c, d, M, N und D (z.B. -4, 4, 4, -4, 500, 500, $1 \cdot 10^{-3}$):

$$p_1(z) = z^3 - 1 \tag{1}$$
$$p_2(z) = z^3 + 3z^2 - i \tag{2}$$
$$p_3(z) = z^5 - 2iz^4 - 13z^3 + 14iz^2 + 24z - 1 \tag{3}$$
$$f_4(z) = e^z(z^3 - 1) \tag{4}$$

Erzeugen Sie jeweils eine Ausgabedatei, die die Einzugsbereiche der einzelnen Nullstellen graphisch darstellt. Verwenden Sie hierfür das Format `P6` oder `P3` (resultiert in sehr großen Dateien) zur Erstellung einer Datei im `PPM`-Format (für Informationen zum Format siehe Kommandozeilen-Befehl `man 5 ppm` oder auch Wikipedia[1]).

[1] de.wikipedia.org/wiki/Portable_Anymap

Erstellen Sie, als statische Datenkomponente der Klasse `Konvergenz`, einen Vektor von mindestens 7 verschiedenen Farben.

Erzeugen Sie nach Analyse des Konvergenzverhaltens für eine Instanz des Problems jeweils eine Datei im `PPM`-Format in der jeder Pixel einem der betrachteten Gitterpunkte entspricht. Ordnen Sie jeder beobachteten Nullstelle eine Farbe zu und färben Sie die Pixel jeweils in der Farbe der Nullstelle zu dem das Newton-Verfahren, gestartet am entsprechenden Gitterpunkt, konvergiert. Im Falle der Nicht-Konvergenz soll der Pixel weiß gefärbt werden.