Ludwig-Maximilians-Universität München
Mathematisches Institut
Gregor Kleen

Programmieren II für Studierende der Mathematik

Blatt 7

Aufgabe 8 Eine symmetrische, positiv definite Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=0,\dots,n-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist darstellbar als Produkt $A = LL^T$ mit $L = (l_{ij})_{i,j=0,\dots,n-1}$ einer unteren linken Dreiecksmatrix mit positiven Hauptdiagonalelementen (Cholesky-Zerlegung). L kann berechnet werden wie folgt:

$$\left.\begin{array}{lll} l_{jj} & = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=0}^{j-1} l_{jk}^2} & \\ l_{ij} & = \frac{1}{l_{jj}}\left(a_{ij} - \sum_{k=0}^{j-1} l_{ik}l_{jk}\right) & i = j+1,\dots,n-1 \end{array}\right\} \quad j = 0,\dots,n-1$$

Erstellen Sie eine Klasse `Cholesky` mit einem Konstruktor, der die Cholesky-Zerlegung für eine als Referenzarameter übergegebene Matrix durchführt und nur L als Attribut des erzeugten Objektes speichert. Der Konstruktor soll ein weiteres Argument ε akzeptieren (optional mit Voreinstellung $1 \cdot 10^{-10}$). Wenn bei der Berechnung von l_{jj} der Radikant betragsmäßig kleiner oder gleich $\varepsilon \cdot \mathrm{Spur}(A)$ mit $\mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{ii}$ ist, soll das Programm unter Ausgabe einer aussagekräftigen Fehlermeldung geeignet abgebrochen werden. Zudem soll der Konstruktor überprüfen ob die gegebene Matrix quadratisch ist und geeignet abbrechen, falls nicht.

Implementieren Sie eine Methode `getEntry` von `Cholesky` mit zwei Parametern i und j. Rückgabewert der Methode soll $a_{ij} = \sum_{k=0}^{\min(i,j)} l_{jk}l_{ik}$ als Wert vom Typ `double` sein.

Überladen Sie den Ausgabeoperator für `Cholesky` geeignet. Es soll die ursprüngliche Matrix A unter Verwendung der Methode `getEntry` ausgegeben werden.

Implementieren Sie ein Hauptprogramm in dem zunächst die Dimension n gefolgt von den Einträgen einer $n \times n$-Matrix A von der Standardeingabe eingelesen wird. Es soll dann ein Objekt der Klasse `Cholesky` aus A erzeugt werden (also die Cholesky-Zerlegung durchgeführt werden). Geben Sie das erstellte Objekt dann zur Kontrolle auf der Standardausgabe aus.

Ein lineares Gleichungssystem der Form $Ax = b$ kann bei gegebenem $b = (b_i)_{i=0,\dots,n-1}$ und gesuchtem $x = (x_i)_{i=0,\dots,n-1}$ mithilfe der Cholesky-Zerlegung von A effizient gelöst werden. Hierfür lösen wir die Gleichungssysteme $Ly = b$ mit $y = (y_i)_{i=0,\dots,n-1}$ und $L^T x = y$ wie folgt:

$$y_i = \frac{1}{l_{ii}}\left(b_i - \sum_{k=0}^{i-1} l_{ik}y_k\right) \qquad i = 0,\dots,n-1$$
$$x_i = \frac{1}{l_{ii}}\left(y_i - \sum_{k=i+1}^{n-1} l_{ki}x_k\right) \qquad i = n-1,\dots,0$$

Implementieren Sie eine Methode `solve` von `Cholesky` die b als Referenzparameter akzeptiert und x liefert.

Erweitern Sie ihr Hauptprogramm darum, dass auch b eingelesen und zur Kontrolle wieder ausgegeben wird. Rufen Sie dann mit b die Methode `solve` auf dem Objekt der Klasse `Cholesky` auf und geben Sie das Ergebnis ebenfalls aus.

Testen Sie Ihr Programm mit den folgenden Beispielen:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 13 & 23 \\ 4 & 23 & 77 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -3 \\ -21 \\ -73 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 25 & 20 \\ 0 & 0 & 20 & 61 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 158 \\ 304 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 7 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & 3 & 12 & 1 \\ 4 & -3 & -5 & 1 & 15 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$