MATHEMATISCHES INSTITUT
UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Prof. Dr. Nikita Geldhauser
02.05.2024 SoSe 2024

Algebraische Geometrie 2
Übungsblatt 3

Aufgabe 1. (Noethersche Induktion). Seien X ein noetherscher topologischer Raum und $\mathcal{P}$ eine Eigenschaft von abgeschlossenen Teilmengen von X. Angenommen, dass für jede abgeschlossene Teilmenge Y von X, falls $\mathcal{P}$ für jede echte abgeschlossene Teilmenge von Y gilt, dann gilt $\mathcal{P}$ für Y.
Zeige: $\mathcal{P}$ gilt für X.

Aufgabe 2. Seien $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen zwei topologischen Räumen, $\mathcal{F}$ eine Garbe der abelschen Gruppen auf X und $\mathcal{G}$ eine Garbe der abelschen Gruppen auf Y. Konstruiere natürliche Morphismen $\mathcal{G} \to f_*f^{-1}\mathcal{G}$ und $f^{-1}f_*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ und zeige mit deren Hilfe, dass

$$\mathrm{Mor}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) = \mathrm{Mor}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}).$$

Aufgabe 3. Sei $X = \mathbb{P}^1_k$ die projektive Gerade über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k wie in der Vorlesung "Algebraische Geometrie 1". Sei $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$ die Garbe der regulären Funktionen auf X wie in der Übungsaufgabe 1, Blatt 2. Sei ferner $\mathcal{K}$ die konstante Garbe auf X, die mit dem Funktionenkörper K von X assoziiert ist (d.h. $\mathcal{K}(U) = K$ für alle nicht leeren offenen Teilmengen $U \subset X$).
Zeige: $\mathcal{O} \subset \mathcal{K}$ ist eine Untergarbe und die Faktorgarbe $\mathcal{K}/\mathcal{O}$ ist isomorph zur Garbe $\bigoplus_{x\in X} i_x(I_x)$, wobei I_x die Gruppe $K/\mathcal{O}_x$ bezeichnet und $i_x(I_x)$ ist die Wolkenkratzergarbe, die durch die Gruppe I_x am Punkt x gegeben ist.