6. Integrieren von Funktionen auf $\mathbb{R}$

Im ganzen Kapitel: $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$; $I := [a, b]$

$f : I \to \mathbb{R}$

6.1. Riemann-integrierbare Funktionen

6.1. Definition

(a) $\varphi : I \to \mathbb{R}$ Treppenfunktion

$:\Leftrightarrow$ $\exists n \in \mathbb{N}$ und Unterteilung $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ von I, und $\exists c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, so dass $\forall j = 1, \ldots, n$: $\varphi|_{]x_{j-1}, x_j[} = c_j$

(Die Werte $\varphi(x_j)$, $j = 0, \ldots, n$ sind nicht vorgeg.).

(b) $\mathcal{T}(I) := \{\varphi : I \to \mathbb{R} : \varphi \text{ Treppenfkt}\}$

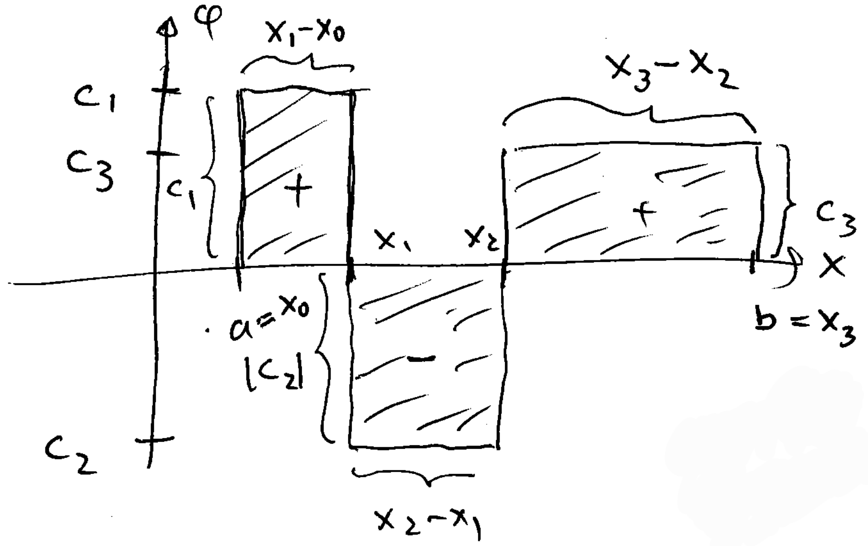
Menge der Treppenfkt.'en auf I

(c) Für Treppenfkt $\varphi \in \mathcal{T}(I)$ ist

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx := \sum_{j=1}^{n} c_j (x_j - x_{j-1})$$

(Riemann) Integral von φ

auch: $\int_a^b dx\,\varphi(x)$; $\int_a^b \varphi\,dx$; $\int_I \varphi(x)\,dx$; $\int_I dx\,\varphi(x)$ etc



6.2. Bemerkung

$\int_a^b \varphi(x)\,dx$ ist wohldef., d.h. unabhängig von der gewählten Unterteilung von φ, denn:

für $x_{j-1} = y_k < y_{k+1} < y_{k+l-1} < y_{k+l} = x_j$ gilt

$$c_j(x_j - x_{j-1}) = \sum_{\kappa=1}^{l} c_j (y_{k+\kappa} - y_{k+\kappa-1})$$

6.3 Lemma

(a) $\mathcal{T}(I)$ ist Vektorraum (über $\mathbb{R}$) und $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{T}(I)$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_a^b (\lambda\varphi + \mu\psi)(x)\,dx = \lambda \int_a^b \varphi(x)\,dx + \mu \int_a^b \psi(x)\,dx$$

Linearität

(b) $\forall \varphi \in \mathcal{T}(I)$ mit $\varphi \geq 0$, d.h. $\varphi(x) \geq 0$ $\forall x \in I$, gilt: $\int_a^b \varphi(x)\,dx \geq 0$

Monotonie

Beweis (b) klar, da $c_j \geq 0$ in Darstellung von φ

(a) • Vektorraum:

- $0 \in \mathcal{T}(I)$ klar
- Sei $\varphi \in \mathcal{T}(I)$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda\varphi \in \mathcal{T}(I)$, denn $c_j \to \lambda c_j$
- Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{T}(I)$ mit

$$\varphi|_{]x_{j-1}, x_j[} = c_j, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\psi|_{]y_{k-1}, y_k[} = d_k, \quad k = 1, \dots, m$$

Definieren eindeutige Unterteilung

$a = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_{\nu-1} < \xi_\nu = b$, so dass

$\{\xi_\alpha : \alpha = 1, \dots, \nu-1\} = \{x_j : j = 1, \dots, n-1\} \cup \{y_k : k = 1, \dots, m-1\}$

d.h. gröbste Unterteilung, die Unterteilungen von φ und ψ enthält ($\Leftrightarrow$: gröbste Verfeinerung)

$$\Rightarrow \varphi\big|_{]\xi_{\alpha-1}, \xi_\alpha[} = c_{j(\alpha)}, \quad \psi\big|_{]\xi_{\alpha-1}, \xi_\alpha[} = d_{k(\alpha)}$$

$$\Rightarrow (\varphi+\psi)\big|_{]\xi_{\alpha-1}, \xi_\alpha[} = c_{j(\alpha)} + d_{k(\alpha)} =: e_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, \nu.$$

also $\varphi + \psi \in \mathcal{T}(I)$

Linearität: $\int_a^b (\lambda\varphi + \mu\psi)(x) = \sum_{\alpha=1}^{\nu} (\lambda c_{j(\alpha)} + \mu d_{k(\alpha)})(\xi_\alpha - \xi_{\alpha-1})$

$$= \lambda \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{\nu} c_{j(\alpha)}(\xi_\alpha - \xi_{\alpha-1})}_{\overset{\text{wegen } 6.2}{\sum_{j=1}^{n} c_j (x_j - x_{j-1})}} + \mu \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{\nu} d_{k(\alpha)}(\xi_\alpha - \xi_{\alpha-1})}_{\overset{\text{wegen } 6.2}{\sum_{k=1}^{m} d_k (y_k - y_{k-1})}}$$

$$= \lambda \int_a^b \varphi(x)\,dx + \mu \int_a^b \psi(x)\,dx \qquad \blacksquare$$

$\boxed{\textbf{6.4 Definition}}$ Sei $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt ($\exists c > 0 : |f(x)| \leq c \;\; \forall x \in I$)

(a) Oberintegral $\mathcal{O}_I(f) := \inf \left\{ \int_I \varphi(x)\,dx : \varphi \in \mathcal{T}(I), \varphi \geq f \right\}$

Unterintegral $\mathcal{U}_I(f) := \sup \left\{ \int_I \psi(x)\,dx : \psi \in \mathcal{T}(I), \psi \leq f \right\}$

(b) f Riemann-integrierbar (über I) $:\Leftrightarrow$

$$\mathcal{O}_I(f) = \mathcal{U}_I(f) =: \int_I f(x)\,dx$$

Riemann-Integral von f über I

auch: $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_I dx\, f(x)$, $\int_a^b dx\, f(x)$

(c) Sei $f : I \to \mathbb{C}$ beschränkt

- f Riemann-integrierbar $:\Leftrightarrow$ Re f & Im f Riemann-integrierbar
- $\int_I f(x)dx := \int_I (\mathrm{Re} f)(x)dx + i \int_I (\mathrm{Im} f)(x)dx$

6.5 Bemerkung

(i) Falls $m_- \leq f \leq m_+$ ($m_\pm \in \mathbb{R}$), so ist mit $|I| := b-a$

$$m_- |I| \leq \mathcal{U}_I(f) \leq \mathcal{O}_I(f) \leq m_+ |I|$$

$\varphi = m_-$ zugelassen

$\psi = m_+$ zugelassen

Lemma 6.3(b): $\varphi \leq \psi \Rightarrow \int_I \varphi dx \leq \int_I \psi dx$

(ii) $\forall \varphi \in \mathcal{J}(I)$: φ ist Riemann-integrierbar mit

$$\int_I \varphi(x)dx = \mathcal{O}_I(\varphi) = \mathcal{U}_I(\varphi) = \sum_{j=1}^{n} c_j(x_j - x_{j-1})$$

$\varphi|_{]x_{j-1},x_j[} = c_j$

(iii) $f = 1_\mathbb{Q} := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$ <u>nicht</u> (Riemann) integrierbar über $[0,1] =: I$

$\mathcal{O}_I(1_\mathbb{Q}) = 1$

inf durch $1_{[a,1]}$ realisiert, da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$

$\mathcal{U}_I(1_\mathbb{Q}) = 0$

sup durch 0 realisiert, da $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$

(iv) <u>Name</u> der Integrationsvariablen irrelevant

(so wie Summationsindex!)

$$\int_I f(x)dx = \int_I f(t)dt = \int_I f(y)dy = \ldots$$

6.6 Definition Sei $f: I \to \mathbb{R}$ beschränkt

Sei $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ eine Unterteilung von I und

$\forall j \in \{1, \ldots, n\}$ sei $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ „Stützstelle"

- $Z := \left((x_j)_{j \in \{0,\ldots,n\}}, (\xi_j)_{j \in \{1,\ldots,n\}} \right)$ Zerlegung (= Unterteilung mit Stützstellen)

- $\mu(Z) := \max\limits_{j=1,\ldots,n} (x_j - x_{j-1})$ Feinheit der Zerlegung

- Riemann-Approximante von f zur Zerlegung Z:

  Treppenfkt $\varphi_Z \in \mathcal{T}(I)$ mit

  $$\varphi_Z|_{]x_{j-1}, x_j[} = f(\xi_j) \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

- Riemann-Summe von f zur Zerlegung Z:

  $$R(Z, f) := \int_I \varphi_Z(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

Nächster Satz dient Charakterisierung Riemann-integrierbarer Funktionen:

6.7 Satz Sei $f: I \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann sind äquivalent: (i) f ist Riemann integrierbar

(ii) $\exists J \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall$ Zerlegungen Z mit $\mu(Z) < \delta$:

$$|J - R(Z, f)| < \varepsilon$$

symbolische (!) Schreibweise: $\lim\limits_{\mu(Z) \to 0} R(Z, f) = J$

(iii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \varphi_\pm \in \mathcal{T}(I)$ mit $\varphi_- \le f \le \varphi_+$

und $$\int_I \varphi_+(x)\,dx - \int_I \varphi_-(x)\,dx < \varepsilon$$

Trifft eine der Aussagen (i)-(iii) zu, so ist
$$J = \int_I f(x)\,dx.$$

Beweis: (iii) $\Rightarrow$ (i): Da $\forall \varphi_\pm \in \mathcal{T}(I)$ mit $\varphi_- \le f \le \varphi_+$:
$$\int_I \varphi_-(x)\,dx \le \mathcal{U}_I(f) \le \mathcal{O}_I(f) \le \int_I \varphi_+(x)\,dx \Rightarrow \text{Beh.}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei $\varepsilon > 0$ und $a = x_0 < x_1 < \dots x_n = b$ mit
$$\max_{j=1,\dots,n} (x_j - x_{j-1}) < \delta$$

$$\overset{\text{n.V}}{\Rightarrow} \forall j = 1,\dots,n\ \forall \xi_j \in]x_{j-1}, x_j[\ : \quad \left| J - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon \quad (*)$$

Sei $$f_j^\pm := \begin{matrix}\sup\\ \inf\end{matrix} \{ f(x) : x \in]x_{j-1}, x_j[\} \quad (f \text{ beschränkt!})$$

$$\Rightarrow \exists (\eta_{j,\nu}^\pm)_{\nu \in \mathbb{N}} \subseteq]x_{j-1}, x_j[\text{ mit } \lim_{\nu\to\infty} f(\eta_{j,\nu}^\pm) = f_j^\pm$$

Wähle $\xi_k = \eta_{k,\nu}^\pm$ in $(*)$ $\overset{\nu\to\infty}{\Rightarrow} \left| J - \sum_{k=1}^n f_k^\pm (x_k - x_{k-1}) \right| \le \varepsilon \quad (**)$

somit gilt für $\varphi_\pm \in \mathcal{T}(I)$,
$$\varphi_\pm \big|_{]x_{k-1}, x_k[} := f_k^\pm, \quad \varphi_\pm(x_k) := f(x_k),$$

dass $\varphi_- \le f \le \varphi_+$ und
$$\int_I \varphi_+(x)\,dx - \int_I \varphi_-(x)\,dx \overset{\text{aus } (**)}{\le} 2\varepsilon \quad \checkmark$$

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $\varepsilon > 0$ und $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ eine gemeinsame Unterteilung von φ_+ und φ_-, wobei $\varphi_- \leq f \leq \varphi_+$ und
$$\left| \int_I \varphi_\pm(x)dx - \int_I f(x)dx \right| < \varepsilon \quad (0)$$
Sei $\delta > 0$, so dass
$$2\delta n \left(\sup_{x\in I} |\varphi_+(x)| + \sup_{x\in I} |\varphi_-(x)| \right) < \varepsilon \quad (1)$$
Sei $Z = ((y_k)_{k=0,\dots,m}, (\xi_k)_{k=1,\dots,m})$ bel. Zerlegung mit $\mu(Z) < \delta$

Sei $a = z_0 < z_1 < \dots < z_\nu = b$ gröbste gemeinsame Unterteilung von $(x_j)_j$ und $(y_k)_k$ (gröbste Verfeinerung)

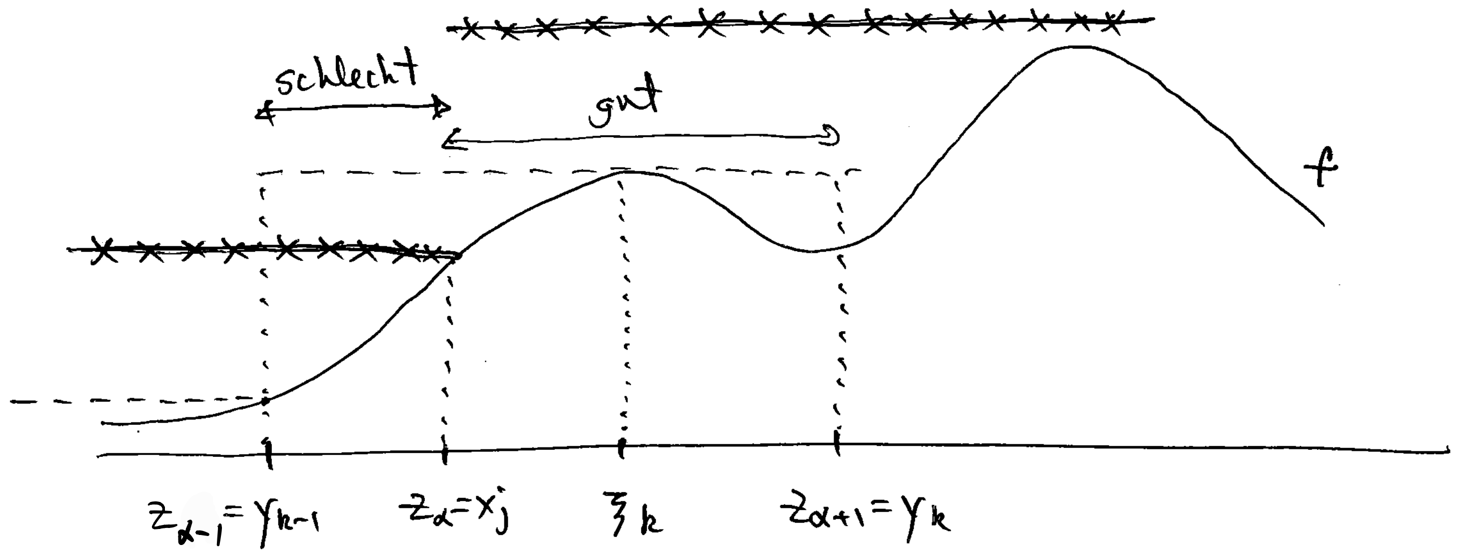
Also $\nu \leq m + (n-1)$ [Man denke sich die x_j's in die bestehende Unterteilung $(y_k)_k$ „reingeworfen"]

Def. $\alpha \in \{1,\dots,\nu\}$ schlecht $:\Leftrightarrow \forall k = 1,\dots,m : \xi_k \notin]z_{\alpha-1}, z_\alpha[$

ansonsten: α gut

$\Rightarrow$ (2) $\exists$ höchstens $2(n-1)$ schlechte α's (ungünstigster Fall: $x_j = \xi_{k(j)}$ $\forall j = 1,\dots,n-1$)

(3) α gut $\Rightarrow$ $\varphi_- \leq \varphi_Z \leq \varphi_+$ auf $]z_{\alpha-1}, z_\alpha[$



- - - - - - - - - Werte von φ_Z ($= f(\xi_k)$ auf $]y_{k-1}, y_k[$)

-×-×-×-×-×- Werte von φ_+ ($\geq f$ auf $]x_{k-1}, x_k[$)

Für $\# \in \{+, -, Z\}$, $\alpha \in \{1, \dots, \nu\}$, sei $c_{\#,\alpha} := \varphi_\#(w_\alpha)$
wobei $w_\alpha \in]z_\alpha, z_{\alpha-1}[$ (Intervall, auf dem $\varphi_\#$ konstant)

$$\int_{I,g} \varphi_\#(x)\,dx := \sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha \text{ gut}}}^{\nu} c_{\#,\alpha}(z_\alpha - z_{\alpha-1})$$

$$\overset{\Rightarrow}{(4):} \quad \left| \int_I \varphi_\#(x)\,dx - \int_{I,g} \varphi_\#(x)\,dx \right| \leq \sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha \text{ schlecht}}}^{\nu} |c_{\#,\alpha}| \cdot \underbrace{(z_\alpha - z_{\alpha-1})}_{\leq \mu(Z) < \delta} \overset{(2),(1)}{<} \varepsilon$$

$$|c_{\#,\alpha}| \leq \sup_{x \in I} |\varphi_+(x)| + \sup_{x \in I} |\varphi_-(x)|$$

$$(5): \quad \int_{I,g} \varphi_-(x)\,dx \overset{(3)}{\leq} \int_{I,g} \varphi_Z(x)\,dx \overset{(3)}{\leq} \int_{I,g} \varphi_+(x)\,dx$$

aus (4) $\wedge$ (0) $\Rightarrow$
$$\left| \int_{I,g} \varphi_+(x)\,dx - \int_{I,g} \varphi_-(x)\,dx \right| \leq \left| \int_{I,g} \varphi_+(x)\,dx - \int_I \varphi_+(x)\,dx \right| + \left| \int_I \varphi_+(x)\,dx - \int_I \varphi_-(x)\,dx \right| + \left| \int_I \varphi_-(x)\,dx - \int_{I,g} \varphi_-(x)\,dx \right|$$

$$\overset{(0),(4)}{<} \varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon$$

$$\overset{(5)}{\Rightarrow} \quad (6): \quad 0 \leq \int_{I,g} \varphi_+(x)\,dx - \int_{I,g} \varphi_Z(x)\,dx \leq 4\varepsilon$$

Somit
$$\Big| \int_I f(x)\,dx - \underbrace{R(Z,f)}_{\int_I \varphi_Z(x)\,dx} \Big| \leq \left| \int_I f(x)\,dx - \int_I \varphi_+(x)\,dx \right| + \left| \int_I \varphi_+(x) - \int_{I,g} \varphi_+\,dx \right| + \left| \int_{I,g} \varphi_+\,dx - \int_{I,g} \varphi_Z(x)\,dx \right| + \left| \int_{I,g} \varphi_Z(x)\,dx - \int_I \varphi_Z(x)\,dx \right|$$

$$\overset{(0),(4),(6),(4)}{<} \varepsilon + \varepsilon + 4\varepsilon + \varepsilon = 7\varepsilon$$

$\blacksquare$

6.8 Definition Sei $N \subseteq \mathbb{R}$

$$N \text{ (Lebesgue-) Nullmenge} \;:\Longleftrightarrow\; \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \; \exists \text{ offene Intervalle } J_n \subseteq \mathbb{R},\, n \in \mathbb{N}: \\ N \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n \quad \text{und} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} |J_n| < \varepsilon \end{cases}$$

„offene Überdeckung von N"

6.9. Satz (a) $\forall k \in \mathbb{N}$ sei $N_k \subseteq \mathbb{R}$ Nullmenge

$\Rightarrow \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k$ ist Nullmenge

(b) Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ abzählbar. Dann ist M Nullmenge

Beweis (a) Sei $\varepsilon > 0$. $\forall k \in \mathbb{N}$ $\exists$ n.V. offene Überdeckung $N_k \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n^k$ mit Intervallen, so dass

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |J_n^k| < 2^{-k}\varepsilon$$

$$\Rightarrow \left(\bigcup_k N_k\right) \subseteq \underbrace{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}}}_{\text{abzählbar}} J_n^k \quad \text{mit offene Intervalle und}$$

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} |J_n^k| < \varepsilon \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k} = \varepsilon \quad ✓$$

(b) . $\forall x \in \mathbb{R}: \{x\}$ ist Nullmenge (1 Intervall reicht!)

$\Rightarrow$ Beh. mit (a) ∎

Ein Integrabilitätskriterium:

6.10 Satz Sei $f: I \to \mathbb{R}$ und $N_f := \{x \in I : f \text{ nicht stetig in } x\}$

Dann gilt:

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ beschränkt} \\ \text{und } N_f \text{ Nullmenge} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow f \text{ Riemann-integrierbar auf } I$$

Beweis: Hier nur "$\Rightarrow$"; für "$\Leftarrow$" siehe z. B. Heuser, Satz 84.2

Sei $\varepsilon > 0$

- Sei $x \in I \setminus N_f \overset{\text{stetig}}{\Longrightarrow} \exists \delta_x > 0 \; \forall x' \in B_{\delta_x}(x) \cap I$:
$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon \qquad (1)$$
- Sei $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ offene Überdeckung aus Intervallen von N_f mit
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |J_n| < \varepsilon \qquad (2)$$

$\Rightarrow I \subseteq \left(\bigcup_{x \in I\setminus N_f} B_{\delta_x}(x) \right) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n \right)$. Da I kompakt (vgl. Bsp. 3.25) $\overset{\text{Satz v. Heine-Borel}}{\underset{\text{(siehe unten)}}{\Longrightarrow}}$ $\exists$ endliche Teilüberdeckung,

d.h. $\exists \varkappa, \nu \in \mathbb{N} \; \exists x_1, \dots, x_\varkappa \in I \setminus N_f, \; n_1, \dots, n_\nu \in \mathbb{N}$ mit
$$I \subseteq \left(\bigcup_{k=1}^{\varkappa} B_{\delta_{x_k}}(x_k) \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\nu} J_{n_j} \right)$$

Sei $a = z_0 < z_1 < \dots < z_{\lambda-1} < z_\lambda = b$ Unterteilung von $I = [a, b]$,
so dass $\forall l = 1, \dots, \lambda$: entweder $\exists k = 1, \dots, \varkappa$:
$$I_l := \,]z_{l-1}, z_l[\, \subseteq B_{\delta_{x_k}}(x_k) \quad (\text{„}l\text{ gut“})$$
oder $\exists j = 1, \dots, \nu$: $\quad I_l \subseteq J_{n_j} \quad$ („l schlecht“)

Seien $\varphi_\pm \in \mathcal{T}(I)$ mit $\varphi_\pm \big|_{I_l} := \sup\limits_{x\in I_l} / \inf\limits_{x \in I_l} f(x)$ konstant $\forall l = 1, \dots, \lambda$

$$\Rightarrow 0 \le O_I(f) - U_I(f) \overset{\varphi_- \le f \le \varphi_+}{\le} \int_I \varphi_+ \, dx - \int_I \varphi_- \, dx = \sum_{l=1}^{\lambda} \left(\varphi_+\big|_{I_l} - \varphi_-\big|_{I_l} \right) |I_l|$$

$$= \sum_{l \text{ gut}} \underbrace{\left(\varphi_+\big|_{I_l} - \varphi_-\big|_{I_l} \right)}_{\le 2\varepsilon \;\; (1)} |I_l| + \sum_{l \text{ schlecht}} \underbrace{\left(\varphi_+\big|_{I_l} - \varphi_-\big|_{I_l} \right)}_{\le 2 \sup_{x\in I} |f(x)| =: 2S < \infty \text{ n. V.}} |I_l|$$

$$\le 2\varepsilon |I| + 2S \underbrace{\sum_{j=1}^{\nu} |J_{n_j}|}_{< \varepsilon \;\; (2)} < 2\varepsilon (|I| + S) \quad \overset{\varepsilon > 0 \text{ bel.}}{\Longrightarrow} \text{ Beh.} \quad \blacksquare$$

Im Beweis von Satz 6.10 wurde ein Spezialfall des Überdeckungssatzes von Heine - Borel (⇝ Ana 2 !) verwendet:

Spezialfall Heine - Borel Seien $-\infty < a < b < \infty$; J eine (unendliche) Indexmenge und $\forall \alpha \in J$ sei I_α ein offenes Intervall. Es gelte

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} I_\alpha$$

Dann $\exists N \in \mathbb{N}$ sowie $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in J$, so dass

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} I_{\alpha_n} \quad \text{(endliche Teilüberdeck.)}$$

Beweis. Per Widerspruch. Ann. $\nexists$ endliche Teilüberdeckung von $[a,b] =: K_0$ $\Rightarrow$ mindestens eines der Intervalle $[a, \frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2}, b]$ besitzt keine endliche Teilüberdeckung; wähle eines davon, K_1, aus.

$\overset{\text{induktiv}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ Intervallschachtelung $\{K_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ mit

- $K_k \subseteq K_{k-1}$ $\quad \forall k \in \mathbb{N}$
- $|K_k| = |K_{k-1}|/2$
- (*) K_k wird nicht durch endlich viele I_α's überdeckt

$\overset{\text{Intervallsch.-Prinzip 2.69}}{\Longrightarrow}$ $\exists !\, x \in \mathbb{R} : x \in K_k \ \forall k \in \mathbb{N}_0$ (hier wurde die Abgeschlossenheit und Beschränktheit von $[a,b]$ benutzt!)

$\overset{\{I_\alpha\}_{\alpha \in J} \text{ Überd.}}{\Longrightarrow}$ $\exists \alpha_0 \in J : x \in I_{\alpha_0}$; I_{α_0} offen

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : x \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq I_{\alpha_0}$

$\Rightarrow$ für k groß genug (so dass $|K_k| < \varepsilon$) $\Rightarrow x \in K_k \subseteq]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset I_{\alpha_0}$

↯ (zu (*)) ☒

6.11 Korollar Sei $f: I \to \mathbb{R}$. Dann gilt:
f stetig oder stückweise stetig (d.h. N_f ist endliche Menge und f besitzt links- u. rechtsseitige Limiten in allen Punkten) $\Rightarrow$ f integrierbar auf I.

6.12. Korollar Sei $f: I \to \mathbb{R}$ monoton
$\Rightarrow$ f integrierbar auf I

Denn, es gilt:

6.13 Satz Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton. Dann ist N_f höchstens abzählbar.

Beweis. o.E. sei f isoton (sonst betrachte $-f$)

Monotonie $\Rightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$ existiert $\lim\limits_{y \nearrow x} f(y) =: f(x^-) \in \mathbb{R}$

und $\lim\limits_{y \searrow x} f(y) =: f(x^+) \in \mathbb{R}$

Für $M, n \in \mathbb{N}$ setze

$$\mathcal{U}_n^M := \left\{ x \in [-M, M] : f(x^+) - f(x^-) > \frac{1}{n} \right\}$$

$$\Rightarrow \quad N_f = \bigcup_{M \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n^M \qquad (*)$$

Da $0 \le \underset{\mathbb{R}}{\underset{\Uparrow}{f(M)}} - \underset{\mathbb{R}}{\underset{\Uparrow}{f(-M)}} > \frac{1}{n} \cdot \# \{ \mathcal{U}_n^M \}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{U}_n^M$ endlich $\forall n, M \in \mathbb{N}$

$\overset{(*)}{\Rightarrow}$ N_f abzählbar $\blacksquare$

6.2. Eigenschaften des Riemann-Integrals

6.14 Satz Seien $f, g : I \to \mathbb{C}$ Riemann-integrierbar, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

(a) Dann ist $\lambda f + \mu g$ Riemann-integrierbar und

$$\int_I (\lambda f + \mu g)(x)\,dx = \lambda \int_I f(x)\,dx + \mu \int_I g(x)\,dx$$

(b) Monotonie: $f \leq g \Rightarrow \int_I f(x)\,dx \leq \int_I g(x)\,dx$

(c) Dreiecksungleichung: $|f| : I \to \mathbb{R}_{\geq}$ ist Riemann-integrierbar und $\left|\int_I f(x)\,dx\right| \leq \int_I |f(x)|\,dx$

(d) Additivität: Sei $I = [a, b]$ und $a < c < b$. Dann sind äquivalent

(i) f Riemann integrierbar auf I

(ii) f " " " $[a, c]$ und auf $[c, b]$

Gilt eine der beiden Aussagen, so ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad (*)$$

Konvention

$$\int_a^a f(x)\,dx := 0\ ; \quad \int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx$$

falls $b < a$ und f Riemann-integrierbar auf $[b, a]$

Beweis von Satz 6.14

(a) aus Satz 6.7 (i) $\Leftrightarrow$ (ii), da

$$R(Z, \lambda f + \mu g) = \lambda R(Z, f) + \mu R(Z, g)$$

[gültig für reellwertige Fkt'en $\Rightarrow$ gültig für $\mathbb{C}$]

(b) wegen (a) genügt es zu zeigen:

$$g \geq 0 \Rightarrow \int_I g(x)\,dx \geq 0$$

$\varphi_- := 0$ ist Treppenfkt.

mit $\varphi_- \leq g \Rightarrow 0 = \int_I \varphi_-(x)\,dx \leq \mathcal{U}_I(g) \underset{g \text{ integrierbar}}{=} \int_I g(x)\,dx$

(c) f integrierbar $\Rightarrow$ Re f $\wedge$ Im f integrierbar

$\Downarrow$ Satz 6.10 $\Downarrow$

beschränkt und stetig bis auf Nullmenge N_1 ; Nullmenge N_2

$\Rightarrow x \mapsto |f(x)| = \sqrt{(\mathrm{Re} f)(x)^2 + (\mathrm{Im} f)(x)^2}$ beschränkt und stetig bis auf $N_1 \cup N_2$ (wieder Nullmenge!)

$\overset{\text{Satz 6.10}}{\Rightarrow}$ integrierbar

$$\Rightarrow \left| \int_I f(x)\,dx \right| = \lim_{\mu(Z) \to 0} \underbrace{|R(Z, f)|}_{\leq R(Z, |f|)} \leq \int_I |f(x)|\,dx$$

(d) (i) $\Leftrightarrow$ (ii) folgt aus Satz 6.10, und

Glg. (*) aus Satz 6.7. (ii) und einer Zerlegung Z mit c als Stützstelle

$\blacksquare$

6.15 Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Seien $f, g: I \to \mathbb{R}$ stetig ($\overset{\text{Kor. } 6.11}{\Longrightarrow}$ Riemann-integrierbar)

sei zudem $g \geq 0$.

Dann $\exists\, \xi \in I$: $\quad \int_I f(x) g(x)\, dx = f(\xi) \int_I g(x)\, dx$

(hängt von f, g und I ab!)

Speziell für $g = 1$ gilt : $\int_I f(x)\, dx = f(\xi)\, |I|$

Beweis : Sei $\begin{matrix} m \\ M \end{matrix} := \begin{matrix} \inf \\ \sup \end{matrix} \{ f(x) : x \in I \} \overset{g \geq 0}{\Longrightarrow} m g \leq f g \leq M g$

Satz 6.14 (b) $\Rightarrow$ $\quad m \int_I g(x)\, dx \leq \int_I f(x) g(x)\, dx \leq M \int_I g(x)\, dx$

$\Rightarrow \exists\, \mu \in [m, M] : \quad \int_I f(x) g(x)\, dx = \mu \int_I g(x)\, dx$

$\Downarrow$ Zwischenwertsatz (f stetig)

$\exists\, \xi \in I : \mu = f(\xi)$ $\blacksquare$

Eine unmittelbare Anwendung :

6.16 Hauptsatz der Differential- u. Integralrechnung

Sei $f: I \to \mathbb{C}$ stetig, sei $x_0 \in I$ und

$$F: \begin{array}{l} I \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(x')\, dx' =: F(x) \end{array}$$

Dann ist F diff.bar und $F' = f$.

Beweis Es genügt Satz für $f: I \to \mathbb{R}$ stetig zu zeigen (daraus folgt Beh. für $\mathbb{C}$)

Sei $x \in I$, $0 \neq h \in \mathbb{R}$, so dass $x+h \in I$

$$\Rightarrow \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \underset{\text{Satz 6.14 (d)}}{=} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x')\,dx' \underset{\substack{\text{Mittelwertsatz 6.15} \\ \exists \xi_h \in [x,x+h] \\ (\text{falls } h>0)}}{=} f(\xi_h) \xrightarrow[\xi_h \to x]{h \to 0} f(x)$$

f stetig!

∎

6.17. Definition Sei $f: I \to \mathbb{C}$ stetig

$F: I \to \mathbb{C}$ diff.bar ist Stammfkt. zu f $:\Leftrightarrow$ $F' = f$

Schreibweise: $F = \int f = \int f(x)\,dx$; $F(x) = \int^x f = \int^x f(t)\,dt$

6.18. Satz Sei $f: I \to \mathbb{C}$ stetig und F Stammfkt. zu f.

Dann gilt:

$G: I \to \mathbb{C}$ diff.bar ist Stammfkt. zu f $\Leftrightarrow$ $F - G = \text{konst.}$

Beweis: „$\Leftarrow$" $\underbrace{F'}_{f} - G' = 0$

„$\Rightarrow$" Sei G auch Stammfkt. zu f

$$\Rightarrow (G-F)' = G' - F' = f - f = 0$$

$G-F$ diff.bar auf I

$\Rightarrow$ (Übung!) $G - F = \text{konst.}$

∎

6.19 Korollar

Sei $f: I \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist $\forall x_0 \in I$
$I \ni x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ eine Stammfkt. zu f und
$\forall$ Stammfkt'en F von f gilt $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = F(x) - F(x_0) =: F(t)\Big|_{x_0}^{x}$

6.20 Beispiele

(a) Sei $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $I = [a,b]$ abgeschl. Intervall mit $0 \notin I$. $\Rightarrow$ $\int_a^b x^r\,dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1}\Big|_a^b$

NB: Für $r \geq 0$ braucht mann die Vor. „$0 \notin I$" nicht!

(b) Sei I wie oben (insbes. entweder $a > 0$ oder $b < 0$)

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \left\{\begin{array}{ll} \ln x\,\big|_a^b, & a > 0 \\ \ln(-x)\,\big|_a^b, & b < 0 \end{array}\right\} = \ln|x|\,\Big|_a^b$$

$$\frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{1}{-x}(-1)$$

(c) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x$

Falls Stammfkt. nicht offentsichtlich, können die folgenden Integrationsformeln (part. Integr. & Substitution) u. U. nützlich sein.

6.21 Satz (Partielle Integration) („PI")

Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig diff-bar. Dann gilt

$$\int_a^b f(x) g'(x)\, dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) g(x)\, dx$$

Beweis: Produktregel (diff.) für $\Phi := fg$

$\Rightarrow \Phi' = f'g + fg' =: \varphi$ und Kor 6.19 mit $f = \varphi$, $F = \Phi$ ∎

6.22 Beispiele

(a) Seien $a, b > 0$

$$\int_a^b \underbrace{\ln x}_{\substack{\ln x \cdot 1 \\ f \quad g'}}\, dx \overset{PI}{=} (\ln x)\, x \Big|_a^b - \underbrace{\int_a^b \underbrace{\frac{1}{x} \cdot x}_{1}\, dx}_{x |_a^b} = x(\ln x - 1)\Big|_a^b$$

(b) $I_m(x) := \int_0^x \underbrace{\sin^m(t)}_{:=(\sin t)^m}\, dt$, $m \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ • $m = 0, 1$: $I_0(x) = x$; $I_1(x) = -\cos x + 1$

• $m \geq 2$:

$$I_m(x) = \int_0^x \underbrace{\sin t}_{g'}\ \underbrace{\sin^{m-1} t}_{f}\, dt = -\cos x \sin^{m-1} x$$

$$+ \int_0^x \underbrace{\cos^2 t}_{1-\sin^2 t}\,(m-1) \sin^{m-2} t\, dt$$

$$\Rightarrow I_m(x) = -\cos x \sin^{m-1} x + (m-1) I_{m-2}(x) + (1-m) I_m(x)$$

$$\Rightarrow I_m(x) = -\frac{1}{m} \cos x \sin^{m-1} x + \left(1 - \frac{1}{m}\right) I_{m-2}(x)$$

- erlaubt rekursive Berechnung aller $I_m(x)$!
- Insbes.: $I_2(x) = \int_0^x \sin^2 t \, dt = -\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{x}{2}$

6.23 Satz (Riemannsches Lemma)

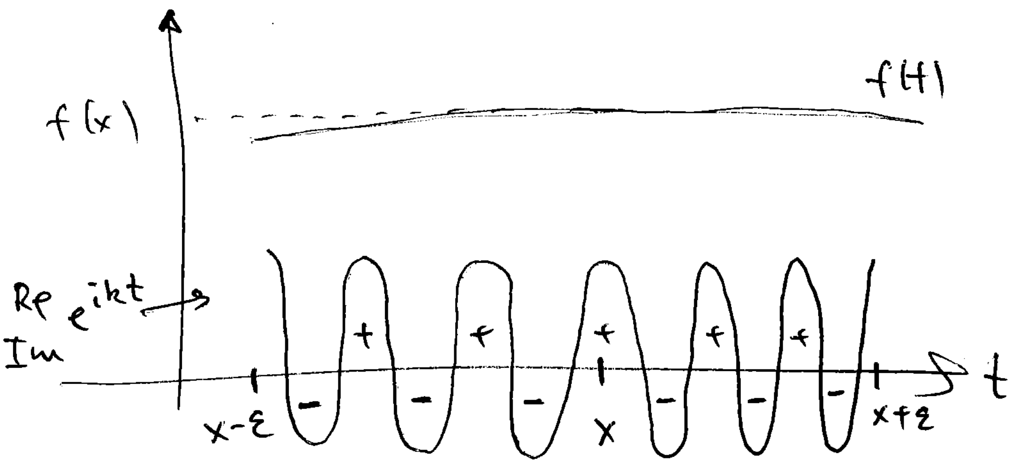
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig diff.-bar. Dann gilt für

$$\tilde{f}(k) := \int_a^b f(x) e^{ikx} \, dx \quad , \quad k \in \mathbb{R}$$

dass $\lim\limits_{k \to \pm\infty} \tilde{f}(k) = 0$.

6.24 Bemerkung

- $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt Fourier-Transformierte von f (modulo Vorfaktor)
- wird später ($\geq$ Ana 3) verallg. auf integrierbare f $\rightsquigarrow$ Riemann-Lebesgue-Lemma
- Moral: für $|k| \gg \frac{1}{\varepsilon} \gg \sup\limits_{t \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]} |f'(t)|$



„+"- und „−"-Anteile heben sich weg für $|k| \to \infty$

Beweis von Satz 6-23   Sei $k \neq 0$

$$\tilde{f}(k) \overset{PI}{=} f(x)\frac{e^{ikx}}{ik}\Big|_a^b - \frac{1}{ik}\int_a^b f'(x)e^{ikx}\,dx$$

$$\Rightarrow |\tilde{f}(k)| \leq \frac{1}{|k|}\Big(\underbrace{|f(b)|}_{<\infty} + \underbrace{|f(a)|}_{<\infty}\Big) + \frac{1}{|k|}(b-a)\underbrace{\sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|}_{=:M<\infty}$$

f' stetig auf $[a,b] \Rightarrow$ beschr.

∎

6.25 Satz (Substitutionsregel)

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig, sei $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diff-bar.

Dann gilt
$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,dy \qquad (*)$$

Beweis: (Kettenregel!)

Für $g := (f\circ\varphi)\varphi'$ gilt:

- $g: [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig
- $G := F\circ\varphi$ ist Stammfkt. zu g

  ↑ Stammfkt zu f (ex. nach MDI 6.16)

da (Kettenregel!) $G' = (\underbrace{F'}_{f}\circ\varphi)\varphi' = g$

also: rechte Seite $(*) \overset{6.19}{=} F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$

linke Seite $(*) \overset{6.19}{=} G(b) - G(a) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$

∎

Merkregel: Für $y = \varphi(x)$ gilt

- $\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)$; informell (!): $dy = \varphi'(x)\,dx$
- $x = a$ entspricht $y = \varphi(a)$
  $x = b$ $\quad y = \varphi(b)$

6.26 Beispiele

(a) $$\int_a^b f(\underbrace{mx+c}_{y=\varphi(x)})\,dx \underset{dy = m\,dx}{=} \frac{1}{m}\int_a^b f(\underbrace{mx+c}_{y})\underbrace{m\,dx}_{dy} = \frac{1}{m}\int_{ma+c}^{mb+c} f(y)\,dy$$

für $m, c \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$

(b) Sei $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diff-bar und $\varphi(x) \neq 0$ $\forall x \in [a,b]$

$$\Rightarrow \int_a^b \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx \underset{y=\varphi(x)}{=} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{1}{y}\,dy \underset{\text{Bsp. 6.20 (b)}}{=} \ln|\varphi(x)|\Big|_a^b$$

(c) $$\int^x \arctan(t)\,dt = \int^x \underbrace{\arctan(t)}_{f}\cdot\underbrace{1}_{g'}\,dt$$

$$\overset{PI}{=} x\arctan(x) - \underbrace{\int^x \frac{1}{1+t^2}\,2t\cdot\frac{1}{2}\,dt}_{\frac{1}{2}\ln(1+x^2)} \quad (b)$$

(Probe durch Differenzieren !)

6.27. Satz (Vertauschung von Integration mit Limiten)

$\forall n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kgt. gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ $\left(\overset{\text{Satz } 3.33}{\Longrightarrow} f \text{ stetig!}\right)$

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \left(= \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx \right)$$

Beweis

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx \right| \le \int_a^b \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\le \sup_{y\in[a,b]} |f(y)-f_n(y)|}\,dx$$

$$\le \|f - f_n\|_\infty (b-a) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

∎

Beispiel: Sei $0 < a < b$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b e^{-nx^2}\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} e^{-nx^2}\,dx = 0$$

$$\sup_{x\in[a,b]} e^{-nx^2} = e^{-na^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Eine Anwendung:

6.28. Satz (Vertauschung von Differentiation mit Limiten)

$\forall n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig diff.bar, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kgt. punktweise gegen $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ und $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ kgt. gleichmässig auf $[a,b]$. Dann ist f stetig diff.bar und

$$\lim_{n\to\infty} (f_n') = f' \qquad \left(= \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' \right)$$

Beweis: Sei $g := \lim_{n\to\infty} f_n'$ $\left(\overset{\text{Satz 3.33}}{\Longrightarrow} g \text{ stetig auf } [a,b]\right)$

zu zeigen: $g = f'$. Nach HDI 6.16:

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,dt \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a,b]$$

$$\Big\downarrow \text{pkt.-w Kgz.} \qquad\qquad \Big\downarrow \text{Satz 6.27}$$

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt \quad \overset{\text{HDI 6.16}}{\Longrightarrow}$$ f diff.-bar und $f' = g$, also stetig diff.-bar ∎

6.29 Warnung

$$f_n(x) := \frac{1}{n}\sin(nx) \Rightarrow \sup_{x\in[a,b]} \underbrace{|f_n(x)|}_{\le \frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

also $(f_n)_n$ glm. gegen 0 kgt.,

Aber: $f_n'(x) = \cos(nx)$ kgt. nicht für $n \to \infty$.

$\boxed{\text{6.30 Korollar}}$ (Gliedweise Differentiation von Potenzreihen)

Sei $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ Potenzreihe mit Kgz.-radius R. Dann gilt

$$\forall x \in\,]-R,R[\,: \quad \frac{d}{dx}\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cdot n x^{n-1}$$

(insbes. ist $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ diff.-bar).

Zusatz: $x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ bel. oft diff.-bar auf $]-R,R[$

<u>Beweis</u>: Für $N \in \mathbb{N}$ sei $f_N(x) := \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \quad \forall x \in]-R,R[$

Sei $0 < \rho < R$ bel. fest

(i) $\forall N \in \mathbb{N}$ ist f_N stetig diff.bar auf $[-\rho,\rho]$

(ii) $f_N(x) \xrightarrow{N\to\infty} f(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n \quad \forall x \in [-\rho,\rho]$

(iii) $f_N'(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{N-1} (n+1) a_{n+1} x^n$

Beh.: Kgz. radius von $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} (n+1) a_{n+1} x^n$ ist R, da

- $(n+1)^{1/n} = e^{1/n \ln(n+1)} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \quad (=e^0)$
- Satz von Hadamard ✓

Satz 4.23 $\Rightarrow$ $(f_N')_N$ kgt. <u>glm.</u> auf $[-\rho,\rho]$

(i) - (iii) $\overset{\text{Satz 6.28}}{\Rightarrow}$ f diff. bar auf $[-\rho,\rho]$ und

$$f'(x) = \lim_{N\to\infty} f_N'(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} (n+1) a_{n+1} x^n \quad \forall x \in [-\rho,\rho]$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{N}_0} n a_n x^{n-1}$$

$\rho < R$ bel.

$\Rightarrow$ Beh. ☒

Zusatzbeh. per Induktion $\rightsquigarrow$ Übung!
(siehe expl. gemacht...)

<u>6.31 Beispiel</u> Für $|x| < 1$ gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n x^n = x \sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{n x^{n-1}}_{\frac{d}{dx} x^n} \overset{\text{Kor. 6.30}}{=} x \frac{d}{dx} \Big(\underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n}_{\frac{1}{1-x} - 1} \Big)$$

$$= \frac{x}{(1-x)^2}$$