6. Integrieren von Funktionen auf $\mathbb{R}$

Im ganzen Kapitel: $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$; $I := [a, b]$

$f : I \to \mathbb{R}$

6.1. Riemann-integrierbare Funktionen

6.1. Definition

(a) $\varphi : I \to \mathbb{R}$ Treppenfunktion

$$:\Longleftrightarrow \begin{cases} \exists n \in \mathbb{N} \text{ und Unterteilung } a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b \\ \text{von } I, \text{ und } \exists c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}, \text{ so dass } \forall j = 1, \ldots, n : \varphi|_{]x_{j-1}, x_j[} = c_j \end{cases}$$

(Die Werte $\varphi(x_j)$, $j = 0, \ldots, n$ sind nicht vorgeg.).

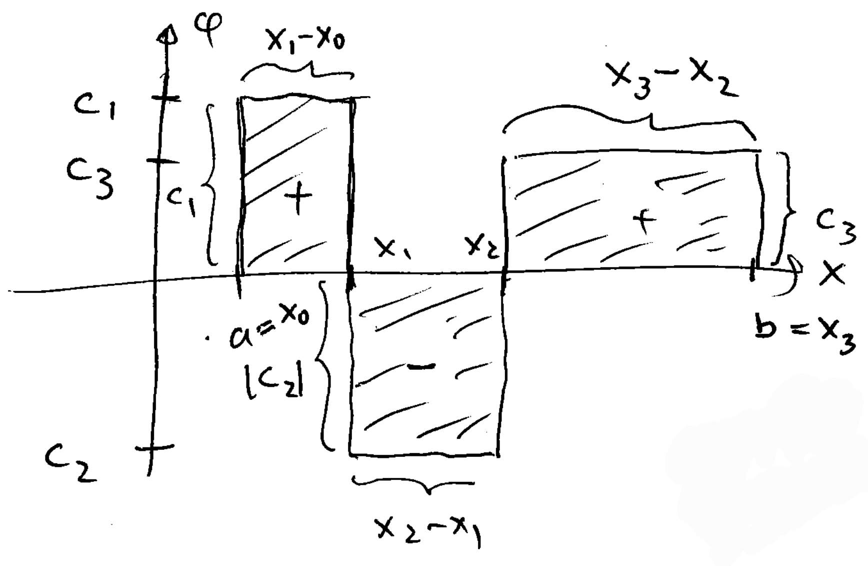
(b) $\mathcal{T}(I) := \{\varphi : I \to \mathbb{R} : \varphi \text{ Treppenfkt}\}$

Menge der Treppenfkt.'en auf I

(c) Für Treppenfkt $\varphi \in \mathcal{T}(I)$ ist

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx := \sum_{j=1}^n c_j (x_j - x_{j-1})$$ (Riemann) Integral von φ

auch: $\int_a^b dx\, \varphi(x)$; $\int_a^b \varphi\, dx$; $\int_I \varphi(x)\,dx$; $\int_I dx\, \varphi(x)$ etc



6.2. Bemerkung

$\int_a^b \varphi(x)\,dx$ ist wohldef., d.h. unabhängig von der gewählten Unterteilung von φ, denn:

für $x_{j-1} = y_k < y_{k+1} < y_{k+l-1} < y_{k+l} = x_j$ gilt

$$c_j(x_j - x_{j-1}) = \sum_{\kappa=1}^{l} c_j(y_{k+\kappa} - y_{k+\kappa-1})$$

6.3 Lemma

(a) $\mathcal{J}(I)$ ist Vektorraum (über $\mathbb{R}$) und $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{J}(I)$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_a^b (\lambda\varphi + \mu\psi)(x)\,dx = \lambda \int_a^b \varphi(x)\,dx + \mu \int_a^b \psi(x)\,dx$$

Linearität

(b) $\forall \varphi \in \mathcal{J}(I)$ mit $\varphi \geq 0$, d.h. $\varphi(x) \geq 0 \ \forall x \in I$, gilt: $\int_a^b \varphi(x)\,dx \geq 0$

Monotonie

Beweis (b) klar, da $c_j \geq 0$ in Darstellung von φ

(a) • Vektorraum:

- $0 \in \mathcal{J}(I)$ klar
- Sei $\varphi \in \mathcal{J}(I)$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda\varphi \in \mathcal{J}(I)$, denn $c_j \to \lambda c_j$
- Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{J}(I)$ mit

$$\varphi|_{]x_{j-1}, x_j[} = c_j, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\psi|_{]y_{k-1}, y_k[} = d_k, \quad k = 1, \dots, m$$

Definiere eindeutige Unterteilung

$a = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_{\nu-1} < \xi_\nu = b$, so dass

$\{\xi_\alpha : \alpha = 1, \dots, \nu-1\} = \{x_j : j = 1, \dots, n-1\} \cup \{y_k : k = 1, \dots, m-1\}$

d.h. gröbste Unterteilung, die Unterteilungen von φ und ψ enthält ($\Leftrightarrow$: gröbste Verfeinerung)

$$\Rightarrow \varphi\big|_{]\xi_{\alpha-1}, \xi_\alpha[} = c_{j(\alpha)}, \quad \psi\big|_{]\xi_{\alpha-1}, \xi_\alpha[} = d_{k(\alpha)}$$

$$\Rightarrow (\varphi + \psi)\big|_{]\xi_{\alpha-1}, \xi_\alpha[} = c_{j(\alpha)} + d_{k(\alpha)} =: e_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, \nu.$$

also $\varphi + \psi \in \mathcal{T}(I)$

Linearität: $\int_a^b (\lambda\varphi + \mu\psi)(x) = \sum_{\alpha=1}^{\nu} (\lambda c_{j(\alpha)} + \mu d_{k(\alpha)})(\xi_\alpha - \xi_{\alpha-1})$

$$= \lambda \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{\nu} c_{j(\alpha)}(\xi_\alpha - \xi_{\alpha-1})}_{\overset{\text{wegen } 6.2}{=} \sum_{j=1}^{n} c_j (x_j - x_{j-1})} + \mu \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{\nu} d_{k(\alpha)}(\xi_\alpha - \xi_{\alpha-1})}_{\overset{\text{wegen } 6.2}{=} \sum_{k=1}^{m} d_k (y_k - y_{k-1})}$$

$$= \lambda \int_a^b \varphi(x)\,dx + \mu \int_a^b \psi(x)\,dx \qquad \blacksquare$$

6.4 Definition Sei $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt ($\exists C > 0 : |f(x)| \le C \ \forall x \in I$)

(a) Oberintegral $\mathcal{O}_I(f) := \inf \left\{ \int_I \varphi(x)\,dx : \varphi \in \mathcal{T}(I), \varphi \ge f \right\}$

Unterintegral $\mathcal{U}_I(f) := \sup \left\{ \int_I \psi(x)\,dx : \psi \in \mathcal{T}(I), \psi \le f \right\}$

(b) f Riemann-integrierbar (über I) $:\Leftrightarrow$

$$\mathcal{O}_I(f) = \mathcal{U}_I(f) =: \int_I f(x)\,dx$$

Riemann-Integral von f über I

auch: $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_I dx\, f(x)$, $\int_a^b dx\, f(x)$

(c) Sei $f: I \to \mathbb{C}$ beschränkt

- f Riemann-integrierbar $:\Leftrightarrow$ Re f & Im f Riemann-integrierbar
- $\int_I f(x)dx := \int_I (\mathrm{Re} f)(x)dx + i \int_I (\mathrm{Im} f)(x)dx$

6.5 Bemerkung

(i) Falls $m_- \le f \le m_+$ $(m_\pm \in \mathbb{R})$, so ist mit $|I| := b-a$

$$m_-|I| \le \mathcal{U}_I(f) \le \mathcal{O}_I(f) \le m_+|I|$$

$\varphi = m_-$ zugelassen $\qquad \psi = m_+$ zugelassen

Lemma 6.3(b): $\varphi \le \psi \Rightarrow \int_I \varphi\, dx \le \int_I \psi\, dx$

(ii) $\forall \varphi \in \mathcal{J}(I)$: φ ist Riemann-integrierbar mit

$$\int_I \varphi(x)dx = \mathcal{O}_I(\varphi) = \mathcal{U}_I(\varphi) = \sum_{j=1}^n c_j(x_j - x_{j-1})$$

$\varphi|_{]x_{j-1},x_j[} = c_j$

(iii) $f = 1_{\mathbb{Q}} := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$ $\qquad$ nicht (Riemann) integrierbar über $[0,1] =: I$

$\mathcal{O}_I(1_{\mathbb{Q}}) = 1$
inf durch $1_{[0,1]}$ realisiert,
da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$

$\mathcal{U}_I(1_{\mathbb{Q}}) = 0$
sup durch 0 realisiert,
da $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$

(iv) Name der Integrationsvariablen irrelevant

(so wie Summationsindex!)

$$\int_I f(x)dx = \int_I f(t)dt = \int_I f(y)dy = \dots$$

6.6 Definition Sei $f: I \to \mathbb{R}$ beschränkt

Sei $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ eine Unterteilung von I und

$\forall j \in \{1,\ldots,n\}$ sei $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ „Stützstelle"

- $Z := \left((x_j)_{j\in\{0,\ldots,n\}}, (\xi_j)_{j\in\{1,\ldots,n\}} \right)$ Zerlegung (= Unterteilung mit Stützstellen)

- $\mu(Z) := \max\limits_{j=1,\ldots,n} (x_j - x_{j-1})$ Feinheit der Zerlegung

- Riemann-Approximante von f zur Zerlegung Z:

  Treppenfkt $\varphi_Z \in \mathcal{T}(I)$ mit

  $$\varphi_Z|_{]x_{j-1},x_j[} = f(\xi_j) \quad \forall j = 1,\ldots,n$$

- Riemann-Summe von f zur Zerlegung Z:

  $$R(Z,f) := \int_I \varphi_Z(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

Nächster Satz dient Charakterisierung Riemann-integrierbarer Funktionen:

6.7 Satz Sei $f: I \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann sind äquivalent: (i) f ist Riemann integrierbar

(ii) $\exists J \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall$ Zerlegungen Z mit $\mu(Z) < \delta$:

$$|J - R(Z,f)| < \varepsilon$$

symbolische (!) Schreibweise: $\lim\limits_{\mu(Z)\to 0} R(Z,f) = J$

(iii) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \varphi_\pm \in \mathcal{T}(I)$ mit $\varphi_- \leq f \leq \varphi_+$

und $$\int_I \varphi_+(x)\,dx - \int_I \varphi_-(x)\,dx < \varepsilon$$

Trifft eine der Aussagen (i)-(iii) zu, so ist
$$J = \int_I f(x)\,dx.$$

Beweis: (iii) $\Rightarrow$ (i): Da $\forall \varphi_\pm \in \mathcal{T}(I)$ mit $\varphi_- \leq f \leq \varphi_+$:
$$\int_I \varphi_-(x)\,dx \leq \mathcal{U}_I(f) \leq \mathcal{O}_I(f) \leq \int_I \varphi_+(x)\,dx \Rightarrow \text{Beh.}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei $\varepsilon > 0$ und $a = x_0 < x_1 < \dots x_n = b$ mit
$$\max_{j=1,\dots,n} (x_j - x_{j-1}) < \delta$$

$$\overset{\text{u.V}}{\Rightarrow} \forall j = 1,\dots,n \;\; \forall \xi_j \in \,]x_{j-1}, x_j[\,: \quad \left| J - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon \quad (*)$$

Sei $$f_j^\pm := \begin{matrix}\sup\\ \inf\end{matrix} \left\{ f(x) : x \in \,]x_{j-1}, x_j[\, \right\} \quad (f \text{ beschränkt!})$$

$$\Rightarrow \exists \left(\eta_{j,\nu}^\pm\right)_{\nu \in \mathbb{N}} \subseteq \,]x_{j-1}, x_j[\, \text{ mit } \lim_{\nu \to \infty} f(\eta_{j,\nu}^\pm) = f_j^\pm$$

Wähle $\xi_k = \eta_{k,\nu}^\pm$ in $(*)$ $\overset{\nu \to \infty}{\Rightarrow} \left| J - \sum_{k=1}^{n} f_k^\pm (x_k - x_{k-1}) \right| \leq \varepsilon \quad (**)$

somit gilt für $\varphi_\pm \in \mathcal{T}(I)$,

$$\varphi_\pm\big|_{]x_{k-1}, x_k[} := f_k^\pm, \quad \varphi_\pm(x_k) := f(x_k),$$

dass $\varphi_- \leq f \leq \varphi_+$ und

$$\int_I \varphi_+(x)\,dx - \int_I \varphi_-(x)\,dx \overset{\text{aus } (**)}{\leq} 2\varepsilon \quad \checkmark$$

(i) ⇒ (ii): Sei $\varepsilon > 0$ und $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ eine gemeinsame Unterteilung von φ_+ und φ_-, wobei $\varphi_- \le f \le \varphi_+$ und

$$\left| \int_I \varphi_\pm(x)\,dx - \int_I f(x)\,dx \right| < \varepsilon \qquad (0)$$

Sei $\delta > 0$, so dass

$$2\delta n \left(\sup_{x\in I} |\varphi_+(x)| + \sup_{x\in I} |\varphi_-(x)| \right) < \varepsilon \qquad (1)$$

Sei $\mathcal{Z} = \left((y_k)_{k=0,\dots,m}, (\xi_k)_{k=1,\dots,m} \right)$ bel. Zerlegung mit $\mu(\mathcal{Z}) < \delta$

Sei $a = z_0 < z_1 < \dots < z_\nu = b$ gröbste gemeinsame Unterteilung von $(x_j)_j$ und $(y_k)_k$ (gröbste Verfeinerung)

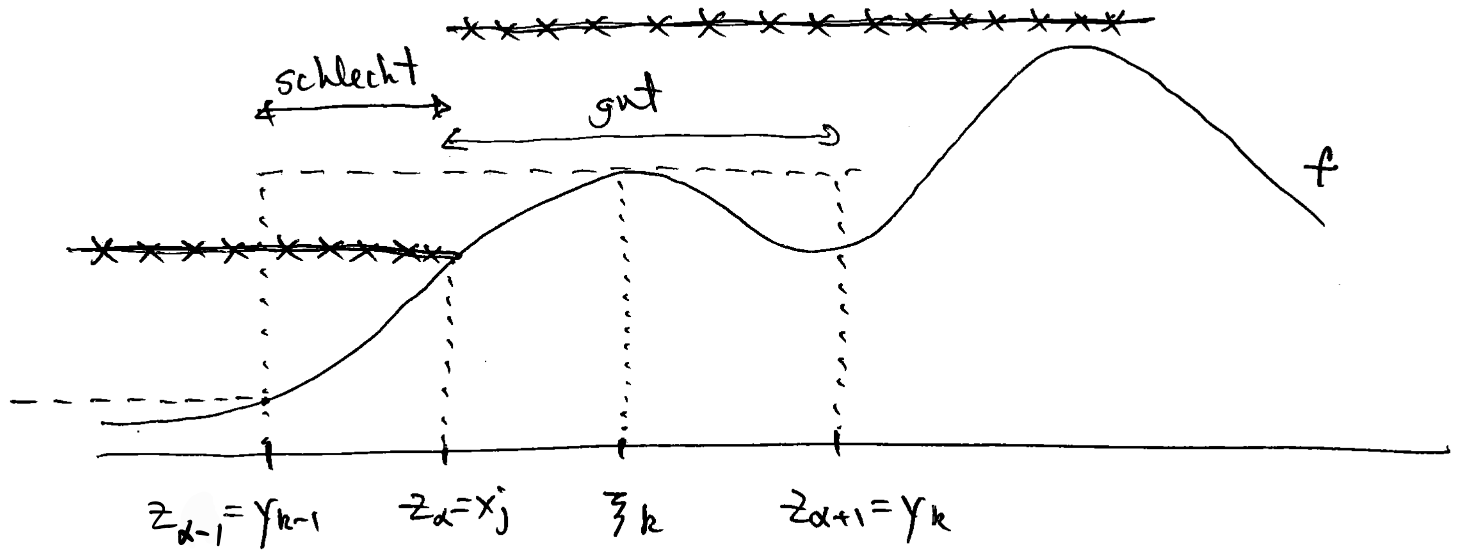
Also $\nu \le m + (n-1)$ [man denke sich die x_j's in die bestehende Unterteilung $(y_k)_k$ „reingeworfen"]

Def. $\alpha \in \{1,\dots,\nu\}$ schlecht $:\Leftrightarrow \forall k = 1,\dots,m : \xi_k \notin \,]z_{\alpha-1}, z_\alpha[$

ansonsten: α gut

$\Rightarrow$ (2) $\exists$ höchstens $2(n-1)$ schlechte α's (ungünstigster Fall: $x_j = \xi_{k(j)}\ \forall j = 1,\dots,n-1$)

(3) α gut $\Rightarrow \varphi_- \le \varphi_{\mathcal{Z}} \le \varphi_+$ auf $]z_{\alpha-1}, z_\alpha[$



- - - - - - - - - Werte von $\varphi_{\mathcal{Z}}$ $(= f(\xi_k)$ auf $]y_{k-1}, y_k[)$

×××××××× Werte von φ_+ $(\ge f$ auf $]x_{k-1}, x_k[)$

Für $\# \in \{+, -, \mathcal{Z}\}$, $\alpha \in \{1,..,\nu\}$, sei $c_{\#,\alpha} := \varphi_\#(w_\alpha)$

wobei $w_\alpha \in]z_\alpha, z_{\alpha-1}[$ (Intervall, auf dem $\varphi_\#$ konstant)

$$\int_{I,g} \varphi_\#(x)dx := \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \text{ gut}}}^{\nu} c_{\#,\alpha}(z_\alpha - z_{\alpha-1})$$

$$\Rightarrow \quad (4): \left| \int_I \varphi_\#(x)dx - \int_{I,g} \varphi_\#(x)dx \right| \le \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \text{ schlecht}}}^{\nu} \underbrace{|c_{\#,\alpha}|}_{\le \sup_{x\in I}|\varphi_+(x)| + \sup_{x\in I}|\varphi_-(x)|} \cdot \underbrace{(z_\alpha - z_{\alpha-1})}_{\le \mu(\mathcal{Z}) < \delta} \overset{(2),(1)}{<} \varepsilon$$

$$(5): \int_{I,g} \varphi_-(x)dx \overset{(3)}{\le} \int_{I,g} \varphi_{\mathcal{Z}}(x)dx \overset{(3)}{\le} \int_{I,g} \varphi_+(x)dx$$

aus (4) $\wedge$ (0) $\Rightarrow$
$$\left| \int_{I,g} \varphi_+(x)dx - \int_{I,g} \varphi_-(x)dx \right| \le \left| \int_{I,g} \varphi_+(x)dx - \int_I \varphi_+(x)dx \right| + \left| \int_I \varphi_+(x)dx - \int_I \varphi_-(x)dx \right| + \left| \int_I \varphi_-(x)dx - \int_{I,g} \varphi_-(x)dx \right|$$

$$\overset{(0),(4)}{<} \varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon$$

$$\overset{(5)}{\Rightarrow} \quad (6): \quad 0 \le \int_{I,g} \varphi_+(x)dx - \int_{I,g} \varphi_{\mathcal{Z}}(x)dx \le 4\varepsilon$$

Somit
$$\left| \int_I f(x)dx - \underbrace{R(\mathcal{Z}, f)}_{\int_I \varphi_{\mathcal{Z}}(x)dx} \right| \le \left| \int_I f(x)dx - \int_I \varphi_+(x)dx \right| + \left| \int_I \varphi_+(x) - \int_{I,g} \varphi_+ dx \right|$$
$$+ \left| \int_{I,g} \varphi_+ dx - \int_{I,g} \varphi_{\mathcal{Z}}(x)dx \right| + \left| \int_{I,g} \varphi_{\mathcal{Z}}(x)dx - \int_I \varphi_{\mathcal{Z}}(x)dx \right|$$

$$\overset{(0),(4),(6),(4)}{<} \varepsilon + \varepsilon + 4\varepsilon + \varepsilon = 7\varepsilon$$

$\blacksquare$

$\boxed{\text{6.8 Definition}}$ Sei $N \subseteq \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} N \text{ (Lebesgue-)} \\ \underline{\text{Nullmenge}} \end{array}\right\} :\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0\ \exists \text{ offene Intervalle } J_n \subseteq \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}: \\ N \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n \quad \text{und} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} |J_n| < \varepsilon \end{array} \right.$$

„offene Überdeckung von N"

$\boxed{\text{6.9. Satz}}$ (a) $\forall k \in \mathbb{N}$ sei $N_k \subseteq \mathbb{R}$ Nullmenge

$\Rightarrow \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k$ ist Nullmenge

(b) Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ abzählbar. Dann ist M Nullmenge

__Beweis__ (a) Sei $\varepsilon > 0$. $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists$ u. V. offene Überdeckung $N_k \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n^k$ mit Intervallen, so dass

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |J_n^k| < 2^{-k} \varepsilon$$

$\Rightarrow \left(\bigcup_k N_k\right) \subseteq \underbrace{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}}}_{\text{abzählbar}} J_n^k$ mit offene Intervalle und

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} |J_n^k| < \varepsilon \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{-k} = \varepsilon \quad \checkmark$$

(b) . $\forall x \in \mathbb{R}: \{x\}$ ist Nullmenge (1 Intervall reicht!)

$\Rightarrow$ Beh. mit (a) ∎

Ein Integrabilitätskriterium:

$\boxed{\text{6.10 Satz}}$ Sei $f: I \to \mathbb{R}$ und $N_f := \{x \in I : f \text{ nicht stetig in } x\}$

Dann gilt:

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ beschränkt} \\ \text{und } N_f \text{ Nullmenge} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow f \text{ Riemann-integrierbar auf } I$$

Beweis: Hier nur "$\Rightarrow$"; für "$\Leftarrow$" siehe z.B. Heuser, Satz 84.2

Sei $\varepsilon > 0$

- Sei $x \in I \setminus N_f \overset{\text{stetig}}{\Rightarrow} \exists \delta_x > 0 \ \forall x' \in B_{\delta_x}(x) \cap I$:

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon \qquad (1)$$

- Sei $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ offene Überdeckung aus Intervallen von N_f mit

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |J_n| < \varepsilon \quad (2)$$

$\Rightarrow I \subseteq \left(\bigcup_{x \in I \setminus N_f} B_{\delta_x}(x) \right) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n \right)$. Da I kompakt (vgl. Bsp. 3.25) $\underset{\text{(siehe unten)}}{\overset{\text{Satz v. Heine-Borel}}{\Longrightarrow}}$ $\exists$ endliche Teilüberdeckung,

d.h. $\exists \kappa, \nu \in \mathbb{N} \ \exists x_1, \dots, x_\kappa \in I \setminus N_f, \ n_1, \dots, n_\nu \in \mathbb{N}$ mit

$$I \subseteq \left(\bigcup_{k=1}^{\kappa} B_{\delta_{x_k}}(x_k) \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\nu} J_{n_j} \right)$$

Sei $a = z_0 < z_1 < \dots < z_{\lambda-1} < z_\lambda = b$ Unterteilung von $I = [a,b]$, so dass $\forall l = 1, \dots, \lambda$: entweder $\exists k = 1, \dots, \kappa$:

$$I_l := \,]z_{l-1}, z_l[\, \subseteq B_{\delta_{x_k}}(x_k) \quad (\text{„}l \text{ gut"})$$

oder $\exists j = 1, \dots, \nu$: $\quad I_l \subseteq J_{n_j} \quad$ („l schlecht")

Seien $\varphi_\pm \in \mathcal{T}(I)$ mit $\varphi_\pm\big|_{I_l} := \begin{matrix}\sup \\ \inf\end{matrix}_{x \in I_l} f(x)$ konstant $\forall l = 1, \dots, \lambda$

$$\Rightarrow 0 \le O_I(f) - U_I(f) \overset{\varphi_- \le f \le \varphi_+}{\le} \int_I \varphi_+ \, dx - \int_I \varphi_- \, dx = \sum_{l=1}^{\lambda} \left(\varphi_+\big|_{I_l} - \varphi_-\big|_{I_l} \right) |I_l|$$

$$= \sum_{l \text{ gut}} \underbrace{\left(\varphi_+\big|_{I_l} - \varphi_-\big|_{I_l} \right)}_{\le 2\varepsilon \ (1)} |I_l| + \sum_{l \text{ schlecht}} \underbrace{\left(\varphi_+\big|_{I_l} - \varphi_-\big|_{I_l} \right)}_{\le 2 \sup_{x \in I} |f(x)| =: 2S < \infty \text{ n.V.}} |I_l|$$

$$\le 2\varepsilon |I| + 2S \underbrace{\sum_{j=1}^{\nu} |J_{n_j}|}_{< \varepsilon \ (2)} < 2\varepsilon(|I| + S) \overset{\varepsilon > 0 \text{ bel.}}{\Longrightarrow} \text{Beh.} \qquad \blacksquare$$

Im Beweis von Satz 6.10 wurde ein Spezialfall des Überdeckungssatzes von Heine – Borel ($\rightsquigarrow$ Ana 2 !) verwendet:

| Spezialfall Heine – Borel | Seien $-\infty < a < b < \infty$; J eine (unendliche) Indexmenge und $\forall \alpha \in J$ sei I_α ein offenes Intervall. Es gelte $[a,b] \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} I_\alpha$

Dann $\exists N \in \mathbb{N}$ sowie $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in J$, so dass

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} I_{\alpha_n} \quad (\text{endliche Teilüberdeck.})$$

Beweis. Per Widerspruch. Ann. $\nexists$ endliche Teilüberdeckung von $[a,b] =: K_0$ $\Rightarrow$ mindestens eines der Intervalle $[a, \frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2}, b]$ besitzt keine endliche Teilüberdeckung; wähle eines davon, K_1, aus.

$\overset{\text{induktiv}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ Intervallschachtelung $\{K_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ mit

- $K_k \subseteq K_{k-1}$ $\quad \forall k \in \mathbb{N}$
- $|K_k| = |K_{k-1}|/2$
- (∗) K_k wird nicht durch endlich viele I_α's überdeckt

$\overset{\text{Intervallsch. Prinzip 2.69}}{\Longrightarrow}$ $\exists!\, x \in \mathbb{R} : x \in K_k \;\forall k \in \mathbb{N}_0$ (hier wurde die Abgeschlossenheit und Beschränktheit von $[a,b]$ benutzt!)

$\overset{\{I_\alpha\}_{\alpha \in J} \text{ Überd.}}{\Longrightarrow}$ $\exists \alpha_0 \in J : x \in I_{\alpha_0}$; I_{α_0} offen

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : x \in \,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\, \subseteq I_{\alpha_0}$

$\Rightarrow$ für k groß genug (so dass $|K_k| < \varepsilon$) $\Rightarrow x \in K_k \subseteq \,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\, \subset I_{\alpha_0}$

$\lightning$ (zu (∗))

$\blacksquare$

6.11 Korollar Sei $f: I \to \mathbb{R}$. Dann gilt:

f stetig oder stückweise stetig (d.h. N_f ist endliche Menge und f besitzt links- u. rechtsseitige Limiten in allen Punkten) $\Rightarrow$ f integrierbar auf I.

6.12 Korollar Sei $f: I \to \mathbb{R}$ monoton

$\Rightarrow$ f integrierbar auf I

Denn, es gilt:

6.13 Satz Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton. Dann ist N_f höchstens abzählbar.

Beweis. o.E. sei f isoton (sonst betrachte $-f$)

Monotonie $\Rightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$ existiert $\lim\limits_{y \nearrow x} f(y) =: f(x^-) \in \mathbb{R}$

und $\lim\limits_{y \searrow x} f(y) =: f(x^+) \in \mathbb{R}$

Für $M, n \in \mathbb{N}$ setze

$$\mathcal{U}_n^M := \left\{ x \in [-M, M] : f(x^+) - f(x^-) > \frac{1}{n} \right\}$$

$$\Rightarrow \quad N_f = \bigcup_{M \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n^M \qquad (*)$$

Da $0 \le \underset{\in \mathbb{R}}{f(M)} - \underset{\in \mathbb{R}}{f(-M)} > \frac{1}{n} \cdot \#\{\mathcal{U}_n^M\}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{U}_n^M$ endlich $\forall n, M \in \mathbb{N}$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow}$ N_f abzählbar $\blacksquare$