5.3 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

In diesem Unterkapitel: • Fkt.'en $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
• stets $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$

5.15 Definition

Sei $f: D \to \mathbb{R}$, sei $\xi \in D$.

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ hat lokales Maximum} \\ (\text{bzw. Minimum}) \text{ in } \xi \end{array}\right\} :\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in B_\varepsilon(\xi) \cap D: \\ f(\xi) \geq f(x) \quad (\text{bzw. } f(\xi) \leq f(x)) \end{array}\right.$$

- ξ heißt Maximalstelle (bzw. Minimalstelle)
- falls $\forall x \in (B_\varepsilon(\xi) \setminus \{\xi\}) \cap D$ sogar $f(\xi) > f(x)$: striktes lok. Max (analog für Min)
- Extremum: Maximum oder Minimum

Eine notwendige Bed. für Extrema:

5.16 Satz Sei $f:]a,b[\to \mathbb{R}$. Sei $\xi \in]a,b[$
lokales Extremum von f und f diff. bar in ξ

Dann gilt: $$f'(\xi) = 0$$

Beweis: o.E., sei ξ Maximalstelle (für Min analog!)

Sei $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(\xi) \subset]a,b[$, sei $x \in B_\varepsilon(\xi)$

$$\underset{\text{in } \xi}{\overset{f \text{ diff.bar}}{\Longrightarrow}} \quad f'(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \lim_{x \nearrow \xi} \underbrace{\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}}_{\geq 0} = \lim_{x \searrow \xi} \underbrace{\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}}_{\leq 0}$$

$$\Rightarrow \quad f'(\xi) = 0$$

∎

5.17 Warnung

(i) Bed. $f'(\xi)=0$ nicht hinreichend für lok. Extremum

Bsp.: $f: \begin{array}{l}]-1,1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{array}$ und $\xi = 0$

(ii) Randpkt.'e a, b ausgeschlossen in Satz 5.16

Bsp: $f: \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{array}$ und $\xi = 0$ oder $\xi = 1$

5.18. Satz (Rolle)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) = f(b)$ und f diff.bar auf $]a,b[$. Dann $\exists\, \xi \in]a,b[: f'(\xi) = 0$.

Beweis: 1. Fall: $f =$ konst. trivial

2. Fall: $f \neq$ konst

$\Rightarrow \exists\, x_0 \in]a,b[$ mit $f(x_0) \neq f(a)$. o.E. sei $f(x_0) > f(a)$ ("<" analog!)

Satz 3.26 $\Rightarrow$ f nimmt Maximum an,

d.h. $\exists\, \xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) \geq f(x)$ $\forall x \in [a,b]$

wegen $f(x_0) > f(a) \Rightarrow \xi \in]a,b[\Rightarrow$ Beh. mit Satz 5.16

5.19 Korollar (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

Seien $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und diff.bar in $]a,b[$. Sei $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in]a,b[$ ($\overset{\text{Rolle}}{\Longrightarrow} g(a) \neq g(b)$!). Dann gilt

$$\exists\, \xi \in]a,b[: f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\, g'(\xi).$$

Insbesondere für $g = \mathrm{id}$:

$$\exists\, \tau \in]a,b[: f'(\tau) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Beweis: Mittels Rolle für

$$\varphi(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$$

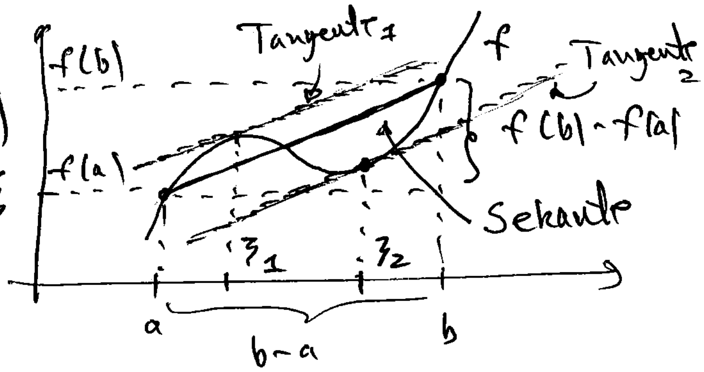
dann φ stetig auf $[a,b]$, diff-bar auf $]a,b[$ &

$$\varphi(a) = \varphi(b) = f(a)$$

$$\overset{\text{Rolle}}{\Longrightarrow} \exists \xi = \xi(g) \in]a,b[: 0 = \varphi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi) \quad \blacksquare$$

Geom. Interpretation für $g = \mathrm{id}$

Steigung Sekante durch $(a, f(a))$ & $(b, f(b))$
= Steigung Tangente bei ξ



Zusammenhang Monotonie & Ableitung in

$\boxed{\text{5.20 Satz}}$ Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a,b[$ diff-bar

(a) $f'(x) \geq 0 \;\; \forall x \in]a,b[\;\Rightarrow f$ isoton

$>$ $\;\Rightarrow f$ streng isoton

$\leq$ $\;\Rightarrow f$ antiton

$<$ $\;\Rightarrow f$ streng antiton

(b) f isoton $\Rightarrow f'(x) \geq 0 \;\; \forall x \in]a,b[$

f antiton $\Rightarrow \leq$

(hier kein extra Version für „streng"; Bsp: $f(x) = x^3$)

Beweis: Übung!

$\boxed{\text{5.21 Satz}}$ Sei $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ diff-bar und $\xi \in]a,b[$.

Sei
- f 2 mal diff. bar in ξ
- $f'(\xi) = 0$
- $f''(\xi) > 0$ (bzw. < 0)

Dann hat f in ξ ein striktes lokales Minimum (bzw. Max)

5.22. Bemerkung

Im Gegensatz zu Satz 5.16 gibt Satz 5.21 eine hinreichende, aber nicht notwendige Bed. für ein lokales Extremum. Bsp. $f: \begin{array}{l}]-1,1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^4 \end{array}$ und $\xi = 0$

Beweis von Satz 5.21 nur Fall $f''(\xi) > 0$ (< 0 analog!)

da $0 < f''(\xi) = \lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi}$

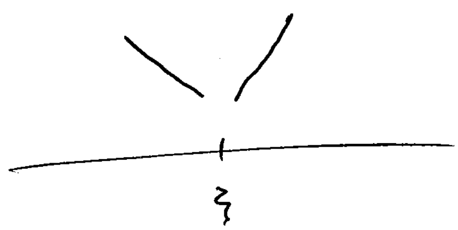
$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0: B_\varepsilon(\xi) \subseteq]a,b[$ & $\dfrac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} > 0 \quad \forall x \in B_\varepsilon(\xi) \setminus \{\xi\}$

da $f'(\xi) = 0 \Rightarrow$
- $f'(x) > 0 \quad \forall x \in]\xi, \xi + \varepsilon[$
- $f'(x) < 0 \quad \forall x \in]\xi - \varepsilon, \xi[$

Satz 5.20
$\Rightarrow$ f strikt antiton in $]\xi - \varepsilon, \xi[$

f " isoton in $]\xi, \xi + \varepsilon[$

$\Rightarrow$ striktes lok. Min in ξ $\boxtimes$



5.23 Satz (Regeln von de l'Hopital)

Seien $f, g :]a,b[\to \mathbb{R}$ diff.bar mit $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in]a,b[$

Sei **entweder** $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \searrow a} g(x)$

oder $\lim\limits_{x \searrow a} g(x) = \pm \infty$

Weiter **existiere** $\lim\limits_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: L$

Dann existiert $\lim\limits_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Zusatz: analog für $x \nearrow b$ und $x \to \pm\infty$

Beweis: • Fall „entweder": Sei $x_0 \in]a,b[$ und

$$\hat{f} : \begin{array}{l} [a,x_0] \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} f(x), & x \in]a,x_0] \\ 0, & x = a \end{cases} \end{array} \quad (\text{stetig!})$$

analog def. $\hat{g}$!

Mittelwertsatz mit $\hat{f}, \hat{g}$ auf $[a,x_0] \Rightarrow \exists \xi = \xi_{x_0} \in]a,x_0[$:

$$\frac{\hat{f}'(\xi)}{\hat{g}'(\xi)} = \frac{\hat{f}(x_0) - \hat{f}(a)}{\hat{g}(x_0) - \hat{g}(a)}, \quad \text{d.h.} \quad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$

$\Rightarrow$ Beh. mit $x_0 \searrow a$ $(\Rightarrow \xi_{x_0} \searrow a)$

• Fall „oder": Sei $\varepsilon > 0$, n.V. $\exists \delta > 0 \ \forall x \in]a, a+\delta[\ (\delta < |b-a|)$

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \varepsilon \quad (*)$$

Sei $a < x_0 < y_0 < a+\delta$, so dass $g(x) \neq 0 \ \forall x \in]a, y_0]$ (möglich n.V.!)

Mittelwertsatz auf $[x_0, y_0]$

$$\Longrightarrow \exists \xi \in]x_0, y_0[: \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(y_0) - f(x_0)}{g(y_0) - g(x_0)}$$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} \left| \frac{f(y_0)-f(x_0)}{g(y_0)-g(x_0)} - L \right| < \varepsilon$

$\overset{(**)}{\Rightarrow} \left| \frac{f(x_0)}{g(x_0)} - L - \frac{f(y_0)-Lg(y_0)}{g(x_0)} \right| < \varepsilon$

(**) $\frac{g(x_0)-g(y_0)}{g(x_0)} = 1 - \frac{g(y_0)}{g(x_0)}$ (!) > 0 $\forall x_0$ nahe bei a

$\overset{|\xi-\eta| \geq |\xi|-|\eta|}{\Rightarrow} \left| \frac{f(x_0)}{g(x_0)} - L \right| < \varepsilon + \left| \frac{f(y_0)-Lg(y_0)}{g(x_0)} \right|$

$\Rightarrow \limsup_{x_0 \downarrow a} \left| \frac{f(x_0)}{g(x_0)} - L \right| \leq \varepsilon \quad \underline{\forall \varepsilon > 0}$ (!) weil $\lim_{x \downarrow a} g(x) = \pm\infty$.

$\Rightarrow \limsup_{x_0 \downarrow a} \left| \frac{f(x_0)}{g(x_0)} - L \right| = 0 \overset{|\cdot| \geq 0}{\Rightarrow} \lim_{x_0 \downarrow a} \left| \frac{f(x_0)}{g(x_0)} - L \right| = 0$ ✓

Zusatz: $x \nearrow b$ klar; $x \to \pm\infty$ mittels $f(x) =: \tilde{f}(\frac{1}{x}), g(x) =: \tilde{g}(\frac{1}{x})$ aus Fall $x \underset{\searrow 0}{\nearrow 0}$ für $\tilde{f}, \tilde{g}$. ∎

5.24 Beispiel Sei $D =]0,\infty[$, $\alpha > 0$. Dann gilt:

(a) $\lim_{x \downarrow 0} x^\alpha \ln x = 0$ „ln wächst langsamer als jede Potenz"

(b) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$

Beweis (a): $\ln x \xrightarrow{x \downarrow 0} -\infty$, $x^{-\alpha} = e^{-\alpha \ln x} \xrightarrow{x \downarrow 0} \infty$

$\overset{\text{Satz 5.23}}{\Rightarrow} \lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{(\ln x)'}{(x^{-\alpha})'} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{1/x}{\alpha x^{-\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha} \lim_{x \downarrow 0} x^\alpha = 0$

(b) aus (a) mittels $y = \frac{1}{x}$ und $\ln \frac{1}{y} = -\ln y$. ∎