f_N stetig in $x \Rightarrow \exists\, \delta = \delta_{x,N,\varepsilon} > 0$ so dass $\forall y \in D$
mit $|x-y| < \delta$ gilt: $|f_N(x) - f_N(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\overset{(**)}{\Rightarrow}$ $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, also f stetig in x ∎

---

4. Potenzreihen und elementare Funktionen

Zur Vorbereitung eine Vertiefung unseres Verständnisses über:

4.1 Reihen (2. Teil)

Erinnerung: Sei $(a_k)_k \subseteq \mathbb{K}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$

$\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ kgt. $:\Leftrightarrow (s_n)_n$ kgt. $\Leftrightarrow (s_n)_n$ Cauchy.

$\boxed{\text{4.1. Satz}}$ $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ kgt. in $\mathbb{K} \Rightarrow (a_k)_k$ ist Nullfolge

Beweis: n. V. is $(s_n)_n$ Cauchy, d.h.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n,m \geq N: \quad |s_n - s_m| < \varepsilon \quad (*)$

- für $n = m+1$ gilt $s_{m+1} - s_m = a_{m+1}$

$(*) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m \geq N: \quad |a_{m+1}| < \varepsilon \Rightarrow$ Beh. ∎

4.2 Bemerkung

Es gilt nicht „$\Leftarrow$" in Satz 4.1

Bsp.: harmonische Reihe $a_k = \frac{1}{k}$

(vgl. Aufg. 2, Blatt 5)

$\boxed{\text{4.3 Definition}}$ Sei $(a_k)_k \subseteq \mathbb{K}$.

$$\left.\begin{array}{c}\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} a_k \quad \text{absolut konvergent} \\ (\text{in } \mathbb{K})\end{array}\right\} :\Longleftrightarrow \left\{ \sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k| \text{ kgt. } (\text{in } \mathbb{R})\right.$$

$\boxed{\text{4.4 Satz}}$ Sei $(a_k)_k \subseteq \mathbb{K}$. Dann gilt

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \text{ abs. kgt.} \Rightarrow \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \text{ kgt.}$$

4.5 Bemerkung

Es gilt nicht "$\Leftarrow$" in Satz 4.4

Bsp.: alternierende harmon. Reihe $a_k = \frac{(-1)^k}{k}$, sowie Aufgabe 2, Blatt 5 & Aufgabe 2, Blatt 6.

Beweis von Satz 4.4:

Sei $\sum_k |a_k|$ kgt. $\Rightarrow (s_n)_n$ ist Cauchy, wobei

$$s_n := \sum_{k=1}^n |a_k|$$

d.h. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n > m \geq N : |s_n - s_m| < \varepsilon$

Sei $\tilde{s}_n := \sum_{k=1}^n a_k$, dann gilt

$$|\tilde{s}_n - \tilde{s}_m| = \left|\sum_{k=m+1}^n a_k\right| \underset{\text{iterierte } \Delta\text{'s Ungl.}}{\leq} \left|\sum_{k=m+1}^n |a_k|\right| = |s_n - s_m|$$

$\Rightarrow (\tilde{s}_n)_n$ Cauchy $\Rightarrow$ Beh. $\blacksquare$

4.6 Satz (Majoranten-Kriterium)

Sei $(a_k)_k \subseteq \mathbb{K}$, $(c_k)_k \subseteq \mathbb{R}_{\geq}$, $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} c_k$ kgt.

und $|a_k| \leq c_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Dann ist $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} a_k$ absolut kgt.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Da $\sum\limits_k c_k$ kgt. $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > m \geq N$:

$$\sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m+1}^{n} c_k < \varepsilon \quad \text{(Partialsummen Cauchy)}$$

$$\Rightarrow (s_n)_n,\ s_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|, \text{ ist Cauchy} \Rightarrow \text{Beh.} \quad \blacksquare$$

4.7 Beispiel: $\forall \alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha \geq 2$, gilt: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ kgt.

Beweis: $\forall k \in \mathbb{N}$ gilt: $k^\alpha = \underbrace{k^{\alpha-2}}_{\geq 1} \underbrace{k^2}_{\geq k \frac{k+1}{2}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{2}{k(k+1)} =: c_k$$

$\Rightarrow$ Beh. mit Satz 4.6 und Bsp. 2.45 ✓

(Das Resultat ist noch nicht optimal: kgt. $\forall \alpha > 1$; später!)

4.8 Satz (Quotientenkriterium)

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ mit $a_k \neq 0 \quad \forall k \geq N$, $N \in \mathbb{N}$. Es existiere

$$\theta \in]0,1[\quad \forall k \geq N: \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq \theta \qquad (*)$$

Dann kgt. $\sum\limits_k a_k$ absolut.

unabhängig von k !

Beweis o. E. gelte (*) und $a_k \neq 0 \; \forall k \in \mathbb{N}$ (endlich viele Glieder abändern beeinflusst Kgz. nicht!)

$$|a_{k+1}| \leq \theta |a_k| \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \overset{\text{vollst. Ind.}}{\Rightarrow}$$

(*) $\Rightarrow$

$$|a_k| \leq \underbrace{\theta^{k-1} |a_1|}_{=: c_k \geq 0} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Da $s_n := \sum_{k=1}^{n} c_k = |a_1| \sum_{k=0}^{n-1} \theta^k \Rightarrow (s_n)_n$ kgt. da $|\theta| < 1$ (geometrische Reihe!)

$\Rightarrow$ Beh. mit Satz 4.6 ∎

4.9 Bemerkung

(i) Quotientenkriterium: (*) $\Leftrightarrow \limsup_{k\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$

(ii) Warnung: Die Bedingung: $\exists N \in \mathbb{N} \; \forall k \geq N$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$$

ist nicht hinreichend für Kgz. von $\sum_k a_k$

Bsp. harmonische Reihe $a_k = \frac{1}{k}$.

4.10 Beispiel

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{kgt. } \forall x \in \mathbb{K}, \text{ denn}$$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{|x|}{k+1} \underset{\forall k \geq \lfloor |x| \rfloor}{\leq} \frac{x}{\lfloor |x| \rfloor + 1} =: \theta < 1$$

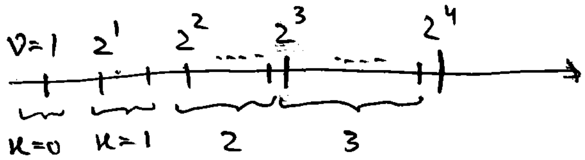
4.11 Cauchyscher Verdichtungssatz

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,\infty[$ antiton mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ kgt.} \iff \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ kgt.}$$

Beweis: Sei $s_n := \sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu$, $\sigma_k := \sum\limits_{\kappa=0}^{k} 2^\kappa a_{2^\kappa}$

„$\Leftarrow$" Sei $n < 2^k \Rightarrow s_n \le s_{2^{k+1}-1} = \sum\limits_{\kappa=0}^{k} \underbrace{\sum\limits_{\nu=2^\kappa}^{2^{\kappa+1}-1} a_\nu}_{(a_n \text{ antiton})}$



$$\le \sum_{\kappa=0}^{k} \sum_{\nu=2^\kappa}^{2^{\kappa+1}-1} a_{2^\kappa}$$

$$\le \sum_{\kappa=0}^{k} 2^\kappa a_{2^\kappa} = \sigma_k$$

Da n.V. $(\sigma_k)_k$ kgt., isoton $(a_n \ge 0) \Rightarrow \forall k: \sigma_k \le \sigma := \lim\limits_{\kappa\to\infty} \sigma_\kappa$

$\Rightarrow s_n \le \sigma \;\forall n \overset{(s_n)_n \text{ isoton}}{\Longrightarrow} (s_n)_n$ kgt. ✓

„$\Rightarrow$" sei $n > 2^k \Rightarrow s_n \ge s_{2^k} = \sum\limits_{\kappa=1}^{k} \underbrace{\sum\limits_{\nu=2^{\kappa-1}+1}^{2^\kappa} a_\nu}_{} + a_1$

$$\ge \sum_{\nu=2^{\kappa-1}+1}^{2^\kappa} a_{2^\kappa}$$

d.h., $s_n \ge a_1 + \sum\limits_{\kappa=1}^{k} 2^{\kappa-1} a_{2^\kappa}$

$$\ge \frac{1}{2} \sigma_k$$

da n.V. $(s_n)_n$ kgt. und isoton $\Rightarrow \forall n: s_n \le s := \lim\limits_{\nu\to\infty} s_\nu$

$\Rightarrow \sigma_k \le 2s \;\forall k \overset{(\sigma_n)_n \text{ isoton}}{\Longrightarrow} (\sigma_k)_k$ kgt. ∎

4.12 Korollar

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{kgt.,} & \text{für } \alpha > 1 \\ \text{divgt.,} & \text{für } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

(Bislang ist hier noch $\alpha \in \mathbb{Q}$; Resultat auch gültig für $\alpha \in \mathbb{R}$; Potenz mit irrationalen Exponenten wird erst später def.)

Beweis:

- $\alpha > 1 \Rightarrow q := \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} < 1$ (da: $\alpha - 1 = \frac{p}{q} \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$

  Ann: $(2^{-p})^{\frac{1}{q}} \geq 1 \Rightarrow 2^{-p} \geq 1$ ↯)

Somit
$$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha}}_{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}\right]^k} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \quad \text{kgt. da } 0 < q < 1$$
(geom. Reihe!)

$\Rightarrow$ Beh. mit Satz 4.11 ✓

- $\alpha < 1 \Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n} \cdot \underbrace{n^{1-\alpha}}_{\geq 1 \text{ wie oben}} \geq \frac{1}{n}$

Ann: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ kgt. $\Rightarrow \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{kgt.}}$ (Maj.krit.) ↯ $\Rightarrow$ Beh. ☒

4.13 Bemerkung Sei $\sum_n a_n$ kgt'e Reihe. Dann gilt:

(i) Man darf Klammern (zusätzlich) setzen: z.B.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{(a_1+a_2)}_{b_1} + \underbrace{a_3}_{b_2} + \underbrace{(a_4+a_5+a_6)}_{b_3} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

wobei $b_k := \sum_{n=N_k}^{N_{k+1}-1} a_n$ wobei $1 = N_1 < N_2 < N_3 < \ldots$

d.h. $(N_k)_k \subseteq \mathbb{N}$ strikt isoton

denn: $\sum_{k=1}^{K} b_k = \sum_{n=1}^{N_{K+1}-1} a_n = s_{N_{K+1}-1}$; da $(s_n)_n$ kgt.

so auch Teilfolge, mit selbem Limes.

(iii) Man darf bestehende Klammern nicht umsetzen

Bsp.: $a_n := 0 = 1-1$

$$0 = \sum_n a_n = (1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots$$

aber $1+(-1+1)+(-1+1)+(-1 \dots) = 1$

4.14 Satz (Wurzelkriterium)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ Folge und $\alpha := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0,\infty]$

Für die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ gilt, dass sie

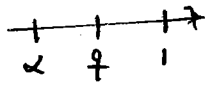
(i) konvergiert absolut, falls $\alpha < 1$

(ii) divergiert, falls $\alpha > 1$

(iii) konvergiert, konvergiert abs. oder divergiert, falls $\alpha = 1$

Bew: (i) Da lim sup größte Häuf.pkt., und $\alpha < 1$:

$$\exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N: \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2} =: q < 1$$



Damit

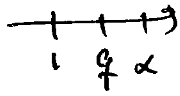
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| = \underbrace{\sum_{n=1}^{N} |a_n|}_{=:M<\infty} + \sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)^n \leq M + \sum_{n=1}^{\infty} q^n = M + \frac{1}{1-q} - 1 < \infty$$

$\Rightarrow \sum_n a_n$ abs kgt.

(ii) $\alpha > 1 \Rightarrow \exists$ Teilfolge $(a_{n_k})_k$ mit $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \xrightarrow{k\to\infty} \alpha > 1$

D.h. $\exists N\in\mathbb{N}\ \forall k\geq N: \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geq \frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2} =: q > 1$

$$\Rightarrow |a_{n_k}| \geq q^{n_k} \geq 1$$



$\Rightarrow (a_n)_n$ ist keine Nullfolge

$\Rightarrow \sum_n a_n$ divergent.

(iii) Für $\alpha = 1$ kann alles passieren:

	Konv.	Abs-konv.	Div.	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert}$
$\sum_n \frac{1}{n}$	×	×	✓	$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \to 1$
$\sum_n \frac{1}{n^2}$	✓	✓	×	$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \to 1$
$\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$	✓	×	×	$\sqrt[n]{\left\lvert\frac{(-1)^n}{n}\right\rvert} \to 1$

■

4.15 Umordnungssatz Sei $(a_n)_n \subseteq \mathbb{K}$ und $U: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv („Umordnung"). Dann gilt:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \text{ absolut kgt.} \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{U(n)} \text{ abs. kgt. und}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{U(n)}$$

4.16 Bemerkung (i) Vorraussetzung absolut kgt. wesentlich, d.h. ohne sie ist Beh. falsch ($\rightsquigarrow$ siehe auch: „Riemannscher Umordnungssatz")

Bsp: $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$; alt. harm. Reihe
kgt. aber nicht abs. kgt.

Betrachte folgende Umordnung:

$$\underbrace{-1 + \frac{1}{2}}_{n=1:\,b_1} \underbrace{-\underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)}_{2^0 \text{ Glieder}} + \frac{1}{4}}_{n=1:\,b_1} \underbrace{-\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)}_{2^1 \text{ Glieder}} + \frac{1}{6}}_{n=2:\,b_2} \underbrace{-\underbrace{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}\right)}_{2^2 \text{ Glieder}} + \frac{1}{8}}_{n=3:\,b_3}$$

$$- \cdots \underbrace{-\underbrace{\left(\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+3} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}-1}\right)}_{\geq 2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{2n+2}}_{\leq \frac{1}{6}\ (n\geq 2)}}_{\leq -\frac{1}{4}+\frac{1}{6} = -\frac{1}{12}}$$

$\Rightarrow$ mit jedem weiteren Summand wird ein Wert $\leq -\frac{1}{12}$ dazuaddiert $\Rightarrow$ Partialsumme antiton & nicht von unten beschr. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{N} b_n \xrightarrow{N\to\infty} -\infty$

(ii) Es gilt sogar für konv. Reihe $\sum_n a_n$

$$\sum_n a_{u(n)} \text{ kgt. } \forall \text{ Umordnungen } u \Rightarrow \sum_n a_n \text{ abs.-kgt.}$$

(folgt z. B. aus Riemannschen Umordnungssatz per Widerspruchsbew.)

Beweis von Satz 4.15: Sei $S := \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Da abs. kgt.:

$\exists N \in \mathbb{N}$ so dass
$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| - \sum_{n=1}^{N} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \left| S - \sum_{n=1}^{N} a_n \right| = \lim_{\substack{K\to\infty \\ K>N}} \Big| \underbrace{\sum_{n=1}^{K} a_n - \sum_{n=1}^{N} a_n}_{\sum_{n=N+1}^{K} a_n} \Big| \leq \lim_{\substack{K\to\infty \\ K>N}} \sum_{n=N+1}^{K} |a_n| = \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sei nun $M \in \mathbb{N}$ so groß, dass
$\{u(1), u(2), \dots, u(M)\} \supseteq \{1, \dots, N\}$ (d.h. $M \geq \max\{u^{-1}(j) : j = 1, \dots, N\}$)

$\Rightarrow \forall m \geq M$ gilt:
$$\left| S - \sum_{k=1}^{m} a_{u(k)} \right| \leq \underbrace{\left| S - \sum_{n=1}^{N} a_n \right|}_{<\varepsilon/2} + \Big| \underbrace{\sum_{n=1}^{N} a_n - \sum_{k=1}^{m} a_{u(k)}}_{-\sum_{\substack{k\leq m \\ u(k)>N}} a_{u(k)}} \Big|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\sum_{\substack{k\leq m \\ u(k)>N}} |a_{u(k)}|}_{\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} a_{u(k)}$ kgt. mit Summe S ✓

Wiederhole Argument mit $A := \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |a_{u(k)}|$ kgt. (mit Summe A), d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} a_{u(k)}$ abs. kgt. ☐

4.17 Satz (von Mertens über das Cauchy-Produkt von Reihen)

Seien $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} b_n$ kgt.'e Reihen in $\mathbb{K}$, eine davon absolut kgt.! Für $n\in\mathbb{N}_0$ sei $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Dann ist $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} c_n$ kgt. und $\underbrace{\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n\right)}_{=:A}\underbrace{\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} b_n\right)}_{=:B} = \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}_0} c_n}_{=:C}$

Zusatz: Falls beide Reihen $\sum_n a_n$ und $\sum_n b_n$ abs kgt., dann ist auch $\sum_n c_n$ abs kgt.

Beweis: o.E. sei $\sum_n a_n$ abs. kgt. Für $N\in\mathbb{N}$ seien A_N, B_N, C_N die zugeh. Partialsummen. $\Rightarrow$ $\left(C_N = \sum_{n=0}^{N} c_n\right)$

$$C_N = \underbrace{a_0 b_0}_{c_0} + \underbrace{(a_0 b_1 + a_1 b_0)}_{c_1} + \dots + \underbrace{(a_0 b_N + a_1 b_{N-1} + \dots + a_N b_0)}_{c_N}$$

$$= a_0 B_N + a_1 B_{N-1} + \dots + a_N B_0$$

$$\overset{B_N =: B - \beta_N}{=} A_N B - (a_0\beta_N + \dots + a_N\beta_0) =: A_N B - \omega_N$$

Wir zeigen: $(\omega_N)_N$ ist Nullfolge (dies impliziert den Satz, da $A_N \to A$)

es gilt: (i) $(\beta_N)_N$ ist Nullfolge (klar: $B_N \to B$)

(ii) $(a_n)_n$ ist Nullfolge

Sei $\varepsilon>0$ bel.: $\overset{(i)}{\Rightarrow} \exists k\in\mathbb{N}\ \forall N\geq k: |\beta_N| \leq \frac{\varepsilon}{S}$; $S := \sum_n |a_n| < \infty$

$$\Rightarrow \forall N\geq k \text{ gilt}: |\omega_N| = \left|\sum_{j=0}^{N} \beta_j a_{N-j}\right| \leq \sum_{j=0}^{k-1} |\beta_j|\cdot|a_{N-j}| + \underbrace{\sum_{j=k}^{N} \underbrace{|\beta_j|}_{\leq \frac{\varepsilon}{S}}\cdot|a_{N-j}|}_{\leq \varepsilon}$$

$$\Rightarrow \limsup_{N\to\infty} |\omega_N| \leq \sum_{j=0}^{k-1} |\beta_j| \underbrace{\limsup_{N\to\infty} |a_{N-j}|}_{=0\ (ii)} + \varepsilon = \varepsilon$$

$$\overset{\varepsilon>0 \text{ bel.}}{\Rightarrow} \limsup_{N\to\infty} |\omega_N| = 0 \Rightarrow (\omega_N)_N \text{ Nullfolge } \checkmark$$

Zusatz: Anwendung des bisherigen auf $\sum_n |a_n|$, $\sum_n |b_n|$

$\square$

4.2 Potenzreihen

$\boxed{4.18 \text{ Definition}}$ Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{K}$

(i) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ heißt Potenzreihe (in $\mathbb{K}$)

(ii) dadurch induzierte Funktion: $f_{(a_n)_n} : \begin{array}{l} \mathcal{D} \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \end{array}$

$$\mathcal{D} := \{x \in \mathbb{K} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ kgt.}\}$$

4.18 Beispiele

(i) $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{x^n}{n!} \overset{\text{Bsp. 4.10}}{\Longrightarrow} \mathcal{D} = \mathbb{K}$

(ii) $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x^n \overset{\text{geom.}}{\underset{\text{Reihe}}{\Longrightarrow}} \mathcal{D} = \{x \in \mathbb{K} ; |x| < 1\}$

(Divgz. $\forall x \in \mathbb{C}$, $|x| = 1$: später |

(iii) $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} n^n x^n$ für $x \neq 0$ und $n > \frac{2}{|x|}$

$\Rightarrow |n^n x^n| > 2^n \Rightarrow$ divgt.

$\Rightarrow \mathcal{D} = \{0\}$

Beispiele illustrieren die $\underline{\underline{3}}$ Möglichkeiten, die auftreten können.

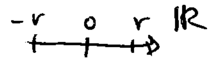
4.19 Satz von Cauchy-Hadamard

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ Potenzreihe in $\mathbb{K}$ mit Def.bereich $\mathcal{D}$. Dann gilt

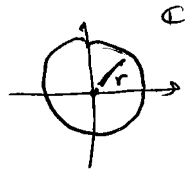
(i) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D} = \mathbb{K}$

(ii) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D} = \{0\}$

(iii) $\frac{1}{r} = r^{-1} := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \,]0,\infty[\quad \Rightarrow$



Inneres von $\mathcal{D}$ $\{x \in \mathbb{K} ; |x| < r\} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \{x \in \mathbb{K} : |x| \leq r\}$



(insbes.: $\sum_n a_n x^n$ divgt. für $|x| > r$)

4.20 Definition

r aus (iii) ist Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_n a_n x^n$. Konventionen: $r := \infty$ im Fall (i)

$r := 0$ im Fall (ii)

Beweis von Satz 4.19

Wurzelkriterium für $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} c_n$, $c_n := a_n x^n$ (Satz 4.14)

- (i) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = |x| \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{K}$

  $\Rightarrow$ abs kgt. $\forall x \in \mathbb{K}$

- analog im Fall (ii): $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \infty \quad \forall 0 \neq x \in \mathbb{K}$

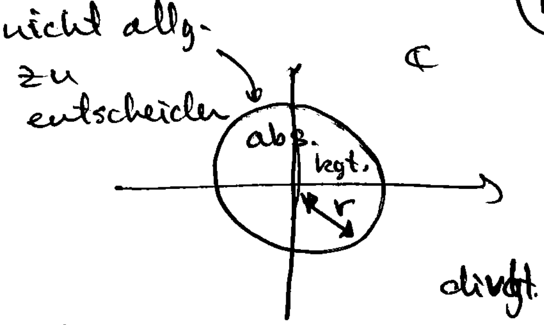
  $\Rightarrow$ divgt. $\forall 0 \neq x \in \mathbb{K}$

- Fall (iii): $|x| < r \Rightarrow \limsup \sqrt[n]{|c_n|} < 1 \Rightarrow$ abs kgt.

  $|x| > r \Rightarrow \quad$ " $\quad > 1 \Rightarrow$ divgt.

$\blacksquare$

4.21. Bemerkung



(i) Für $x \in \{x' \in \mathbb{K} : |x'| = r\}$
(Rand des Kgz.-kreises in $\mathbb{C}$, bzw. des Kgz.-intervalles in $\mathbb{R}$)

kann $\sum_n a_n x^n$ sowohl konvergieren als auch divergieren

<u>Bsp.</u>: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $a_n := \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow r^{-1} := \limsup_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)^{1/n}}_{\leq 1} \leq 1$

$$\sum_n a_n x^n \begin{cases} \text{kgt. für } x = +1 & \text{(alt.-harmon.-Reihe)} \\ \text{divgt. für } x = -1 & \text{(harm.-Reihe)} \end{cases}$$

$\overset{\text{Satz 4.19 (iii)}}{\Longrightarrow} \quad r = 1$

(ii) $\forall x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < r$ (und $x = 0$) gilt:

$$\sum_n a_n x^n \text{ \underline{abs.} kgt.}$$

(iii) Hinreichende Bed. aus Quotientenkrit. (<u>falls</u> $a_n \neq 0 \ \forall n \geq N$):

- $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| =: \frac{1}{\rho_1} \Rightarrow$ abs. Kgz. $\forall x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < \rho_1$
- $\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| =: \frac{1}{\rho_2} \Rightarrow$ Divergenz $\forall x \in \mathbb{K}$ mit $|x| > \rho_2$
(vgl. Übung)

Zur Vorbereitung der Stetigkeit von Potenzreihen dient:

$\boxed{\text{4.22. Satz}}$ (Konvergenzkriterium von Weierstraß)

Sei $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{K}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ sei $\varphi_n : \mathcal{D} \to \mathbb{K}'$ mit $\sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\|\varphi_n\|_\infty}_{:= \sup_{x\in\mathcal{D}} |\varphi_n(x)|} < \infty$

Dann gilt:

(1) $\forall x \in \mathcal{D}$ kgt. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(x)$ absolut, und

$$\Phi : \begin{array}{l} \mathcal{D} \to \mathbb{K}' \\ x \longmapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(x) \end{array} \quad \text{ist wohldef.}$$

<u>Notation</u>: $\sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n := \Phi$

(2) $(S_n)_n$ kgt. <u>gleichm.</u> gegen Φ (auf $\mathcal{D}$), wobei

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \varphi_k$$

<u>Jargon</u>: $\sum_n \varphi_n$ kgt. absolut und gleichm. (glm.)

<u>Beweis</u> (1) $\forall x \in D: \quad |\varphi_n(x)| \leq \|\varphi_n\|_\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\overset{\text{Major.-krit.}}{\Longrightarrow} \sum_{n\in\mathbb{N}} |\varphi_n(x)| \quad \text{kgt.} \quad \forall x \in D \quad \checkmark$$

Sei $\Phi(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(x) \quad \forall x \in D$; dies def. $\Phi : D \to \mathbb{K}$

(2) Sei $\varepsilon > 0$, Da $\sum_n \|\varphi_n\|_\infty$ kgt. $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N$:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \|\varphi_k\|_\infty < \varepsilon \qquad (*)$$

$$\Rightarrow \forall n \geq N: \quad \|\Phi - s_n\|_\infty = \sup_{x\in D} |\underbrace{\Phi(x) - s_n(x)}_{\sum_{k=n+1}^{\infty} \varphi_k(x)}|$$

$$\leq \sup_{x\in D} \sum_{k=n+1}^{\infty} \underbrace{|\varphi_k(x)|}_{\leq \|\varphi_k\|_\infty} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|\varphi_k\|_\infty \overset{(*)}{<} \varepsilon \qquad \blacksquare$$

$\boxed{\text{4.23. Satz}}$ Sei $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ Potenzreihe in $\mathbb{K}$ mit Kgz.-rad $r \in \mathbb{R}_> \cup \{\infty\}$ und $f_{(a_n)_n}$ die zugeh. Fkt. $\forall 0 < \rho < r$ kgt. $x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ absolut und glm. auf $D = B_\rho := \{x \in \mathbb{K} : |x| < \rho\}$ gegen $f_{(a_n)_n}$. Insbesondere ist $f_{(a_n)_n}$ <u>stetig</u> auf B_r und glm. stetig auf $\overline{B}_\rho := \{x \in \mathbb{K} : |x| \leq \rho\} \quad \forall 0 < \rho < r$.

<u>Beweis</u>: (1) Sei $\varphi_n : B_\rho \to \mathbb{K}, \; x \mapsto a_n x^n$

$$\Rightarrow \|\varphi_n\|_\infty = |a_n| \rho^n$$

$$\underset{\text{Satz 4.19(iii)}}{\overset{\rho < r}{\Longrightarrow}} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \|\varphi_n\|_\infty \text{ kgt.}$$

$$\overset{\text{Satz 4.22}}{\Longrightarrow} f_{(a_n)_n} = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \varphi_n \quad \text{abs. und glm. kgt. auf } B_\rho$$

(2) da $\sum_{k=0}^{n} \varphi_k : B_\rho \to \mathbb{K}$ stetig $\forall n \overset{\text{Satz 3.33}}{\underset{\text{und (1)}}{\Longrightarrow}}$ $f_{(a_n)_n}$ stetig auf B_ρ;

da $\rho \in]0,r[$ bel. $\Rightarrow$ $f_{(a_n)_n}$ stetig auf $\bigcup_{\rho \in]0,r[} B_\rho = B_r$.

(3) Für $\rho \in]0,r[$ ist $\overline{B_\rho}$ kompakt (Bsp. 3.25) und $f_{(a_n)_n}$ stetig auf $\overline{B_\rho} \subset B_r \overset{\text{Satz 3.29}}{\Longrightarrow}$ $f_{(a_n)_n}$ glm.-stetig auf $\overline{B_\rho}$ ∎

Gleichheit von Potenzreihen für „hinreichend" viele x nur möglich, wenn alle Koeffizienten gleich sind:

$\boxed{\text{4.24. Identitätssatz}}$ Seien $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} b_n x^n$ Potenzreihen in $\mathbb{K}$ mit Kgz-radius $r>0$.
Falls $\exists (x_m)_m \subset B_r \setminus \{0\}$ mit $x_m \xrightarrow{m\to\infty} 0$ und

$$f_{(a_n)_n}(x_m) = f_{(b_n)_n}(x_m) \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

Übereinstimm. auf Menge mit Häuf.-pkt

dann gilt $a_n = b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

4.25 Bemerkung: Identitätssatz kann verschärft werden: Es reicht, wenn $\exists \tilde{x} \in B_r$ mit $x_m \xrightarrow{m\to\infty} \tilde{x}$

d.h. $\tilde{x}$ musss nicht 0 sein!

(Mehr dazu in der Vorlesung „Funktionentheorie"..)

Beweis von Satz 4.24

per Ind. nach $n \in \mathbb{N}_0$:

$\underline{n=0}$: $\quad a_0 = f_{(a_n)_n}(0) \overset{\text{stetig}}{=} \lim_{m\to\infty} \underbrace{f_{(a_n)_n}(x_m)}_{= f_{(b_n)_n}(x_m)} \overset{\text{stetig}}{=} b_0$

$n \to n+1$: es gelte $a_\nu = b_\nu \ \forall \nu \in \{0, \dots, n\}$ (*)

z.z.: $a_{n+1} = b_{n+1}$

Für $x \in B_r \setminus \{0\}$ sei

$$g(x) := \frac{1}{x^{n+1}} \left[f_{(a_n)_n}(x) - \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu \right] = a_{n+1} + a_{n+2} x + \dots$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu+n+1} x^\nu$$

$$h(x) := \frac{1}{x^{n+1}} \left[f_{(b_n)_n}(x) - \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu x^\nu \right] = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu+n+1} x^\nu$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \quad g(x_m) = h(x_m) \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad a_{n+1} \overset{g \text{ stetig}}{=} \lim_{m \to \infty} \underbrace{g(x_m)}_{= h(x_m)} \overset{h \text{ stetig}}{=} b_{n+1} \qquad \blacksquare$$

4.3. Exponentialfunktion

4.26. Definition

Exponentialfunktion $\exp : \begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{z^n}{n!} =: \exp(z) \end{array}$

[wohldef., da Kgz.radius der Potenzreihe $r = \infty$ (siehe Bsp. 4.10) $\Rightarrow$ abs. kgt. auf $\mathbb{C}$]

4.27 Satz (a) exp ist stetig.

(b) $\exp(0) = 1$, $\exp(1) = e := \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{n!}$ (Eulersche Zahl)

(c) Funktionalglg: $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$\exp(z_1)\exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)$$

(d) $\forall z \in \mathbb{C}$: $\exp(z) \neq 0$ und $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$

(e) $\forall z \in \mathbb{C}$: $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$

(f) insbes. $\forall x \in \mathbb{R}$:
- $\overline{\exp(ix)} = \exp(-ix)$
- $|\exp(ix)| = 1$

Beweis: (a) Satz 4.23, da $r = \infty$ (b) klar!

(c) Übung

(d) Ann.: $\exists z_0 \in \mathbb{C}$: $\exp(z_0) = 0$

$$\Rightarrow e = \exp(1) = \exp(1 - z_0 + z_0) \overset{(c)}{=} \exp(1 - z_0)\underbrace{\exp(z_0)}_{0} = 0 \quad \lightning$$

Somit $1 = \exp(0) = \exp(z-z) \overset{(c)}{=} \exp(z)\exp(-z)$

$\overset{\exp(z)\neq 0}{\Longrightarrow} \quad \exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$.

(e) $\overline{\exp(z)} = \overline{\left(\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}\right)} \overset{\text{Kor 2.9)}}{=} \lim\limits_{N\to\infty} \underbrace{\overline{\left(\sum\limits_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}\right)}}_{\sum\limits_{n=0}^{N} \underbrace{\overline{\frac{z^n}{n!}}}_{\frac{1}{n!}\underbrace{\overline{z^n}}_{(\bar z)^n}}}$

$= \exp(\bar z)$

(f) aus (e) und (c) ∎

$\boxed{\text{4.28 Satz}}$ (Reelle Exp. Fkt.)

(a) $\exp : \mathbb{R} \to]0,\infty[$ strikt isoton, bijektiv, stetig

(b) $\exp(\mathbb{R}_>) =]1,\infty[$, d.h. $x>0 \Rightarrow \exp(x) > 1$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$

Beweis: (a) $\exp(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ klar wegen Def. (nur reelle Koeff.).

Sei $x\in\mathbb{R} \Rightarrow \exp(x) \overset{4.27(c)}{=} \Big(\underbrace{\exp\left(\tfrac{x}{2}\right)}_{\in \mathbb{R}\setminus\{0\}\ (4.27(d))}\Big)^2 > 0$

- stetig nach Satz 4.23
- strikt isoton: $x_2 > x_1 \Rightarrow \exp(x_2) = \exp(x_1)\exp(\underbrace{x_2-x_1}_{>0}) \overset{(b)}{>} \exp(x_1)$
- injektiv (da strikt isoton)
- surjektiv: (c) & Stetigkeit (& Zwischenwertsatz)

(b) Sei $x > 0 \Rightarrow \exp(x) = 1 + x + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}_{>0} > 1 + x > 1$

(c) $\lim_{x\to\infty} \underbrace{\exp(x)}_{\geq 1+x} \overset{(b)}{=} \infty$, $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\exp(-x)}_{1/\exp(x)} = 0$ ∎

4.29 Korollar $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$\exp(z) = \exp(\operatorname{Re} z)\exp(i \operatorname{Im} z)$$
$$|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re} z)$$

4.30 Satz $\forall q \in \mathbb{Q}: \exp(q) = e^q$

(Erinnerung: $q = \frac{m \in \mathbb{Z}}{n \in \mathbb{N}} \Rightarrow e^q = \sqrt[n]{e^m}$)

Beweis: $[\exp(q)]^n = \exp(\underbrace{nq}_{=m=1\cdot m}) = [\underbrace{\exp(1)}_{e}]^m = e^m > 0$

$\Rightarrow \exp(q) = \sqrt[n]{[\exp(q)]^n} = \sqrt[n]{e^m} = e^q$ ∎

4.31 Definition $\forall z \in \mathbb{C}: e^z := \exp(z) \quad (\in \mathbb{C})$

- Im Einklang mit Bisherigem für $z \in \mathbb{Q}$ wegen Satz 4.30
- alle Resultate für $\exp(\cdot)$ übertragen sich auf $e^{\cdot}$

4.4. Trigonometrische Funktionen, π und Polardarstellung komplexer Zahlen

4.32. Definition

Kosinus

$$\cos: \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \end{array}$$

Kgz. radius $r = \infty$

Sinus

$$\sin: \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \sin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \end{array}$$

$\Rightarrow$ abs. kgt. auf $\mathbb{C}$.

4.33 Satz $\forall z \in \mathbb{C}$:

(a) sin, cos sind stetig

(b) $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$

$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$

(c) $\cos(z) = \cos(-z)$; $\sin(z) = -\sin(-z)$; insbes.: $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$

(d) $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ Eulersche Formel

(e) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ Pythagoras $[\sin^2 z := (\sin z)^2]$

(f) Additionstheoreme: $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

(i) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$

(ii) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$

(iii) $\sin z_1 - \sin z_2 = 2 \cos \frac{z_1 + z_2}{2} \sin \frac{z_1 - z_2}{2}$

(iv) $\cos z_1 - \cos z_2 = -2 \sin \frac{z_1 + z_2}{2} \sin \frac{z_1 - z_2}{2}$

u.v.m. ... siehe z.B.

Gradshteyn / Ryzhik: „Table of integrals, series and products".

Beweis (a) Satz 4.23 (da $r = \infty$)

(b) $$e^{iz} + e^{-iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!}$$

$$\begin{pmatrix}\text{beide Reihen}\\ \text{kgt. } \forall z \in \mathbb{C}\end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big[\underbrace{(iz)^n + (-iz)^n}_{= \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ 2\underbrace{(iz)^n}_{i^n z^n}, & n \text{ gerade} \end{cases}} \Big]$$

$$= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \underbrace{i^{2k}}_{(\underbrace{i^2}_{-1})^k} z^{2k}$$

allg.: $$i^n = \begin{cases} 1, & n = 4l \\ i, & n = 4l+1 \\ -1, & n = 4l+2 \\ -i, & n = 4l+3 \end{cases} \quad l \in \mathbb{N}_0$$

$$= 2\cos z.$$

Für sin analog!

(c) klar aus Def., oder (b)

(d) klar aus (b)

(e) Übung!

(f) Übung!

4.34 Satz (Reelle trigonom. Fkt.'en)

(a) $\left.\begin{array}{l}\sin : \mathbb{R} \to [-1,1] \\ \cos : \mathbb{R} \to [-1,1]\end{array}\right\}$ stetig

(b) $\forall x \in \mathbb{R}: \quad \cos x = \operatorname{Re} e^{ix}, \quad \sin x = \operatorname{Im} e^{ix}$

Beweis: (b) aus $e^{-ix} = \overline{e^{ix}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ & Satz 4.33 (b)

(a) $\sin(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$, $\cos(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ aus Def.

$\Rightarrow \sin^2 x \geq 0, \quad \cos^2 x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\overset{\text{Satz 4.33(e)}}{\Rightarrow} \quad \sin^2 x \in [0,1], \quad \cos^2 x \in [0,1] \Rightarrow$ Beh. ∎

4.35 Satz & Definition

$\exists!\, \xi \in \,]0,2[$ mit $\cos \xi = 0$.

Kreiszahl: $\pi := 2\xi$ (also $\pi \in \,]0,4[$)

Der Beweis beruht auf

4.36 Lemma $\forall x \in \,]0,3[$ gilt

(a) $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

(b) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$

[Die Aussage von Lemma 4.36 ist sogar $\forall x > 0$ wahr – mehr dazu später]

Beweis: Übung!

Beweis von Satz 4.35

Lemma 4.36 (a)

$$\cos 0 = 1, \quad \cos 2 < 1 - 2 + \underbrace{\frac{16}{24}}_{2/3} = -\frac{1}{3} < 0$$

da cos stetig $\overset{\text{Bolzano}}{\Rightarrow}$ $\exists \xi \in]0,2[$ mit $\cos \xi = 0$.

Eindeutigkeit von ξ aus: $\cos :]0,2[\to \mathbb{R}$ strikt antiton

- wahr, denn $\forall x, y \in]0,2[$ mit $x > y$

Satz 4.33 (f) (iv)
$\Rightarrow$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin\Big(\underbrace{\frac{x-y}{2}}_{\in]0,1[}\Big) \sin\Big(\underbrace{\frac{x+y}{2}}_{\in]0,2[}\Big) < 0$$

da Lemma 4.36 (b): $\forall \tilde{x} \in]0,2[$:

$$\sin \tilde{x} > \tilde{x}\Big(1 - \frac{\tilde{x}^2}{6}\Big) > \frac{\tilde{x}}{3} > 0 \qquad \blacksquare$$

4.37 Satz $\forall z \in \mathbb{C}$

(i) $\cos\big(z + \frac{\pi}{2}\big) = -\sin z$

$\sin\big(z + \frac{\pi}{2}\big) = \cos z$

(ii) $\cos(z + \pi) = -\cos z$

$\sin(z + \pi) = -\sin z$

(iii) $\cos(z + 2\pi) = \cos z$ und 2π ist <u>kleinste</u>

$\sin(z + 2\pi) = \sin z$ reelle Periode von sin und cos

(iv) $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cos x = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\sin x = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} : x = k\pi$$

Beweis: $\cos\frac{\pi}{2}=0 \overset{4.33(e)}{\Rightarrow} |\sin\frac{\pi}{2}|=1 \underset{4.36(b)}{\overset{\frac{\pi}{2}\in]0,2[}{\Rightarrow}} \sin\frac{\pi}{2}=1$

$\Rightarrow$ 4.33(d): $e^{i\pi/2}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$

$e^{mi\pi/2}=(e^{i\pi/2})^m \Rightarrow$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
e^{ix}	1	i	-1	$-i$	1

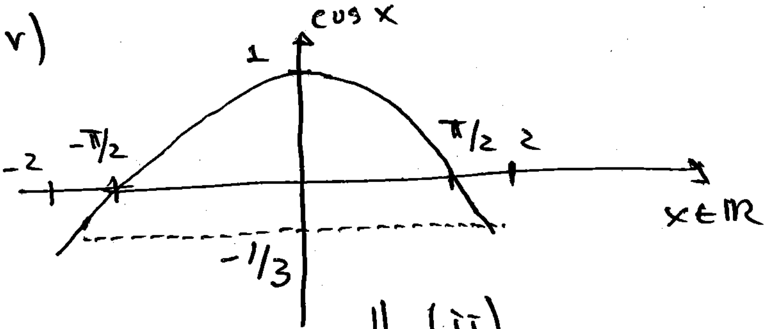
$\Rightarrow$ $\forall z\in\mathbb{C}$ aus Funktionalglg. von exp:

$$\cos\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\Big(\underbrace{e^{iz+i\pi/2}}_{e^{iz}\underbrace{e^{i\pi/2}}_{i}}+\underbrace{e^{-i(z+\frac{\pi}{2})}}_{\frac{e^{-iz}}{e^{+i\pi/2}}=-ie^{-iz}}\Big)=-\sin z \quad ✓$$

sin: analog.

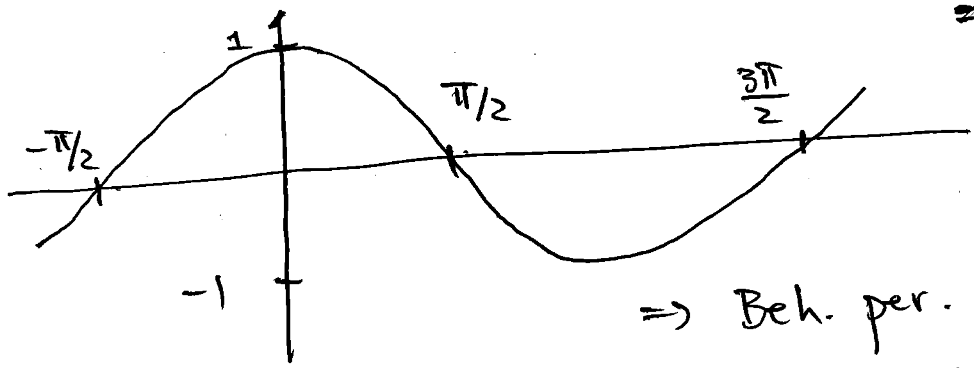
(ii), (iii): Iteration von (i), insbes.: 2π ist Periode.
(kleinste Periode: siehe unten!)

(iv)



Satz 4.35 und cos gerade:
$\pm\frac{\pi}{2}$ einzige Nullst. in $]-2,2[$

$\Downarrow$ (ii)



$\Rightarrow \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ einzige Nullst. in $]-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$

$\Rightarrow$ Beh. per. Induktion.

Nullstellen von sin nun aus (i)

Schließlich: 2π ist kleinste Periode von cos (und somit auch von sin), da:

$\cos x>0 \quad \forall x\in\,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$,

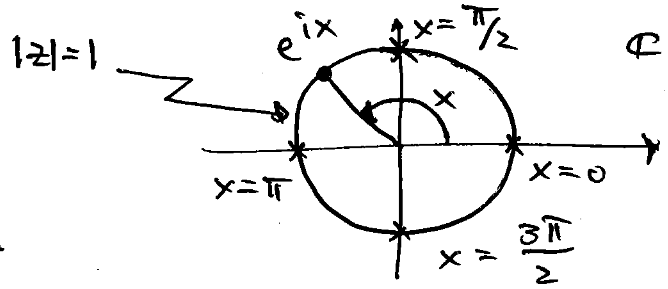
$\cos x<0 \quad \forall x\in\,]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[$ $\Rightarrow$ geht nicht kleiner

4.38 Satz

(i) $2\pi i$ ist kleinste imaginäre Periode von exp, insbes.:

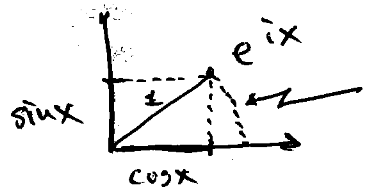
$$e^{z+2\pi i} = e^{z} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

(ii) Mit wachsendem $x \in [0, 2\pi[$ durchläuft e^{ix} genau einmal den Einheitskreis in $\mathbb{C}$ entgegen dem Urzeigersinn



Beweis: Satz 4.37 und Eulersche Formel ∎

Später:

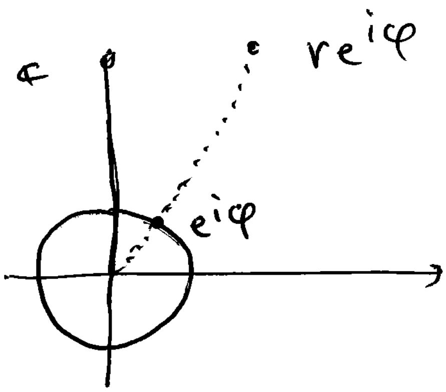


x = Länge des Winkelbogens im Einheitskreis

4.39 Korollar (Polardarstellung komplexer Zahlen)

$\forall z \in \mathbb{C} \; \exists!\, r \geq 0 \; \exists \varphi \in \mathbb{R}: \quad z = r e^{i\varphi}$

Betrag (r), Phase, Argument (φ)



es gilt:
- $r = |z|$
- falls $z \neq 0 \Rightarrow$ φ eindeutig bis auf Addition von $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Beweis: Sei $0 \neq z \in \mathbb{C}$ ($z = 0 \Rightarrow r = 0$, φ bel.)

$$\Rightarrow \left|\frac{z}{|z|}\right| = 1 \overset{\text{Satz 4.38}}{\Rightarrow} \exists!\, \varphi_0 \in [0, 2\pi[: \frac{z}{|z|} = e^{i\varphi_0}$$ ∎

4.40 Def. Hauptzweig des Arguments

$$\arg: \begin{array}{l} \mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow]-\pi, \pi] \\ z \longmapsto \varphi =: \arg(z) \end{array}$$

also: $z = |z| e^{i\arg(z)}$ $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$

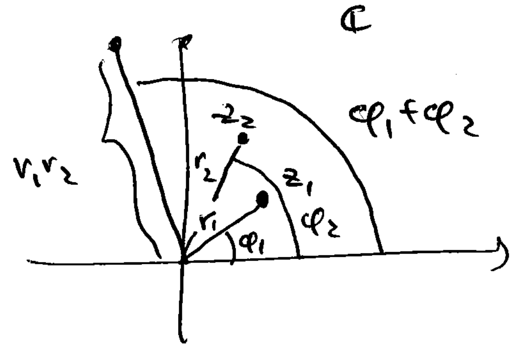
(ist nach Kor. 4.39 wohldef.)

4.41 Korollar (Multiplikation in Polardarstellung)

Seien $z_j = r_j e^{i\varphi_j}$, $j = 1, 2$, so ist

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

„Beträge multiplizieren, Argumente addieren"

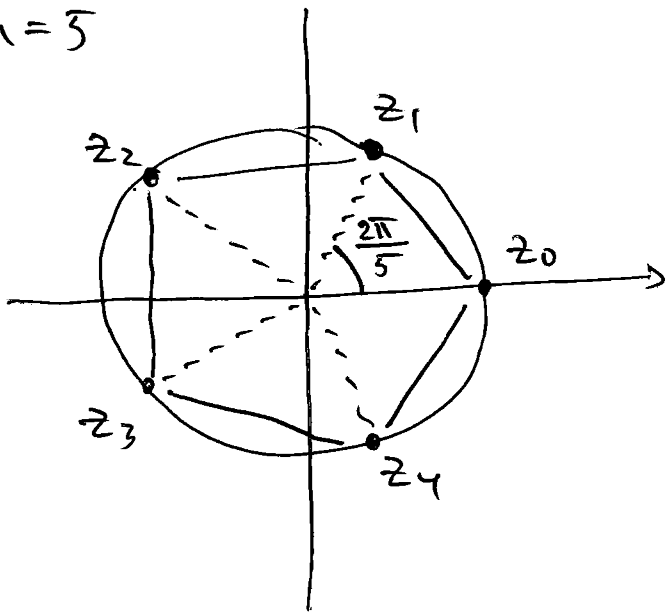


4.42 Korollar Sei $n \in \mathbb{N}$

Die Gleichung $z^n = 1$ besitzt genau n Lösungen in $\mathbb{C}$: $z_k := e^{k 2\pi i/n}$, $k = 0, \dots, n-1$

n.te Einheitswurzeln

Bsp.: $n = 5$



allg.: regelmäßiges n-Eck

unter Benutzung der Bem. zwischen 4.38 und 4.39

Eine schöne Anwendung von Kor. 4.42 sowie der Sätze über stetige Funktionen ist

4.43 Fundamentalsatz der Algebra

Sei $P: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom vom Grad $k \in \mathbb{N}$, d.h. $\exists a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$, $a_k \neq 0$, so dass $P(z) = \sum_{j=0}^{k} a_j z^j$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

Dann besitz P eine Nullstelle.

__Beweis__: o.E. sei $a_k = 1$ (sonst betrachte $\tilde{P} := \frac{1}{a_k} P$)

Sei $Q: \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geq}$, $z \mapsto |P(z)|$

1. Akt: Q nimmt Minimum an

(Idee: da $Q(z) \to \infty$, $|z| \to \infty$)

(i) $$Q(z) = |z|^k \cdot \Big| 1 + \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} a_j z^{j-k}}_{=: r(z)} \Big|$$

$$|r(z)| \leq \sum_{j=0}^{k-1} |a_j| \, |z|^{j-k} \xrightarrow{|z| \to \infty} 0$$

- $j - k < 0$
- endliche Summe

$\Rightarrow \exists \rho \in]0, \infty[: |r(z)| < \frac{1}{2}$ $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > \rho$

Da $1 = |1 - r(z) + r(z)| \leq |1 + r(z)| + |r(z)|$

$\Rightarrow$ $|1 + r(z)| \geq 1 - |r(z)| > \frac{1}{2}$ $(|z| > \rho)$

$\Rightarrow Q(z) > |z|^k/2$ $\forall |z| > \rho$

Sei $R \geq \rho$ so groß, dass $R^k/2 \geq |a_0| = Q(0)$

$\Rightarrow \inf_{z \in \mathbb{C}} Q(z) = \inf_{z \in \overline{B}_R} Q(z)$ mit

$\overline{B}_R := \{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq R \}$

(ii) Da $\overline{B_R}$ kompakt (Bsp. 3.25)

und $Q : \overline{B_R} \to \mathbb{R}_\geq$ stetig $\overset{\text{Satz 3.26}}{\Longrightarrow}$

$$\exists z_- \in \overline{B_R} : Q(z_-) = \min_{z \in \overline{B_R}} Q(z) = \inf_{z \in \overline{B_R}} Q(z)$$

$\Rightarrow$ Beh. mit (i) ✓

2. Akt: $Q(z_-) = 0$

Ann: $Q(z_-) > 0$; sei $q(z) := \frac{1}{P(z_-)} P(z_- + z) \ \forall z \in \mathbb{C}$

also: (i) q Polynom vom Grad k mit $|q(z)| \geq q(0) = 1$ $\forall z \in \mathbb{C}$

(ii) $\exists \xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$; $m \in \{1, .., k\}$ und Polynom $\tilde{q} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

so dass $q(z) = 1 + \xi z^m + z^{m+1} \tilde{q}(z)$ verwende: Pol $q(z) - 1$ verschwindet bei $z = 0$

Nun wähle $\tau \in \mathbb{C}$ mit $|\tau| = 1$: $\tau^m = -\bar{\xi}/|\xi|$ (!)

$$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}_\geq : |q(\tau t)| = |1 - |\xi| t^m + (\tau t)^{m+1} \tilde{q}(\tau t)|$$

$$\leq |1 - |\xi| t^m| + t^{m+1} |\tilde{q}(\tau t)|$$

$$\overset{\text{für } t < |\xi|^{-1/m}}{=} 1 - t^m \underbrace{(|\xi| - \underbrace{t |\tilde{q}(\tau t)|}_{\xrightarrow{t \to 0} 0})}_{\geq \frac{|\xi|}{2}}$$

$\exists t_0 > 0$: $\forall 0 < t \leq t_0$

$\Rightarrow \forall 0 < t < \min(|\xi|^{-1/m}, t_0)$ gilt

$$|q(\tau t)| \leq 1 - \frac{t^m |\xi|}{2} < 1 \quad ↯ \text{ zu (i)} \quad \square$$

4.44 Korollar Sei $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom von Grad $k \in \mathbb{N}$. Dann besitzt P genau k Nullstellen in $\mathbb{C}$, gezählt mit ihrer Vielfachheit.

4.5 Logarithmus und allgemeine Potenz

4.45 Satz und Definition

Sei $\mathbb{C}_\ell := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ (links geschlitzte komplexe Ebene)

und $S' := \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$ (offener Horizontalstreifen der Breite 2π)

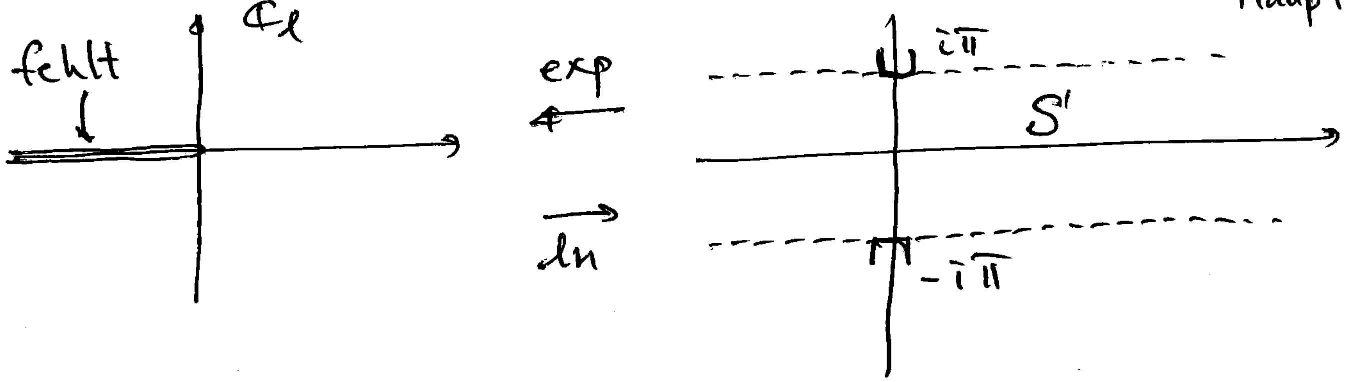
Dann gilt:

$$\exp : S' \to \mathbb{C}_\ell \text{ ist bijektiv.}$$

Umkehrfkt dazu: Hauptzweig des (natürlichen) Logarithmus

$$\ln : \mathbb{C}_\ell \to S' \quad (\text{auch: } \log;\ \mathrm{Log},\ \mathrm{Ln})$$

Hauptzweig



Beweis: Sei $z \in S' \Rightarrow e^z = \underbrace{e^{\operatorname{Re} z}}_{|e^z|} \underbrace{e^{i \operatorname{Im} z}}_{e^{i \arg(e^z)}}$

- Satz 4.28(a) $\Rightarrow$ $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to]0,\infty[\\ \operatorname{Re} z \mapsto e^{\operatorname{Re} z} \end{array}$ bijektiv

- Def. 4.40 $\Rightarrow$ $\begin{array}{l}]-\pi,\pi[\to \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \setminus \{-1\} \\ \operatorname{Im} z \mapsto e^{i \operatorname{Im} z} \end{array}$ bijektiv

$\Rightarrow$ Beh. aus Polardarstellung, Kor. 4.39 $\blacksquare$

4.46 Satz (Funktionalglg. des ln)

Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}_\ell$ mit $z_1 z_2 \in \mathbb{C}_\ell$. Dann $\exists!\, k = k_{z_1, z_2} \in \{0, \pm 1\}$:

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 + 2k\pi i$$

Beweis: Für $j = 1, 2$ $\exists!\, \zeta_j \in S$ mit $z_j = e^{\zeta_j}$ (Satz 4.45)

$$\Rightarrow \zeta_j = \ln z_j$$

Funkt.glg. von exp: $z := z_1 z_2 = e^{\zeta_1 + \zeta_2} = e^{\overbrace{\zeta_1 + \zeta_2 + 2k\pi i}^{=:\zeta}}$

wobei $k \in \{0, \pm 1\}$ eindeutig durch

$$\mathrm{Im}(\zeta_1 + \zeta_2 + 2k\pi i) \in]-\pi, \pi[$$

festgelegt (NB: $z \in \mathbb{C}_\ell \Rightarrow \zeta \in S$)

$$\Rightarrow \ln z = \zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + 2k\pi i$$ ∎

4.47 Korollar (Reeller Logarithmus)

$\exp: \mathbb{R} \to]0, \infty[$ ist bijektiv mit Umkehrfkt. $\ln:]0, \infty[\to \mathbb{R}$. Es gilt

$$\ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2 \quad \forall x_1, x_2 \in]0, \infty[$$

Beweis: Sätze 4.28, 4.46 und 3.22 (da $\exp|_{\mathbb{R}}$ strikt isoton). ∎

4.48 Korollar $\forall z \in \mathbb{C}_\ell$ gilt: $\ln z = \ln|z| + i \arg(z)$, und $\ln: \mathbb{C}_\ell \to S$ ist stetig.

Beweis: Satz 4.46; Stetigkeit aus Kor. 4.47 und Stetigkeit von arg (Übung!)

4.49 Definition (Allgemeine Potenz)

Für $a \in \mathbb{C}_\ell$ und $z \in \mathbb{C}$ setze

$$a^z := \exp(z \ln a)$$

NB: $a^{z_1} a^{z_2} = a^{z_1+z_2}$ $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

4.50 Bemerkung

- $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto a^z$ stetig $\forall a \in \mathbb{C}_\ell$
- konsistent mit Def. 4.31 für $a = e$, wegen $\ln e = 1$.
- konsistent mit Def. 2.71 für $a \in \mathbb{R}_>$ und $z = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, da:

$$\exp\left(\frac{m}{n} \ln a\right) = \sqrt[n]{\exp(m \ln a)}$$

- linke Seite $\in \mathbb{R}$
- $(\text{linke Seite})^n = \exp(m \ln a)$ wegen Fkt.-glg.
- Eindeutigkeit der positiven n'ten Wurzel

$$\Rightarrow \exp\left(\frac{m}{n} \cdot \ln a\right) = \sqrt[n]{[\underbrace{\exp(\ln a)}_{a}]^m} = \sqrt[n]{a^m}$$

4.51 Satz

(i) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $|\operatorname{Im} z_1| < \pi$: $(e^{z_1})^{z_2} = e^{z_1 z_2}$

(ii) $\forall z_1 \in \mathbb{C}_\ell$ $\forall z_2 \in \mathbb{C}$ mit $z_1^{z_2} \in \mathbb{C}_\ell$ $\exists! k \in \mathbb{Z}$:

$$\ln(z_1^{z_2}) = z_2 \ln z_1 + 2k\pi i$$

Beweis: Übung!