4.5 Logarithmus und allgemeine Potenz

4.45 Satz und Definition

Sei $\mathbb{C}_\ell := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ (links geschlitzte komplexe Ebene)

und $S' := \{ z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} z < \pi \}$ (offener Horizontalstreifen der Breite 2π)

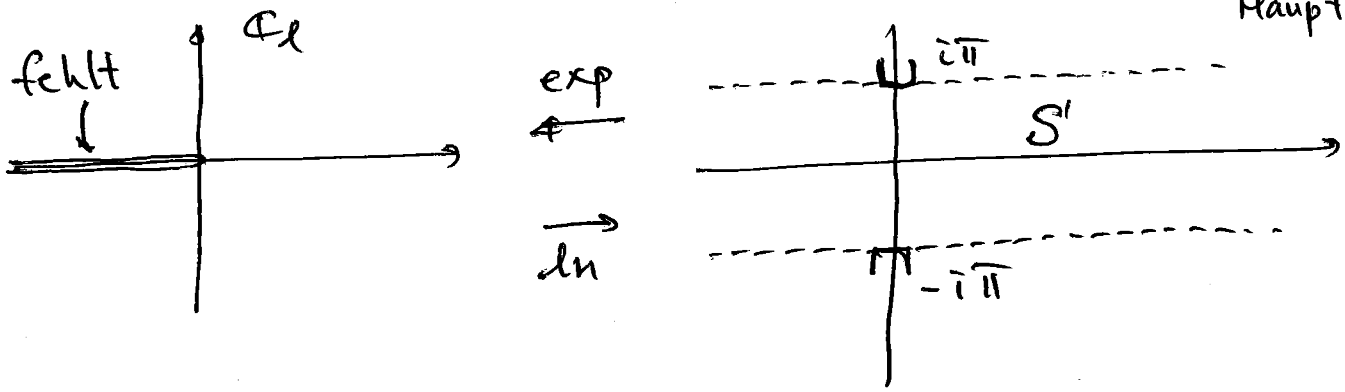
Dann gilt:

$$\exp : S' \to \mathbb{C}_\ell \quad \text{ist bijektiv.}$$

Umkehrfkt dazu: Hauptzweig des (natürlichen) Logarithmus

$$\ln : \mathbb{C}_\ell \to S' \qquad (\text{auch: } \log;\ \mathrm{Log},\ \mathrm{Ln})$$

Hauptzweig



Beweis: Sei $z \in S' \Rightarrow e^z = \underbrace{e^{\operatorname{Re} z}}_{|e^z|} \underbrace{e^{i \operatorname{Im} z}}_{e^{i \arg(e^z)}}$

- Satz 4.28(a) $\Rightarrow$ $\mathbb{R} \to \,]0, \infty[$, $\operatorname{Re} z \mapsto e^{\operatorname{Re} z}$ bijektiv

- Def. 4.40 $\Rightarrow$ $]-\pi, \pi[\, \to \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \} \setminus \{-1\}$, $\operatorname{Im} z \mapsto e^{i \operatorname{Im} z}$ bijektiv

$\Rightarrow$ Beh. aus Polardarstellung, Kor. 4.39 ∎

4.46 Satz (Funktionalglg. des ln)

Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}_\ell$ mit $z_1 z_2 \in \mathbb{C}_\ell$. Dann $\exists!\, k = k_{z_1,z_2} \in \{0, \pm 1\}$:

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 + 2k\pi i$$

Beweis: Für $j = 1,2$ $\exists!\, \zeta_j \in S$ mit $z_j = e^{\zeta_j}$ (Satz 4.45)

$$\Rightarrow \zeta_j = \ln z_j$$

Funkt.glg. von exp: $z := z_1 z_2 = e^{\zeta_1 + \zeta_2} = e^{\overbrace{\zeta_1 + \zeta_2 + 2k\pi i}^{=:\zeta}}$

wobei $k \in \{0, \pm 1\}$ eindeutig durch

$$\operatorname{Im}(\zeta_1 + \zeta_2 + 2k\pi i) \in]-\pi, \pi[$$

festgelegt (NB: $z \in \mathbb{C}_\ell \Rightarrow \zeta \in S$)

$$\Rightarrow \ln z = \zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + 2k\pi i$$ ☒

4.47 Korollar (Reeller Logarithmus)

$\exp: \mathbb{R} \to]0, \infty[$ ist bijektiv mit Umkehrfkt.
$\ln:]0, \infty[\to \mathbb{R}$. Es gilt

$$\ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2 \quad \forall x_1, x_2 \in]0, \infty[$$

Beweis: Sätze 4.28, 4.46 und 3.22 (da $\exp|_{\mathbb{R}}$ strikt isoton). ☒

4.48 Korollar $\forall z \in \mathbb{C}_\ell$ gilt: $\ln z = \ln|z| + i\arg(z)$,
und $\ln: \mathbb{C}_\ell \to S$ ist stetig.

Beweis: Satz 4.46; Stetigkeit aus Kor. 4.47
und Stetigkeit von arg (Übung!)

4.49 Definition (*Allgemeine Potenz*)

Für $a \in \mathbb{C}_\ell$ und $z \in \mathbb{C}$ setze

$$a^z := \exp(z \ln a) \qquad \underline{\text{NB}}: \; a^{z_1} a^{z_2} = a^{z_1 + z_2} \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

4.50 Bemerkung
- $\begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto a^z \end{array}$ stetig $\forall a \in \mathbb{C}_\ell$
- konsistent mit Def. 4.31 für $a = e$, wegen $\ln e = 1$.
- konsistent mit Def. 2.71 für $a \in \mathbb{R}_>$ und $z = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, da:

$$\exp\left(\tfrac{m}{n} \ln a\right) = \sqrt[n]{\exp(m \ln a)}$$

- linke Seite $\in \mathbb{R}$
- $(\text{linke Seite})^n = \exp(m \ln a)$ wegen Fkt.-glg.
- Eindeutigkeit der positiven n'ten Wurzel

$$\Rightarrow \exp\left(\tfrac{m}{n} \cdot \ln a\right) = \sqrt[n]{[\underbrace{\exp(\ln a)}_{a}]^m} = \sqrt[n]{a^m}$$

4.51 Satz

(i) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $|\operatorname{Im} z_1| < \pi$: $\left(e^{z_1}\right)^{z_2} = e^{z_1 z_2}$

(ii) $\forall z_1 \in \mathbb{C}_\ell \; \forall z_2 \in \mathbb{C}$ mit $z_1^{z_2} \in \mathbb{C}_\ell \; \exists!\, k \in \mathbb{Z}$:

$$\ln\left(z_1^{z_2}\right) = z_2 \ln z_1 + 2k\pi i$$

Beweis: Übung!