4.2 Potenzreihen

4.18 Definition Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{K}$

(i) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ heißt Potenzreihe (in $\mathbb{K}$)

(ii) dadurch induzierte Funktion:
$$f_{(a_n)_n}: \begin{array}{l} \mathcal{D} \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \end{array}$$

$$\mathcal{D} := \{x \in \mathbb{K} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ kgt.}\}$$

4.18 Beispiele

(i) $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{x^n}{n!} \overset{\text{Bsp. 4.10}}{\Longrightarrow} \mathcal{D} = \mathbb{K}$

(ii) $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x^n \overset{\text{geom.}}{\underset{\text{Reihe}}{\Longrightarrow}} \mathcal{D} = \{x \in \mathbb{K}; |x| < 1\}$

(Divgz. $\forall x \in \mathbb{C}, |x| = 1$: später)

(iii) $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} n^n x^n$ für $x \neq 0$ und $n > \frac{2}{|x|}$

$\Rightarrow |n^n x^n| > 2^n \Rightarrow$ divgt.

$\Rightarrow \mathcal{D} = \{0\}$

Beispiele illustrieren die $\underline{\underline{3}}$ Möglichkeiten, die auftreten können.

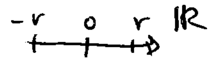
4.19 Satz von Cauchy – Hadamard

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ Potenzreihe in $\mathbb{K}$ mit Def.-bereich $\mathcal{D}$. Dann gilt

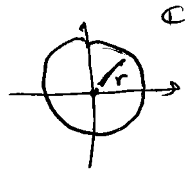
(i) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D} = \mathbb{K}$

(ii) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D} = \{0\}$

(iii) $\frac{1}{r} = r^{-1} := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \,]0,\infty[\quad \Rightarrow$



Inneres von $\mathcal{D}$ $\{x \in \mathbb{K} : |x| < r\} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \{x \in \mathbb{K} : |x| \leq r\}$



(insbes.: $\sum_n a_n x^n$ divgt. für $|x| > r$)

4.20 Definition

r aus (iii) ist Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_n a_n x^n$. Konventionen: $r := \infty$ im Fall (i)

$r := 0$ im Fall (ii)

Beweis von Satz 4.19

Wurzelkriterium für $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} c_n$, $c_n := a_n x^n$ (Satz 4.14)

- (i) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = |x| \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{K}$

  $\Rightarrow$ abs kgt. $\forall x \in \mathbb{K}$

- analog im Fall (ii): $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \infty \quad \forall\, 0 \neq x \in \mathbb{K}$

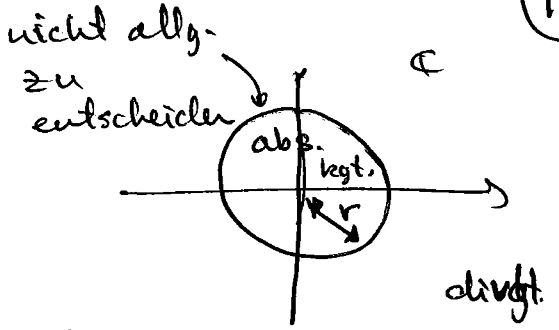
  $\Rightarrow$ divgt. $\forall\, 0 \neq x \in \mathbb{K}$

- Fall (iii): $|x| < r \Rightarrow \limsup \sqrt[n]{|c_n|} < 1 \Rightarrow$ abs kgt.

  $|x| > r \Rightarrow$ " $> 1 \Rightarrow$ divgt.

$\blacksquare$

4.21. Bemerkung



(i) Für $x \in \{x' \in \mathbb{K} : |x'| = r\}$
(Rand des Kgz.kreises in $\mathbb{C}$, bzw. des Kgz.intervalles in $\mathbb{R}$)

kann $\sum_n a_n x^n$ sowohl konvergieren als auch divergieren

Bsp.: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $a_n := \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow r^{-1} := \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} \leq 1$

$$\sum_n a_n x^n \begin{cases} \text{kgt. für } x = +1 \text{ (alt.-harmon. Reihe)} \\ \text{divgt. für } x = -1 \text{ (harm. Reihe)} \end{cases}$$

Satz 4.19 (iii) $\Rightarrow$ $r = 1$

(ii) $\forall x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < r$ (und $x = 0$) gilt:

$$\sum_n a_n x^n \text{ abs. kgt.}$$

(iii) Hinreichende Bed. aus Quotientenkrit. (falls $a_n \neq 0$ $\forall n \geq N$):

- $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| =: \frac{1}{\varrho_1} \Rightarrow$ abs. Kgz. $\forall x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < \varrho_1$
- $\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| =: \frac{1}{\varrho_2} \Rightarrow$ Divergenz $\forall x \in \mathbb{K}$ mit $|x| > \varrho_2$ (vgl. Übung)

Zur Vorbereitung der Stetigkeit von Potenzreihen dient:

4.22. Satz (Konvergenzkriterium von Weierstraß)

Sei $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{K}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ sei $\varphi_n : \mathcal{D} \to \mathbb{K}'$ mit $\sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\|\varphi_n\|_\infty}_{:= \sup_{x\in\mathcal{D}} |\varphi_n(x)|} < \infty$

Dann gilt:

(1) $\forall x \in \mathcal{D}$ kgt. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(x)$ absolut, und

$$\Phi : \begin{array}{l} \mathcal{D} \to \mathbb{K}' \\ x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(x) \end{array}$$ ist wohldef.

Notation: $\sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n := \Phi$

(2) $(S_n)_n$ kgt. gleichm. gegen Φ (auf $\mathcal{D}$), wobei

$$S_n := \sum_{k=1}^n \varphi_k$$

Jargon: $\sum_n \varphi_n$ kgt. absolut und gleichm. (glm.)

<u>Beweis</u> (1) $\forall x \in D: \quad |\varphi_n(x)| \leq \|\varphi_n\|_\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\overset{\text{Major.-krit.}}{\Longrightarrow} \sum_{n\in\mathbb{N}} |\varphi_n(x)|$ kgt. $\forall x \in D$ ✓

Sei $\Phi(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(x) \quad \forall x \in D$; dies def. $\Phi : D \to \mathbb{K}$.

(2) Sei $\varepsilon > 0$. Da $\sum_n \|\varphi_n\|_\infty$ kgt. $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N$:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \|\varphi_k\|_\infty < \varepsilon \qquad (*)$$

$$\Rightarrow \forall n \geq N: \quad \|\Phi - s_n\|_\infty = \sup_{x\in D} \underbrace{|\Phi(x) - s_n(x)|}_{\sum_{k=n+1}^{\infty} \varphi_k(x)}$$

$$\leq \sup_{x\in D} \sum_{k=n+1}^{\infty} \underbrace{|\varphi_k(x)|}_{\leq \|\varphi_k\|_\infty} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|\varphi_k\|_\infty \overset{(*)}{<} \varepsilon \qquad \blacksquare$$

$\boxed{\text{4.23. Satz}}$ Sei $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ Potenzreihe in $\mathbb{K}$ mit Kgz.-rad $r \in \mathbb{R}_> \cup \{\infty\}$ und $f_{(a_n)_n}$ die zugeh. Fkt. $\forall 0 < \rho < r$ kgt. $x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ absolut und glm. auf $D = B_\rho := \{x \in \mathbb{K} : |x| < \rho\}$ gegen $f_{(a_n)_n}$. Insbesondere ist $f_{(a_n)_n}$ <u>stetig</u> auf B_r und glm. stetig auf $\overline{B}_\rho := \{x \in \mathbb{K} : |x| \leq \rho\} \quad \forall 0 < \rho < r$.

<u>Beweis</u>: (1) Sei $\varphi_n : B_\rho \to \mathbb{K}, \ x \mapsto a_n x^n$

$$\Rightarrow \|\varphi_n\|_\infty = |a_n| \rho^n$$

$$\underset{\text{Satz 4.19(iii)}}{\overset{\rho < r}{\Longrightarrow}} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \|\varphi_n\|_\infty \text{ kgt.}$$

$$\overset{\text{Satz 4.22}}{\Longrightarrow} f_{(a_n)_n} = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \varphi_n \text{ abs. und glm. kgt. auf } B_\rho$$

(2) da $\sum_{k=0}^{n} \varphi_k : B_\rho \to \mathbb{K}$ stetig $\forall n \overset{\text{Satz 3.33}}{\underset{\text{und (1)}}{\Longrightarrow}}$ $f_{(a_n)_n}$ stetig auf B_ρ;

da $\rho \in]0,r[$ bel. $\Rightarrow f_{(a_n)_n}$ stetig auf $\bigcup_{\rho \in]0,r[} B_\rho = B_r$.

(3) Für $\rho \in]0,r[$ ist $\overline{B_\rho}$ kompakt (Bsp. 3.25) und $f_{(a_n)_n}$ stetig auf $\overline{B_\rho} \subset B_r \overset{\text{Satz 3.29}}{\Longrightarrow} f_{(a_n)_n}$ glm.-stetig auf $\overline{B_\rho}$ ∎

Gleichheit von Potenzreihen für „hinreichend" viele x nur möglich, wenn alle Koeffizienten gleich sind:

$\boxed{\text{4.24. Identitätssatz}}$ Seien $\sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n x^n$, $\sum_{n \in \mathbb{N}_0} b_n x^n$ Potenzreihen in $\mathbb{K}$ mit Kgz-radius $r > 0$

Falls $\exists (x_m)_m \subset B_r \setminus \{0\}$ mit $x_m \xrightarrow{m \to \infty} 0$ und

$$f_{(a_n)_n}(x_m) = f_{(b_n)_n}(x_m) \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

Übereinstimm. auf Menge mit Häuf.-pkt

dann gilt $a_n = b_n \; \forall n \in \mathbb{N}_0$

4.25 Bemerkung: Identitätssatz kann verschärft werden: Es reicht, wenn $\exists \tilde{x} \in B_r$ mit $x_m \xrightarrow{m \to \infty} \tilde{x}$

d.h. $\tilde{x}$ musss nicht 0 sein!

(Mehr dazu in der Vorlesung „Funktionentheorie"..)

Beweis von Satz 4.24

per Ind. nach $n \in \mathbb{N}_0$:

$n=0$: $$a_0 = f_{(a_n)_n}(0) \overset{\text{stetig}}{=} \lim_{m \to \infty} \underbrace{f_{(a_n)_n}(x_m)}_{= f_{(b_n)_n}(x_m)} \overset{\text{stetig}}{=} b_0$$

$n \to n+1$: es gelte $a_\nu = b_\nu \ \forall \nu \in \{0,\dots,n\}$ (*)

z.z.: $a_{n+1} = b_{n+1}$

Für $x \in B_r \setminus \{0\}$ sei

$$g(x) := \frac{1}{x^{n+1}} \left[f_{(a_n)_n}(x) - \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu \right] = a_{n+1} + a_{n+2} x + \dots$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu+n+1} x^\nu$$

$$h(x) := \frac{1}{x^{n+1}} \left[f_{(b_n)_n}(x) - \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu x^\nu \right] = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu+n+1} x^\nu$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \quad g(x_m) = h(x_m) \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad a_{n+1} \overset{g \text{ stetig}}{=} \lim_{m\to\infty} \underbrace{g(x_m)}_{= h(x_m)} \overset{h \text{ stetig}}{=} b_{n+1}$$

$\blacksquare$