f_N stetig in $x \Rightarrow \exists\, \delta = \delta_{x,N,\varepsilon} > 0$ so dass $\forall y \in D$
mit $|x-y| < \delta$ gilt: $|f_N(x) - f_N(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\overset{(**)}{\Longrightarrow} |f(x) - f(y)| < \varepsilon$, also f stetig in x ■

---

4. Potenzreihen und elementare Funktionen

Zur Vorbereitung eine Vertiefung unseres Verständnisses über:

4.1 Reihen (2. Teil)

Erinnerung: Sei $(a_k)_k \subseteq \mathbb{K}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$

$\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k$ kgt. $:\Leftrightarrow (s_n)_n$ kgt. $\Leftrightarrow (s_n)_n$ Cauchy

$\boxed{4.1.\ \text{Satz}}$ $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k$ kgt. in $\mathbb{K} \Longrightarrow (a_k)_k$ ist Nullfolge

Beweis: n. V. is $(s_n)_n$ Cauchy, d.h.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq N: \quad |s_n - s_m| < \varepsilon \quad (*)$

- für $n = m+1$ gilt $s_{m+1} - s_m = a_{m+1}$

$(*) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m \geq N: \quad |a_{m+1}| < \varepsilon \Rightarrow$ Beh. ■

4.2 Bemerkung

Es gilt nicht „$\Leftarrow$" in Satz 4.1

Bsp.: harmonische Reihe $a_k = \frac{1}{k}$

(vgl. Aufg. 2, Blatt 5)

$\boxed{\text{4.3 Definition}}$ Sei $(a_k)_k \subseteq \mathbb{K}$.

$$\left.\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \ \underset{(\text{in } \mathbb{K})}{\text{absolut konvergent}}\right\} :\Longleftrightarrow \left\{ \sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k| \text{ kgt. (in } \mathbb{R}) \right.$$

$\boxed{\text{4.4 Satz}}$ Sei $(a_k)_k \subseteq \mathbb{K}$. Dann gilt

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \text{ abs. kgt.} \Longrightarrow \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \text{ kgt.}$$

4.5 Bemerkung

Es gilt nicht "$\Longleftarrow$" in Satz 4.4

Bsp.: alternierende harmon. Reihe $a_k = \frac{(-1)^k}{k}$, sowie Aufgabe 2, Blatt 5 & Aufgabe 2, Blatt 6.

Beweis von Satz 4.4:

Sei $\sum_k |a_k|$ kgt. $\Rightarrow (s_n)_n$ ist Cauchy, wobei

$$s_n := \sum_{k=1}^n |a_k|$$

d.h. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > m \geq N : |s_n - s_m| < \varepsilon$

Sei $\tilde{s}_n := \sum_{k=1}^n a_k$, dann gilt

$$|\tilde{s}_n - \tilde{s}_m| = \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| \underset{\text{iterierte } \Delta\text{'s Ungl.}}{\leq} \left| \sum_{k=m+1}^n |a_k| \right| = |s_n - s_m|$$

$\Rightarrow (\tilde{s}_n)_n$ Cauchy $\Rightarrow$ Beh. $\blacksquare$

4.6 Satz (Majoranten-Kriterium)

Sei $(a_k)_k \subseteq \mathbb{K}$, $(c_k)_k \subseteq \mathbb{R}_{\geq}$, $\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k$ kgt.

und $|a_k| \leq c_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Dann ist $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ absolut kgt.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Da $\sum_k c_k$ kgt. $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > m \geq N$:

$$\sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m+1}^{n} c_k < \varepsilon \quad \text{(Partialsummen Cauchy)}$$

$\Rightarrow (s_n)_n$, $s_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|$, ist Cauchy $\Rightarrow$ Beh. ∎

4.7 Beispiel: $\forall \alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha \geq 2$, gilt: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ kgt.

Beweis: $\forall k \in \mathbb{N}$ gilt: $k^\alpha = \underbrace{k^{\alpha-2}}_{\geq 1} \underbrace{k^2}_{\geq k \frac{k+1}{2}}$

$\Rightarrow \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{2}{k(k+1)} =: c_k$

$\Rightarrow$ Beh. mit Satz 4.6 und Bsp. 2.45 ✓

(Das Resultat ist noch nicht optimal: kgt. $\forall \alpha > 1$; später!)

4.8 Satz (Quotientenkriterium)

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ mit $a_k \neq 0 \quad \forall k \geq N$, $N \in \mathbb{N}$. Es existiere

$$\theta \in \,]0,1[\ \ \forall k \geq N: \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq \theta \qquad (*)$$

Dann kgt. $\sum_k a_k$ absolut.

unabhängig von k!

Beweis o.E. gelte (*) und $a_k \neq 0 \; \forall k \in \mathbb{N}$ (endlich viele Glieder abändern beeinflusst Kgz. nicht!)

$$|a_{k+1}| \le \theta |a_k| \quad \forall k \in \mathbb{N} \overset{\text{vollst. Ind.}}{\Longrightarrow}$$

(*) $\Rightarrow$

$$|a_k| \le \underbrace{\theta^{k-1} |a_1|}_{=: c_k \ge 0} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Da $s_n := \sum_{k=1}^{n} c_k = |a_1| \sum_{k=0}^{n-1} \theta^k \Rightarrow (s_n)_n$ kgt. da $|\theta| < 1$ (geometrische Reihe!)

$\Rightarrow$ Beh. mit Satz 4.6 ∎

4.9 Bemerkung

(i) Quotientenkriterium: (*) $\Longleftrightarrow \limsup_{k \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$

(ii) Warnung: Die Bedingung: $\exists N \in \mathbb{N} \; \forall k \ge N$

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$$

ist nicht hinreichend für Kgz. von $\sum_k a_k$

Bsp. harmonische Reihe $a_k = \frac{1}{k}$.

4.10 Beispiel

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{kgt. } \forall x \in \mathbb{K}, \text{ denn}$$

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{|x|}{k+1} \underset{\forall k \ge \lfloor |x| \rfloor}{\le} \frac{x}{\lfloor |x| \rfloor + 1} =: \theta < 1$$

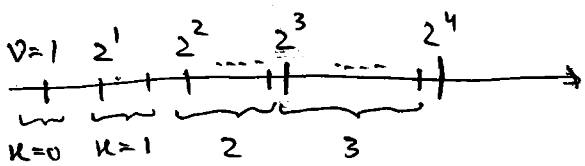
4.11 Cauchyscher Verdichtungssatz

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,\infty[$ antiton mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ kgt.} \iff \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ kgt.}$$

Beweis: Sei $s_n := \sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu$, $\sigma_k := \sum\limits_{\kappa=0}^{k} 2^\kappa a_{2^\kappa}$

„$\Leftarrow$" Sei $n < 2^k \Rightarrow s_n \leq s_{2^{k+1}-1} = \sum\limits_{\kappa=0}^{k} \underbrace{\sum\limits_{\nu=2^\kappa}^{2^{\kappa+1}-1} a_\nu}_{(a_n \text{ antiton})}$



$$\leq \sum_{\kappa=0}^{k} \sum_{\nu=2^\kappa}^{2^{\kappa+1}-1} a_{2^\kappa}$$

$$\leq \sum_{\kappa=0}^{k} 2^\kappa a_{2^\kappa} = \sigma_k$$

Da n.V. $(\sigma_k)_k$ kgt., isoton $(a_n \geq 0)$ $\Rightarrow \forall k: \sigma_k \leq \sigma := \lim\limits_{\kappa\to\infty} \sigma_\kappa$

$\Rightarrow s_n \leq \sigma \;\; \forall n \overset{(s_n)_n \text{ isoton}}{\Longrightarrow} (s_n)_n$ kgt. ✓

„$\Rightarrow$" sei $n > 2^k \Rightarrow s_n \geq s_{2^k} = \sum\limits_{\kappa=1}^{k} \underbrace{\sum\limits_{\nu=2^{\kappa-1}+1}^{2^\kappa} a_\nu}_{\geq \sum\limits_{\nu=2^{\kappa-1}+1}^{2^\kappa} a_{2^\kappa}} + a_1$

d.h., $s_n \geq a_1 + \sum\limits_{\kappa=1}^{k} 2^{\kappa-1} a_{2^\kappa}$

$$\geq \frac{1}{2}\sigma_k$$

da n.V. $(s_n)_n$ kgt. und isoton $\Rightarrow \forall n: s_n \leq s := \lim\limits_{\nu\to\infty} s_\nu$

$\Rightarrow \sigma_k \leq 2s \;\; \forall k \overset{(\sigma_n)_n \text{ isoton}}{\Longrightarrow} (\sigma_k)_k$ kgt. $\blacksquare$

4.12 Korollar

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{kgt.}, & \text{für } \alpha > 1 \\ \text{divgt.}, & \text{für } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

(Bislang ist hier noch $\alpha \in \mathbb{Q}$; Resultat auch gültig für $\alpha \in \mathbb{R}$; Potenz mit irrationalen Exponenten wird erst später def.)

Beweis:

- $\alpha > 1 \Rightarrow q := \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} < 1$ (da: $\alpha - 1 = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$

  Ann: $(2^{-p})^{\frac{1}{q}} \geq 1 \Rightarrow 2^{-p} \geq 1$ ↯)

Somit
$$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha}}_{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}\right]^k} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \quad \text{kgt. da } 0 < q < 1$$
(geom. Reihe!)

$\Rightarrow$ Beh. mit Satz 4.11 ✓

- $\alpha < 1 \Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n} \cdot \underbrace{n^{1-\alpha}}_{\geq 1 \text{ wie oben}} \geq \frac{1}{n}$

Ann: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ kgt. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{kgt.}}$ (Maj.krit.) ↯ $\Rightarrow$ Beh. ☒

4.13 Bemerkung Sei $\sum_n a_n$ kgt.'e Reihe. Dann gilt:

(i) Man darf Klammern (zusätzlich) setzen: z.B.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{(a_1 + a_2)}_{b_1} + \underbrace{a_3}_{b_2} + \underbrace{(a_4 + a_5 + a_6)}_{b_3} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

wobei $b_k := \sum_{n=N_k}^{N_{k+1}-1} a_n$ wobei $1 = N_1 < N_2 < N_3 < \ldots$

d.h. $(N_k)_k \subseteq \mathbb{N}$ strikt isoton

denn: $\sum_{k=1}^{K} b_k = \sum_{n=1}^{N_{K+1}-1} a_n = s_{N_{K+1}-1}$; da $(s_n)_n$ kgt.

so auch Teilfolge, mit selbem Limes.

(iii) Man darf bestehende Klammern nicht umsetzen

Bsp.: $a_n := 0 = 1-1$

$$0 = \sum_n a_n = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots$$

aber $1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1 \dots) = 1$

4.14 Satz (Wurzelkriterium)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ Folge und $\alpha := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0,\infty]$

Für die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ gilt, dass sie

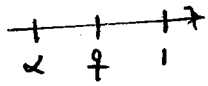
(i) konvergiert absolut, falls $\alpha < 1$

(ii) divergiert, falls $\alpha > 1$

(iii) konvergiert, konvergiert abs. oder divergiert, falls $\alpha = 1$

Bew: (i) Da lim sup größte Häuf.pkt., und $\alpha < 1$:

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N: \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} =: q < 1$$



Damit

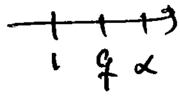
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| = \underbrace{\sum_{n=1}^{N} |a_n|}_{=: M < \infty} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)^n \leq M + \sum_{n=1}^{\infty} q^n = M + \frac{1}{1-q} - 1 < \infty$$

$\Rightarrow \sum_n a_n$ abs kgt.

(ii) $\alpha > 1 \Rightarrow \exists$ Teilfolge $(a_{n_k})_k$ mit $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \xrightarrow{k\to\infty} \alpha > 1$

D.h. $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall k \geq N: \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geq \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} =: q > 1$

$$\Rightarrow |a_{n_k}| \geq q^{n_k} \geq 1$$



$\Rightarrow (a_n)_n$ ist keine Nullfolge

$\Rightarrow \sum_n a_n$ divergent.

(iii) Für $\alpha = 1$ kann alles passieren:

	Konv.	Abs-konv.	Div.	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert}$
$\sum_n \frac{1}{n}$	×	×	✓	$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \to 1$
$\sum_n \frac{1}{n^2}$	✓	✓	×	$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \to 1$
$\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$	✓	×	×	$\sqrt[n]{\left\lvert\frac{(-1)^n}{n}\right\rvert} \to 1$

∎

4.15 Umordnungssatz Sei $(a_n)_n \subseteq \mathbb{K}$ und $U: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv („Umordnung"). Dann gilt:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \text{ absolut kgt.} \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{U(n)} \text{ abs. kgt. und}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{U(n)}$$

4.16 Bemerkung (i) Vorraussetzung absolut kgt. wesentlich, d.h. ohne sie ist Beh. falsch ($\rightsquigarrow$ siehe auch: „Riemannscher Umordnungssatz")

Bsp.: $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$; alt. harm. Reihe kgt. aber nicht abs. kgt.

Betrachte folgende Umordnung:

$$\underbrace{-1 + \frac{1}{2}}_{n=1:\, b_1} \underbrace{-\underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)}_{2^0 \text{ Glieder}} + \frac{1}{4}}_{n=1:\, b_1} \underbrace{-\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)}_{2^1 \text{ Glieder}} + \frac{1}{6}}_{n=2:\, b_2} \underbrace{-\underbrace{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}\right)}_{2^2 \text{ Glieder}} + \frac{1}{8}}_{n=3:\, b_3}$$

$$- \cdots \underbrace{-\underbrace{\left(\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+3} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}-1}\right)}_{\geq 2^{n-1}\cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{2n+2}}_{\leq \frac{1}{6}\ (n\geq 2)}}_{\leq -\frac{1}{4}+\frac{1}{6} = -\frac{1}{12}}$$

$\Rightarrow$ mit jedem weiteren Summand wird ein Wert $\leq -\frac{1}{12}$ dazuaddiert $\Rightarrow$ Partialsumme antiton & nicht von unten beschr. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{N} b_n \xrightarrow{N\to\infty} -\infty$

(ii) Es gilt sogar für konv. Reihe $\sum_n a_n$

$$\sum_n a_{u(n)} \text{ kgt. } \forall \text{ Umordnungen } u \Rightarrow \sum_n a_n \text{ abs. kgt.}$$

(folgt z.B. aus Riemannschen Umordnungssatz per Widerspruchsbew.)

Beweis von Satz 4.15: Sei $S := \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Da abs. kgt.:

$\exists N \in \mathbb{N}$ so dass

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| - \sum_{n=1}^{N} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \left|S - \sum_{n=1}^{N} a_n\right| = \lim_{\substack{K\to\infty\\K>N}} \Bigl|\underbrace{\sum_{n=1}^{K} a_n - \sum_{n=1}^{N} a_n}_{\sum_{n=N+1}^{K} a_n}\Bigr| \leq \lim_{\substack{K\to\infty\\K>N}} \sum_{n=N+1}^{K} |a_n| = \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sei nun $M \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$\{u(1), u(2), \dots, u(M)\} \supseteq \{1, \dots, N\}$ (d.h. $M \geq \max\{u^{-1}(j) : j = 1, \dots, N\}$)

$\Rightarrow \forall m \geq M$ gilt:

$$\left|S - \sum_{k=1}^{m} a_{u(k)}\right| \leq \underbrace{\left|S - \sum_{n=1}^{N} a_n\right|}_{<\varepsilon/2} + \Bigl|\underbrace{\sum_{n=1}^{N} a_n - \sum_{k=1}^{m} a_{u(k)}}_{-\sum_{\substack{k\leq m\\u(k)>N}} a_{u(k)}}\Bigr|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\sum_{\substack{k\leq m\\u(k)>N}} |a_{u(k)}|}_{\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon \qquad \text{d.h. } \sum_{k=0}^{\infty} a_{u(k)} \text{ kgt.}$$

mit Summe S ✓ Wiederhole Argument mit $A := \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |a_{u(k)}|$ kgt. (mit Summe A), d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} a_{u(k)}$ abs. kgt. $\blacksquare$

4.17 Satz (von Mertens über das Cauchy-Produkt von Reihen)

Seien $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} b_n$ kgt.'e Reihen in $\mathbb{K}$, eine davon absolut kgt.! Für $n\in\mathbb{N}_0$ sei $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Dann ist $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} c_n$ kgt. und $\underbrace{\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n\right)}_{=:A}\underbrace{\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} b_n\right)}_{=:B} = \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}_0} c_n}_{=:C}$

Zusatz: Falls beide Reihen $\sum_n a_n$ und $\sum_n b_n$ abs kgt., dann ist auch $\sum_n c_n$ abs kgt.

Beweis: o.E. sei $\sum_n a_n$ abs. kgt. Für $N\in\mathbb{N}$ seien A_N, B_N, C_N die zugeh. Partialsummen. $\Rightarrow$ $\left(C_N = \sum_{n=0}^{N} c_n\right)$

$$C_N = \underbrace{a_0 b_0}_{c_0} + \underbrace{(a_0 b_1 + a_1 b_0)}_{c_1} + \ldots + \underbrace{(a_0 b_N + a_1 b_{N-1} + \ldots + a_N b_0)}_{c_N}$$

$$= a_0 B_N + a_1 B_{N-1} + \ldots + a_N B_0$$

$$\overset{B_N =: B-\beta_N}{=} A_N B - (a_0\beta_N + \ldots + a_N\beta_0) =: A_N B - \omega_N$$

Wir zeigen: $(\omega_N)_N$ ist Nullfolge (dies impliziert den Satz, da $A_N \to A$)

es gilt: (i) $(\beta_N)_N$ ist Nullfolge (klar: $B_N \to B$)

(ii) $(a_n)_n$ ist Nullfolge

Sei $\varepsilon>0$ bel.: $\overset{(i)}{\Rightarrow} \exists k\in\mathbb{N}\ \forall N\geq k: |\beta_N| \leq \frac{\varepsilon}{S}$; $S := \sum_n |a_n| < \infty$

$$\Rightarrow \forall N\geq k \text{ gilt: } |\omega_N| = \left|\sum_{j=0}^{N} \beta_j a_{N-j}\right| \leq \sum_{j=0}^{k-1} |\beta_j|\cdot|a_{N-j}| + \underbrace{\sum_{j=k}^{N} \underbrace{|\beta_j|}_{\leq \frac{\varepsilon}{S}}\cdot |a_{N-j}|}_{\leq\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \limsup_{N\to\infty} |\omega_N| \leq \sum_{j=0}^{k-1} |\beta_j| \underbrace{\limsup_{N\to\infty} |a_{N-j}|}_{=0\ (ii)} + \varepsilon = \varepsilon$$

$$\overset{\varepsilon>0 \text{ bel.}}{\Rightarrow} \limsup_{N\to\infty} |\omega_N| = 0 \Rightarrow (\omega_N)_N \text{ Nullfolge } ✓$$

Zusatz: Anwendung des bisherigen auf $\sum_n |a_n|$, $\sum_n |b_n|$ ☒