3. Stetige Funktionen

3.1. Funktionen von und nach $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

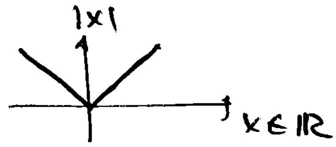
Generalvereinb.: $\mathbb{K}, \mathbb{K}' \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $D \subseteq \mathbb{K}$,

$f : D \to \mathbb{K}'$ eine Fkt. (also $D = \mathrm{dom}(f)$)

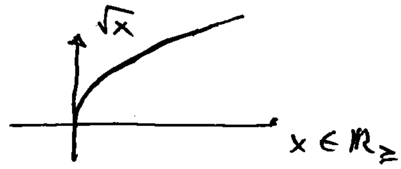
3.1. Beispiele (allg. für Fkt.'en – nicht notw. stetig).

- konst. Fkt. $\quad f: \begin{array}{l} \mathbb{K} \to \mathbb{K}' \\ x \mapsto c \end{array}$ $\quad$ wobei $c \in \mathbb{K}'$

- Betrag: $\quad |\cdot| : \begin{array}{l} \mathbb{K} \to \mathbb{R}_{\geq} \\ x \mapsto |x| \end{array}$

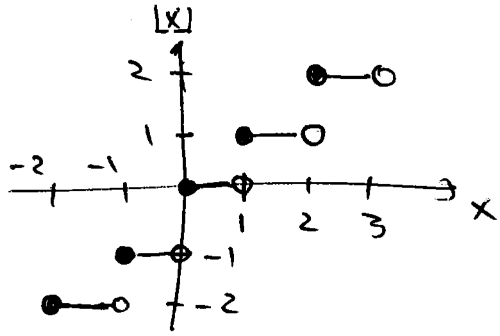


- Wurzel: $\quad \sqrt{\cdot} : \begin{array}{l} \mathbb{R}_{\geq} \to \mathbb{R}_{\geq} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{array}$



- ganzzahliger Anteil $\quad \lfloor \cdot \rfloor : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lfloor x \rfloor \end{array}$

  wobei
  - $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$
  - $0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$



- Polynom n'ten Grades, $n \in \mathbb{N}_0$:

$$p : \begin{array}{l} \mathbb{K} \to \mathbb{K} \\ x \mapsto p(x) \end{array}, \qquad p(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \; a_k \in \mathbb{K} \; \forall k, \; a_n \neq 0$$

- Rationale Fkt.: Seien $p, q : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ Polynome,

$D := \mathbb{K} \setminus \{x \in \mathbb{K} : q(x) = 0\}$,

$$r : \begin{array}{l} D \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \dfrac{p(x)}{q(x)} \end{array}$$

- <u>Dirichlet-Kamm</u> $f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$

3.2 Definition <u>Operationen mit $\mathbb{K}'$-wertigen Funktionen</u>

Seien $f, g: D \to \mathbb{K}'$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f+g: \begin{array}{l} D \to \mathbb{K}' \\ x \mapsto f(x)+g(x) =: (f+g)(x) \end{array} \\ \text{analog: } „-“, „\cdot“ \\ \bullet\ \frac{f}{g}: \begin{array}{l} D \setminus \{x \in \mathbb{K} : g(x)=0\} \to \mathbb{K}' \\ x \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)} =: \left(\frac{f}{g}\right)(x) \end{array} \end{array}\right\} \text{„punktweise Operationen“}$$

[speziell: $\forall \alpha \in \mathbb{K}': \ (\alpha f)(x) := \alpha f(x) \quad \forall x \in D$]

- für $\mathbb{K}' = \underline{\underline{\mathbb{R}}}$ (!):

$$f \begin{array}{c}\leq\\=\\>\end{array} g :\Longleftrightarrow \left(D_f = D_g \wedge f(x) \begin{array}{c}\leq\\=\\>\end{array} g(x) \ \forall x \in D_f \right)$$

- Erinnerung: Komposition in Def. 1.29.

3.2. Limes einer Funktion

3.3. Definition Sei $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}'$, sei a Häufungspkt. von $\mathcal{D}$.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existiert $:\Leftrightarrow \begin{cases} \exists y \in \mathbb{K}' : \forall (x_n)_n \subseteq \mathcal{D}\setminus\{a\} \text{ mit} \\ x_n \xrightarrow{n\to\infty} a \text{ gilt: } \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y \end{cases}$

  NB
  - $\exists (x_n)_n \subseteq \mathcal{D}\setminus\{a\}$ mit $x_n \to a$, da a Häuf.pkt.
  - y ist unabh. von der gew. Folge!

  Notation: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = y$

- Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und falls a Häufungspkt. von $\mathcal{D} \cap]-\infty, a]$, sei

  $\lim\limits_{x\nearrow a} f(x)$ existiert $:\Leftrightarrow \begin{cases} \exists y \in \mathbb{K}' : \forall (x_n)_n \subseteq \mathcal{D}\cap]-\infty, a[\\ \text{mit } x_n \xrightarrow{n\to\infty} a \text{ gilt:} \\ \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y \end{cases}$

  (linkseitiger Limes)

  analog: rechtsseitiger Limes: $\lim\limits_{x\searrow a} f(x)$

- Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathcal{D}$ von oben unbeschränkt sei

  $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existiert $:\Leftrightarrow \begin{cases} \exists y \in \mathbb{K}' \ \forall (x_n)_n \subseteq \mathcal{D} \text{ mit} \\ x_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty \text{ gilt: } \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y \end{cases}$

  Notation: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = y$

  analog: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = y$

- Falls $\mathbb{K}' = \mathbb{R}$ und es gilt in einem der obigen Fälle dass: $\lim_{n\to a} f(x_n) = +\infty$ für <u>alle</u> dort zugelassenen Folgen $(x_n)_n$, dann definieren wir: $\lim_{x\to a} f(x)$ existiert <u>nicht</u>; jedoch:

(bestimmte) Divergenz von f nach $+\infty$ für $x \to a$

<u>Notation</u>: $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$

analog für $-\infty$, oder für $x \nearrow a$, $x \searrow a$, $x \to \pm\infty$.

- Falls $a \in D$ <u>kein</u> Häufungspkt. von D ($\Leftrightarrow$: a ist isolierter Pkt. von D), setze

$$\lim_{x\to a} f(x) := f(a)$$

3.4 Beispiel

$$f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x) \;; \quad \lim_{x\searrow 0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\nearrow 0} f(x) = -\infty$$

$\lim_{x\to 0} f(x)$ existiert <u>nicht</u>.

3.5 Definition (Rechenregeln in $\overline{\mathbb{R}}$)

- $$\infty + r := r + \infty := \infty \quad \forall r \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$
  $$-\infty + r := r - \infty := -\infty \quad \forall r \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

- $$\overset{+}{(-)}\infty \cdot r := r \cdot \left(\overset{+}{(-)}\infty\right) := \begin{cases} \overset{+}{(-)}\infty, & r \in \mathbb{R}_> \cup \{\infty\} \\ \overset{-}{(+)}\infty, & r \in \mathbb{R}_< \cup \{-\infty\} \end{cases}$$

- $$\frac{r}{\overset{+}{(-)}\infty} := r \cdot \frac{1}{\overset{+}{(-)}\infty} := \frac{1}{\overset{+}{(-)}\infty} \cdot r := 0 \quad \forall r \in \mathbb{R}$$

! $\infty - \infty$, $-\infty + \infty$, $\overset{+}{(-)}\infty \cdot 0$, $0 \cdot \left(\overset{+}{(-)}\infty\right)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$!

sind <u>nicht</u> definiert

$\boxed{\text{3.6. Satz}}$ Seien $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{K}'$, a Häufungspkt. von $\mathcal{D}$ und $\underbrace{\lim_{x\to a} f(x)}_{=:\varphi\ (\in \mathbb{K}')}$ existiert, $\underbrace{\lim_{x\to a} g(x)}_{=:\gamma\ (\in \mathbb{K}')}$ existiert. Dann gilt:

(i) $\lim_{x\to a} (f+g)(x)$ existiert (und $= \varphi + \gamma$)

(ii) $\lim_{x\to a} (fg)(x)$ existiert (und $= \varphi\gamma$)

(iii) falls $\gamma \neq 0$ $\Rightarrow$ a ist Häufungspkt. von $\tilde{\mathcal{D}} := \{ x \in \mathcal{D} : g(x) \neq 0 \}$ und

$\lim_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ existiert (und $= \frac{\varphi}{\gamma}$)

Zusatz: (Z1) falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: analog für $x \uparrow a$, $x \downarrow a$, $x \to \pm\infty$

(Z2) falls $\mathbb{K}' = \mathbb{R}$:

- (i) [& (Z1)] bleibt gültig für $\varphi, \gamma \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, oder $\varphi, \gamma \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$
- (ii) [& (Z1)] " " " $\varphi \in \overline{\mathbb{R}}$, $\gamma \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$
- (iii) [& (Z1)] " " " $\varphi \in \overline{\mathbb{R}}$, $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ oder $\varphi \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$

Beweis: (i) Sei $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ $\Rightarrow$ $(f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} \varphi + \gamma$

Satz 2.36 (i)

(ii) analog zu (i) (verw. 2.36 (iii))

(iii) $\lim_{x \to a} g(x) = \gamma \neq 0 \Rightarrow$ für $(x_n)_n \subseteq \mathcal{D} \setminus \{a\}$, $x_n \to a$

gilt: $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N: \underline{|g(x_n) - \gamma| < \frac{|\gamma|}{2}}$

$\Rightarrow g(x_n) \neq 0$

$\rightarrow$ a ist Häufungspkt. von $\hat{\mathcal{D}}$!

Sei nun $(x_n)_n \subseteq \hat{\mathcal{D}} \setminus \{a\}$, $x_n \xrightarrow{n \to \infty} a$

$$\rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x_n) = \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{\varphi}{\gamma}.$$

Satz 2.37

Zusätze analog, z. B. (Z2) für (i): Sei $x_n \xrightarrow{n \to \infty} a$, $x_n \neq a$

Sei $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to a} g(x) = \gamma \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$\Downarrow$

$\forall S \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N:$
$f(x_n) > S - U$

$\Downarrow$

$\exists U \in \mathbb{R}: g(x_n) > U\ \forall n \in \mathbb{N}$
(hier geht ein, dass $\gamma \neq -\infty$!)

$\Downarrow$

$\forall n \geq N: (f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) > S$

d.h. $\lim_{n \to \infty} (f+g)(x_n) = \infty$

Da $(x_n)_n \subseteq \mathcal{D} \setminus \{a\}$ bel. (mit $x_n \to a$)

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} (f+g)(x) = \infty$$

$\blacksquare$

3.3. Stetigkeit

3.7 Definition Sei $f: \mathcal{D} \to \mathbb{K}'$ und $a \in \mathcal{D}$

(i) f <u>folgenstetig in a</u> $:\Leftrightarrow \left\{ \forall (x_n)_n \subseteq \mathcal{D}\right.$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ gilt $f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(a)$

(ii) f <u>stetig in a</u> $:\Leftrightarrow \left\{ \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathcal{D}\right.$ mit $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

<u>Moral</u>: „Wenn x nur nahe genug bei a, dann ist auch $f(x)$ nahe bei $f(a)$."

3.8 Satz Sei $f: \mathcal{D} \to \mathbb{K}'$ und $a \in \mathcal{D}$. Dann gilt:

f stetig in a $\Leftrightarrow$ f folgenstetig in a

<u>Beweis</u>:

„$\Rightarrow$" Sei $(x_n)_n \subseteq \mathcal{D}$ mit $x_n \to a$. Sei $\varepsilon > 0$

n.V. $\exists \delta > 0 \; \forall x \in \mathcal{D}$ mit $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Da $x_n \to a \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |x_n - a| < \delta$

und somit $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$

d.h. $f(x_n) \to f(a)$ ✓

„$\Leftarrow$" per Widerspruch.

<u>Ann.</u> f <u>nicht</u> stetig in a

$\Leftrightarrow$ $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \; \exists x \in \mathcal{D}$ mit $|x-a| < \delta$ und $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$

$(\delta = \frac{1}{n})$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in D$ mit $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$

$\Rightarrow (x_n)_n \subseteq D$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ und $(f(x_n))_n$ kgt. nicht gegen $f(a)$

$\lightning$ f folgenstetig in a $\blacksquare$

3.9 Bemerkung

Wegen Satz 3.8 fortan keine Unterscheidung zwischen folgenstetig und stetig (wir nennen beides nun stetig). Grund für Unterscheidung in Def. 3.7:

Falls $\mathbb{K}'$ allgemeiner als $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ (z.B topologischer Raum ohne 1. Abzählbarkeitsaxiom, siehe nächstes Semester), so gilt nur „Stetig $\Rightarrow$ folgenstetig", aber nicht die Umkehrung.

3.10 Satz Sei $f: D \to \mathbb{K}'$ und $a \in D$. Dann gilt

$$f \text{ stetig in } a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

(bedeutet: $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existiert und $= f(a)$).

<u>Beweis:</u> <u>1. Fall</u>: a isolierter Punkt von $\mathcal{D}$

- rechte Seite gilt stets wegen Def. 3.5
- linke Seite gilt auch stets, da (siehe Übung)

$x_n \xrightarrow{n\to\infty} a \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N : x_n = a$

$\Rightarrow f(x_n) = f(a) \quad \forall n \geq N \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(a)$

<u>2. Fall</u>: a Häufungspkt von $\mathcal{D}$

„$\Rightarrow$" klar, da nach Def 3.7 (i) links <u>mehr</u> Folgen erlaubt als rechts.

„$\Leftarrow$" <u>Ann.</u> f <u>nicht</u> stetig $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n \in \mathcal{D}$

mit $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ und $\underbrace{|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon}_{\Rightarrow x_n \neq a}$

also: $\exists (x_n)_n \subseteq \mathcal{D} \setminus \{a\}$ mit $x_n \to a$ und

$(f(x_n))_n$ kgt. <u>nicht</u> gegen $f(a)$

$\lightning$ zu $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ $\blacksquare$

Der Beweis hat gezeigt:

$\boxed{\text{3.11 Korollar}}$ Sei $f: \mathcal{D} \to \mathbb{K}'$ und $a \in \mathcal{D}$ ein <u>isolierter</u> Pkt. Dann ist f stetig in a.

3.12. Definition

Sei $f: D \to \mathbb{K}'$ und $A \subseteq D$

- f <u>stetig auf A</u> $:\Leftrightarrow \forall a \in A: f$ stetig in a
- f <u>stetig</u> $:\Leftrightarrow f$ stetig auf D

<u>3.13 Beispiele</u>

(i) konst. Fkt. ist stetig

(ii) $id_{\mathbb{K}}: \begin{array}{l} \mathbb{K} \to \mathbb{K} \\ x \mapsto x \end{array}$ stetig

(iii) Jede Fkt. $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{K}'$ ist stetig

3.14 Satz („Summen, Produkte, Quotienten stetiger Fkt.'en sind stetig!")

Seien $f, g: D \to \mathbb{K}'$, stetig in $a \in D$. Dann gilt:

(i) $f+g$ stetig in a

(ii) fg stetig in a

(iii) falls $g(a) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g}: \{x \in D : g(x) \neq 0\} \to \mathbb{K}'$ stetig in a

<u>Beweis</u>: Folgt aus Satz 3.6 und 3.10 $\boxtimes$

3.15 Korollar Jede <u>rationale</u> Fkt. ist stetig

<u>Beweis</u>: Beispiele 3.13 und Satz 3.14 $\boxtimes$

3.16 Satz Verkettung stetiger Fkt.'en ist stetig

Seien $f: D_f \to \mathbb{K}'$, $g: D_g \to \mathbb{K}''$ ($\mathbb{K}'' \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$)
mit $f(D_f) \subseteq D_g \subseteq \mathbb{K}'$ sowie

- f stetig in $a \in D_f$
- g stetig in $f(a)$ ($\in D_g$)

Dann ist $g \circ f: D_f \to \mathbb{K}''$ stetig in a.

Beweis: Sei $(x_n)_n \subseteq D_f$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$

f stetig in a $\Rightarrow$ $\underbrace{f(x_n)}_{=:y_n} \xrightarrow{n \to \infty} \underbrace{f(a)}_{=:y}$

Da $(y_n)_n \subseteq D_g$ mit $y_n \xrightarrow{n\to\infty} y$ ($\in D_g$) und g stetig in y

$\Rightarrow$ $g(y_n) \xrightarrow{n\to\infty} g(y)$,

also $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{(g \circ f)(x_n)}_{g(\underbrace{f(x_n)}_{y_n})} = g(y) = g(f(a)) = (g\circ f)(a)$

Da Folge $(x_n)_n$ bel. mit $x_n \to a$

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(a)$

exist. insbesonders! ∎

3.17 Beispiele

Sei f stetig, dann ist $|f|$ stetig,
aus Satz 3.16, da $|f| = |\cdot| \circ f$ und
(siehe Übung) $|\cdot|$ ist stetig.

3.4 Eigenschaften stetiger Funktionen

$\boxed{\text{3.18 Satz}}$ Sei $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}'$ stetig in $a \in \mathcal{D}$

(i) Falls $f(a) \neq 0$, dann $\exists \delta > 0 : \forall x \in \mathcal{D}$ mit $|x-a| < \delta$ gilt: $f(x) \neq 0$

(ii) Falls $\mathbb{K}' = \mathbb{R}$ und $f(a) > 0$, dann $\exists \delta > 0 : \forall x \in \mathcal{D}$ mit $|x-a| < \delta$ gilt: $f(x) > 0$ [analog für "< 0"]

Beweis Sei $\varepsilon := \frac{|f(a)|}{2} \overset{\text{n.V.}}{>} 0 \overset{f \text{ stetig in } a}{\Longrightarrow} \exists \delta > 0 :$

$\forall x \in \mathcal{D}$ mit $|x-a| < \delta$ gilt $\big| f(x) - f(a) \big| < \frac{|f(a)|}{2}$ $(*)$

(i) $\overset{(*)}{\Longrightarrow} f(x) \neq 0$ [sonst $|f(a)| < \frac{|f(a)|}{2}$ ↯]

(ii) Ann.: $f(x) \leq 0 \overset{(*)}{\Longrightarrow} f(a) - f(x) < \frac{f(a)}{2} \Rightarrow \frac{f(a)}{2} < f(x) \leq 0$

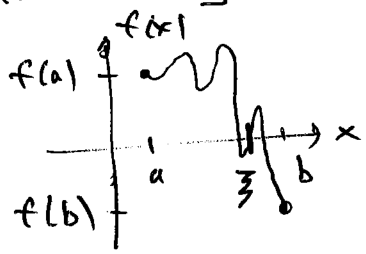
↯ da $f(a) > 0$

$\boxed{\text{Nur für } \mathbb{K} = \mathbb{K}' = \mathbb{R} \quad (!)}$

$\boxed{\text{3.19 Satz}}$ (Nullstellensatz von Bolzano)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ [oder andersrum]

Dann $\exists \xi \in \,]a,b[\, : f(\xi) = 0$



Beweis: Setze $A := \{ x \in [a,b] : f(x) \geq 0 \} \subseteq \mathbb{R}$

- $A \neq \emptyset$ (da $a \in A$)
- A von oben beschränkt (da b ob. Schranke)

$\Rightarrow \xi := \sup A \in [a,b]$

$\Rightarrow \exists$ Folge $(x_n)_n \subseteq A$: $x_n \xrightarrow{n \to \infty} \xi$ (Übung!)

f stetig $\Rightarrow f(\xi) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{f(x_n)}_{\geq 0} \geq 0 \Rightarrow \xi \in [a,b[$ $\quad f(b)<0$

Ann: $f(\xi) > 0 \overset{\text{Satz 3.18 (ii)}}{\Rightarrow} \exists \delta > 0 : \forall x \in]\xi-\delta, \xi+\delta[\cap [a,b]$
gilt $f(x) > 0$

$\Rightarrow \exists x_0 > \xi : f(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \in A$ ↯ da $\xi = \sup A$

$\Rightarrow f(\xi) = 0.$ ∎

3.20 Korollar (Zwischenwertsatz) | Nur für $\mathbb{K} = \mathbb{K}' = \mathbb{R}$ (!)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.
Dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Beweis: o.E. sei $f(a) > f(b)$ ["=" langweilig; "<" analog]

Sei $y \in]f(b), f(a)[$ ein bel. Zwischenwert

Setze $g : \begin{array}{l} [a,b] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto g(x) := f(x) - y \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \cdot\ g \text{ stetig} \\ \cdot\ g(a) > 0 \\ \cdot\ g(b) < 0 \end{cases}$

$\overset{\text{Satz 3.19}}{\Rightarrow} \exists \xi \in]a,b[: 0 = g(\xi) = f(\xi) - y$ ∎

3.21 Satz Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall (eigentlich oder uneigentlich, d.h. auch $\pm\infty$ als Grenzen erlaubt) und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

$f(I) \subseteq \mathbb{R}$ ist (uneigentliches) Intervall.

Beweis:

1. Fall: $f = a$ Konstant $\Rightarrow f(I) = [a,a]$ (deg. Interv.)

2. Fall: f nicht konstant

Sei $A := \inf f(I) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

$B := \sup f(I) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$\Rightarrow$ • $f(I) \subseteq [A, B]$ (1) ⊛ (⊛ Falls $A = -\infty$ oder $B = \infty$, muss Interv. an der jeweiligen Stelle offen sein!)

$f \neq$ konst. $\Rightarrow A < B$

$\Rightarrow$ wähle $y \in \,]A, B[$ bel.

$\overset{\text{Def. von sup/inf}}{\Rightarrow}$ $\exists\, a, b \in I: \quad f(a) < y < f(b)$

$\overset{\text{Zwischenwertsatz}}{\Rightarrow}$ $\exists\, x \in \,]a, b[\, : \quad f(x) = y$

$\overset{y \text{ bel.}}{\Rightarrow}$ $]A, B[\, \subseteq f(I)$ (2)

$\overset{(1)\&(2)}{\Rightarrow}$ $f(I) \in \{\,]A,B[, \, [A,B[, \,]A,B], \, [A,B] \,\}$ ⊛

∎

3.22 Satz (Stetigkeit der Umkehrfkt.)

Sei I (evtl. uneigentliches) Intervall mit $|I| > 0$, d.h. nicht ausgeartet. Sei $f: I \to \mathbb{R}$ strikt monoton.
Dann $\exists f^{-1}: f(I) \to I$ und ist stetig.

Beweis: o.E. f strikt isoton [sonst betrachte $-f$]

$\Rightarrow$ f injektiv $\Rightarrow$ f^{-1} existiert und ist strikt isoton.

Ann: $\exists y \in f(I)$: f^{-1} nicht stetig in y

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \ \exists (y_n)_n \subseteq f(I)$: $|y_n - y| < \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}$ und

$$|f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)| \geq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (*)$$

(vgl. Bew. Satz 3.8) (also insbes. $y_n \neq y$)

Setze $x := f^{-1}(y) \in I$, $x_n := f^{-1}(y_n) \in I \quad \forall n$

- falls $y < y_n \Rightarrow x < x + \varepsilon \overset{(*)}{\leq} x_n \Rightarrow f(x) < f(x+\varepsilon) \leq f(x_n)$
- falls $y_n < y \Rightarrow x_n \overset{(*)}{\leq} x - \varepsilon < x \Rightarrow f(x_n) \leq f(x-\varepsilon) < f(x)$

$x \pm \varepsilon \in I$ (hier Intervall benutzt!)

↯ zu $|y_n - y| < \frac{1}{n}$ falls n hinreichend groß ☒

3.23 Bemerkung:

- f muss nicht stetig sein! (aber $f(I)$ dann vielleicht kein Int.)
- stärkere Voraussetzung: „f strikt monoton" darf durch „f stetig und injektiv" ersetzt werden (hinreichend für strikt monoton) (siehe Üb).

3.24 Definition

$K \subseteq \mathbb{K}$ (folgen-) kompakt $:\Leftrightarrow \begin{cases} \text{jede Folge } (x_n)_n \subset K \\ \text{besitzt eine kgt.e. Teilfolge} \\ (x_{n_k})_k \text{ mit } \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \underline{\in} K \end{cases}$

3.25 Beispiele

- $K = [a,b]$ kompakt in $\mathbb{R}$ für $a, b \in \mathbb{R}$
- Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0 \Rightarrow K = \overline{B_r}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ kompakt in $\mathbb{C}$

denn: K beschränkt $\overset{\text{Bolz.-W.}}{\Longrightarrow} (x_n)_n^{\subseteq K}$ hat kgt'e TF $(x_{n_k})_k^{\subseteq K}$

wegen "$\leq$" ($\mathbb{C}$) bzw "$[\,,\,]$" ($\mathbb{R}$) gilt

$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \underline{\in} K$ („abgeschlossen").

3.26 Satz Sei $K \subseteq \mathbb{K}$ kompakt, $f: K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt und nimmt ihr Maximum und Minimum an, d.h.

$$\exists\, x_{\pm} \in K: \quad f(x_{\pm}) = \begin{matrix}\max\\ \min\end{matrix} \{f(x) : x \in K\}$$

Beweis: nur für max; min analog.

Sei $S := \sup\{f(x) : x \in K\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ("$=\infty$" $\Leftrightarrow f$ nicht von oben beschr.)

$\Rightarrow \exists$ Folge $(x_n)_n \subseteq K$ mit $f(x_n) \to S$ $\quad (*)$

$\overset{K \text{ kompakt}}{\Longrightarrow} \exists$ Teilfolge $(x_{n_k})_k \subseteq K$ mit $x_+ := \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \underset{!}{\in} K$

f stetig $\Rightarrow f(x_+) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \overset{(*)}{=} S$

$\Rightarrow S < \infty$ und Max wird angenommen

$\boxtimes$

$\boxed{\text{3.27 Definition}}$ Sei $f: D \to \mathbb{K}'$ und $A \subseteq D$

- f gleichmäßig stetig auf A $:\Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall x, x' \in A \text{ mit} \\ |x - x'| < \delta \text{ gilt: } |f(x) - f(x')| < \varepsilon \end{cases}$

(NB δ hängt nicht von $x, x' \in A$ ab, ist gleichmäßig in x, x'!)

- f Lipschitz-stetig auf A $:\Leftrightarrow$ $\exists C \in]0, \infty[: \forall x, x' \in A; x \neq x'$:
$|f(x) - f(x')| < C|x - x'|$

$\boxed{\text{3.28 Lemma}}$ $\left.\begin{array}{l}\text{Lipschitz-stetig} \\ \text{auf } A\end{array}\right\} \underset{(a)}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l}\text{gleichmäßig} \\ \text{stetig auf } A\end{array}\right\} \underset{(b)}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l}\text{stetig} \\ \text{auf } A\end{array}\right.$

Beweis (a) Wähle $\delta := \frac{\varepsilon}{C}$; (b) klar! ∎

$\boxed{\text{3.29 Satz}}$ Sei $K \subseteq \mathbb{K}$ kompakt und $f: K \to \mathbb{K}'$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig auf K.

Beweis: Per Widerspruch.

$\delta = \frac{1}{n} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n, x_n' \in K$ mit $|x_n - x_n'| < \frac{1}{n}$ (1) und

(2) $|f(x_n) - f(x_n')| \geq \varepsilon$.

K kpt („kompakt") $\Rightarrow (x_n)_n$ hat kgt.'e Teilfolge $(x_{n_k})_k$ mit $\xi := \lim_{k \to \infty} x_{n_k} \in K$.

$\overset{(1)}{\Rightarrow} \lim_{k \to \infty} x_{n_k}' = \xi$

$\overset{(2)}{\Rightarrow} \forall k: \quad |f(x_{n_k}) - f(x_{n_k}')| \geq \varepsilon$

$$\begin{array}{ccc} f(x_{n_k}) & & f(x_{n_k}') \\ \downarrow & k \to \infty & \downarrow \\ f(\xi) & & f(\xi) \end{array} \qquad (\Leftarrow f \text{ stetig in } \xi \in K)$$

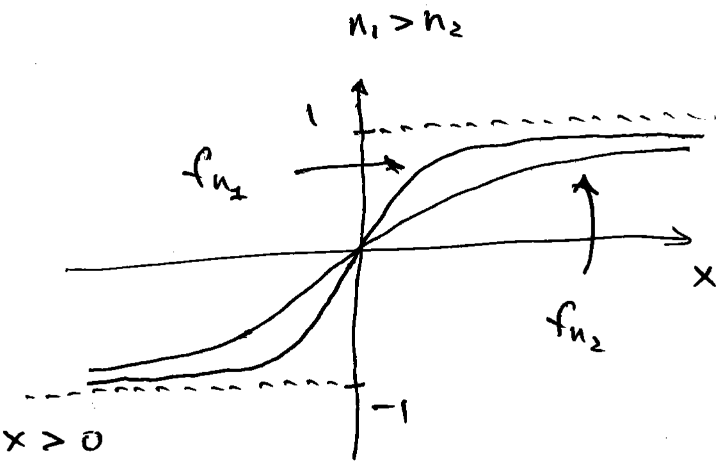
$\Rightarrow \quad 0 \geq \varepsilon$ ↯ ∎

3.5. Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

Fragestellung wird illustriert durch

3.30 Beispiel

$\forall n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x}{\frac{1}{n} + |x|} \end{array}$



klar (!): f_n stetig $\forall n$

$\forall x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad \text{existiert}$$

Definiere Fkt.

$$f := \operatorname{sgn} : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \end{array} \qquad \text{unstetig!}$$

Frage: Ist Stetigkeitsverlust vermeidbar?

Ja - wenn man „schärfere" Kgz. hat!

3.31 Definition Sei $D \subseteq \mathbb{K}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : D \to \mathbb{K}'$

(i) Fkt'enfolge $(f_n)_n$ kgt. punktweise gegen $f : D \to \mathbb{K}'$

$$:\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in D \text{ und } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N_{\varepsilon, x} \in \mathbb{N} : \\ \qquad \forall n \geq N \text{ gilt: } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left(\forall x \in D : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \right)$$

(ii) Fkt'enfolge $(f_n)_n$ kgt. gleichmässig gegen $f: D \to \mathbb{K}'$

$$:\iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}: \forall n \geq N \text{ gilt} \\ \quad \forall x \in D: \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \end{cases}$$

$\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}: \forall n \geq N$ gilt:

$$\|f_n - f\|_\infty := \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| := \sup \{|f_n(x) - f(x)| : x \in D\} < \varepsilon$$

- Unterschied zu (i): das zu geg. $\varepsilon > 0$ gesuchte N ist unabhängig von x! („gleichmässig")
- gleichmässige (glm.) kgt. $\Rightarrow$ pkt. weise kgt.

3.32 Beispiel: $(f_n)_n$ aus Bsp. 3.30 kgt. punktweise, aber nicht gleichmässig gegen sgn. [Nachprüfen! Folgt aber auch aus :]

3.33 Satz (Gleichmässige Limiten stetiger Fkt'en sind stetig!)

Sei $D \subseteq \mathbb{K}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ sei $f_n: D \to \mathbb{K}'$ stetig und $(f_n)_n$ glm. kgt. gegen $f: D \to \mathbb{K}'$. Dann ist auch f stetig.

Beweis: „$\frac{\varepsilon}{3}$ - Argument": Sei $x \in D$ bel. fest, sei $\varepsilon > 0$.

$\forall y \in D\ \forall n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \quad (*)$$

$$\text{glm. Kgz. } f_n \to f \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \forall \xi \in D: \ |f_n(\xi) - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$\Rightarrow$ für dieses N gilt:

$$\forall y \in D: |f(x) - f(y)| < \frac{2}{3}\varepsilon + |f_N(x) - f_N(y)| \quad (**)$$

NB: $(**)$ wäre im allg. falsch, wenn N von ξ abhinge!

f_N stetig in $x \Rightarrow \exists\, \delta = \delta_{x,N,\varepsilon} > 0$ so dass $\forall y \in D$

mit $|x-y| < \delta$ gilt: $|f_N(x) - f_N(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\overset{(**)}{\Rightarrow}$ $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, also f stetig in x ■

---

4. Potenzreihen und elementare Funktionen

Zur Vorbereitung eine Vertiefung unseres Verständnisses über:

4.1 Reihen (2. Teil)

Erinnerung: Sei $(a_k)_k \subseteq \mathbb{K}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$

$\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k$ kgt. $:\Leftrightarrow (s_n)_n$ kgt. $\Leftrightarrow (s_n)_n$ Cauchy

4.1. Satz $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k$ kgt. in $\mathbb{K}$ $\Rightarrow$ $(a_k)_k$ ist Nullfolge

Beweis: n. V. is $(s_n)_n$ Cauchy, d.h.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n,m \geq N: \quad |s_n - s_m| < \varepsilon \quad (*)$

- für $n = m+1$ gilt $s_{m+1} - s_m = a_{m+1}$

$(*) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m \geq N: \quad |a_{m+1}| < \varepsilon \Rightarrow$ Beh. ■

4.2 Bemerkung

Es gilt nicht „$\Leftarrow$" in Satz 4.1

Bsp.: harmonische Reihe $a_k = \frac{1}{k}$

(vgl. Aufg. 2, Blatt 5)