3.4 Eigenschaften stetiger Funktionen

3.18 Satz Sei $f: \mathcal{D} \to \mathbb{K}'$ stetig in $a \in \mathcal{D}$

(i) Falls $f(a) \neq 0$, dann $\exists \delta > 0 : \forall x \in \mathcal{D}$ mit
$|x-a| < \delta$ gilt: $f(x) \neq 0$

(ii) Falls $\mathbb{K}' = \mathbb{R}$ und $f(a) > 0$, dann $\exists \delta > 0 : \forall x \in \mathcal{D}$ mit $|x-a| < \delta$ gilt: $f(x) > 0$ [analog für "< 0"]

Beweis Sei $\varepsilon := \frac{|f(a)|}{2} \overset{\text{n.V.}}{>} 0 \overset{f \text{ stetig in } a}{\Longrightarrow} \exists \delta > 0 :$

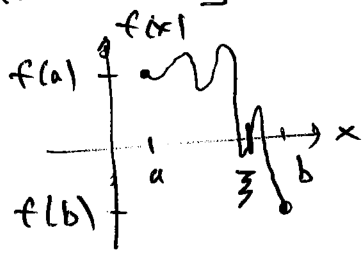
$\forall x \in \mathcal{D}$ mit $|x-a| < \delta$ gilt $\big| f(x) - f(a) \big| < \frac{|f(a)|}{2}$ $(*)$

(i) $\overset{(*)}{\Longrightarrow} f(x) \neq 0$ [sonst $|f(a)| < \frac{|f(a)|}{2}$ ↯]

(ii) Ann.: $f(x) \leq 0 \overset{(*)}{\Longrightarrow} f(a) - f(x) < \frac{f(a)}{2} \Rightarrow \frac{f(a)}{2} < f(x) \leq 0$
↯ da $f(a) > 0$

3.19 Satz (Nullstellensatz von Bolzano) Nur für $\mathbb{K} = \mathbb{K}' = \mathbb{R}$ (!)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ [oder andersrum]
Dann $\exists \xi \in \,]a,b[\, : f(\xi) = 0$



Beweis: Setze $A := \{ x \in [a,b] : f(x) \geq 0 \} \subseteq \mathbb{R}$

- $A \neq \emptyset$ (da $a \in A$)
- A von oben beschränkt (da b ob. Schranke)

$\Rightarrow \xi := \sup A \in [a,b]$

$\Rightarrow \exists$ Folge $(x_n)_n \subseteq A$: $x_n \xrightarrow{n \to \infty} \xi$ (Übung!)

f stetig $\Rightarrow f(\xi) = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{f(x_n)}_{\geq 0} \geq 0 \Rightarrow \xi \in [a,b[$ $\quad f(b)<0$

Ann: $f(\xi) > 0 \overset{\text{Satz 3.18 (ii)}}{\Rightarrow} \exists \delta > 0 : \forall x \in]\xi-\delta, \xi+\delta[\cap [a,b]$
gilt $f(x) > 0$

$\Rightarrow \exists x_0 > \xi : f(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \in A$ ↯ da $\xi = \sup A$

$\Rightarrow f(\xi) = 0.$ ∎

3.20 Korollar (Zwischenwertsatz) | Nur für $\mathbb{K} = \mathbb{K}' = \mathbb{R}$ (!)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.
Dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Beweis: o.E. sei $f(a) > f(b)$ ["=" langweilig ; "<" analog]

Sei $y \in]f(b), f(a)[$ ein bel. Zwischenwert

Setze $g : \begin{array}{l}[a,b] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto g(x) := f(x) - y\end{array} \Rightarrow \begin{cases} \cdot\ g \text{ stetig} \\ \cdot\ g(a) > 0 \\ \cdot\ g(b) < 0 \end{cases}$

$\overset{\text{Satz 3.19}}{\Rightarrow} \exists \xi \in]a,b[: 0 = g(\xi) = f(\xi) - y$ ∎

3.21 Satz Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall (eigentlich oder <u>uneigentlich</u>, d.h. auch $\pm\infty$ als Grenzen erlaubt) und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

$f(I) \subseteq \mathbb{R}$ ist (uneigentliches) Intervall.

Beweis:

1. Fall: $f = a$ Konstant $\Rightarrow f(I) = [a,a]$ (deg. Interv.) ✓

2. Fall: f nicht konstant

Sei $A := \inf f(I) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

$B := \sup f(I) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$\Rightarrow$ • $f(I) \subseteq [A, B]$ (1) ⊛ (⊛ Falls $A = -\infty$ oder $B = \infty$, muss Interv. an der jeweiligen Stelle offen sein!)

$f \neq$ konst. $\Rightarrow A < B$

$\Rightarrow$ wähle $y \in \,]A, B[$ bel.

$\overset{\text{Def. von sup/inf}}{\Rightarrow} \quad \exists a, b \in I: \quad f(a) < y < f(b)$

$\overset{\text{Zwischenwertsatz}}{\Rightarrow} \quad \exists x \in \,]a, b[\,: \quad f(x) = y$

$\overset{y \text{ bel.}}{\Rightarrow} \quad]A, B[\,\subseteq f(I) \qquad (2)$

$\overset{(1)\,\&\,(2)}{\Rightarrow} \quad f(I) \in \{\,]A,B[\,,\ [A,B[\,,\ ]A,B]\,,\ [A,B]\,\}$ ⊛

☒

3.22 Satz (Stetigkeit der Umkehrfkt.)

Sei I (evtl. uneigentliches) Intervall mit $|I| > 0$, d.h. nicht ausgeartet. Sei $f: I \to \mathbb{R}$ strikt monoton. Dann $\exists\, f^{-1}: f(I) \to I$ und ist stetig.

Beweis: o.E. f strikt isoton [sonst betrachte $-f$]

$\Rightarrow f$ injektiv $\Rightarrow f^{-1}$ existiert und ist strikt isoton.

Ann: $\exists\, y \in f(I)$: f^{-1} nicht stetig in y

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0\ \exists\, (y_n)_n \subseteq f(I)$: $|y_n - y| < \frac{1}{n}\ \forall n \in \mathbb{N}$ und

$$|f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)| \geq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (*)$$

(vgl. Bew. Satz 3.8) (also insbes. $y_n \neq y$)

Setze $x := f^{-1}(y) \in I$, $x_n := f^{-1}(y_n) \in I \quad \forall n$

- falls $y < y_n \Rightarrow x < x + \varepsilon \overset{(*)}{\leq} x_n \Rightarrow f(x) < f(x+\varepsilon) \leq f(x_n)$
- falls $y_n < y \Rightarrow x_n \overset{(*)}{\leq} x - \varepsilon < x \Rightarrow f(x_n) \leq f(x-\varepsilon) < f(x)$

$x \pm \varepsilon \in I$ (hier Intervall benutzt!)

↯ zu $|y_n - y| < \frac{1}{n}$ falls n hinreichend groß ▨

3.23 Bemerkung:

- f muss nicht stetig sein! (aber $f(I)$ dann vielleicht kein Int.)
- stärkere Voraussetzung: „f strikt monoton" darf durch „f stetig und injektiv" ersetzt werden (hinreichend für strikt monoton) (siehe Üb).

3.24 Definition

$K \subseteq \mathbb{K}$ (folgen-) kompakt $:\Leftrightarrow \begin{cases} \text{jede Folge } (x_n)_n \subset K \\ \text{besitzt eine kgt.e Teilfolge} \\ (x_{n_k})_k \text{ mit } \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in K \end{cases}$

3.25 Beispiele

- $K = [a, b]$ kompakt in $\mathbb{R}$ für $a, b \in \mathbb{R}$
- Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0 \Rightarrow K = \overline{B}_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ kompakt in $\mathbb{C}$

denn: K beschränkt $\overset{\text{Bolz.-W.}}{\Longleftrightarrow}$ $(x_n)_n \subseteq K$ hat kgt'e TF $(x_{n_k})_k \subseteq K$

wegen "$\leq$" ($\mathbb{C}$) bzw "[,]" ($\mathbb{R}$) gilt

$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in K$ („abgeschlossen").

3.26 Satz Sei $K \subseteq \mathbb{K}$ kompakt, $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt und nimmt ihr Maximum und Minimum an, d.h.

$$\exists x_\pm \in K : \quad f(x_\pm) = \max_{\min} \{f(x) : x \in K\}$$

Beweis: nur für max; min analog.

Sei $S := \sup\{f(x) : x \in K\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ("$=\infty$" $\Leftrightarrow f$ nicht von oben beschr.)

$\Rightarrow \exists$ Folge $(x_n)_n \subseteq K$ mit $f(x_n) \to S$ $\quad (*)$

$\overset{K \text{ kompakt}}{\Longrightarrow} \exists$ Teilfolge $(x_{n_k})_k \subseteq K$ mit $x_+ := \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in K$

f stetig $\Rightarrow f(x_+) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \overset{(*)}{=} S$

$\Rightarrow S < \infty$ und Max wird angenommen

$\boxtimes$

$\boxed{\text{3.27 Definition}}$ Sei $f: D \to \mathbb{K}'$ und $A \subseteq D$

- f gleichmäßig stetig auf A $:\Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in A \text{ mit} \\ |x - x'| < \delta \text{ gilt: } |f(x) - f(x')| < \varepsilon \end{cases}$

(NB δ hängt nicht von $x, x' \in A$ ab, ist gleichmäßig in x, x'!)

- f Lipschitz-stetig auf A $:\Leftrightarrow$ $\exists C \in]0, \infty[: \forall x, x' \in A ; x \neq x'$:
$|f(x) - f(x')| < C|x - x'|$

$\boxed{\text{3.28 Lemma}}$ $\left.\begin{matrix}\text{Lipschitz-stetig} \\ \text{auf } A\end{matrix}\right\} \underset{(a)}{\Rightarrow} \left\{\begin{matrix}\text{gleichmäßig} \\ \text{stetig auf } A\end{matrix}\right\} \underset{(b)}{\Rightarrow} \left\{\begin{matrix}\text{stetig} \\ \text{auf } A\end{matrix}\right.$

Beweis (a) wähle $\delta := \frac{\varepsilon}{C}$; (b) klar! ∎

$\boxed{\text{3.29 Satz}}$ Sei $K \subseteq \mathbb{K}$ kompakt und $f: K \to \mathbb{K}'$ stetig
Dann ist f gleichmäßig stetig auf K.

Beweis: Per Widerspruch.

$\delta = \frac{1}{n} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n, x_n' \in K$ mit $|x_n - x_n'| < \frac{1}{n}$ (1) und

(2) $|f(x_n) - f(x_n')| \geq \varepsilon$.

K kpt („kompakt") $\Rightarrow (x_n)_n$ hat kgt.'e Teilfolge

$(x_{n_k})_k$ mit $\xi := \lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} \in K$.

$\overset{(1)}{\Rightarrow} \lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k}' = \xi$

$\overset{(2)}{\Rightarrow} \forall k: \quad |f(x_{n_k}) - f(x_{n_k}')| \geq \varepsilon$

$$\begin{matrix} \downarrow k \to \infty & \downarrow \\ f(\xi) & f(\xi) \end{matrix} \quad (\Leftarrow f \text{ stetig in } \xi \in K)$$

$\Rightarrow \quad 0 \geq \varepsilon \quad$ ↯ ∎