

3. Stetige Funktionen

3.1. Funktionen von und nach \mathbb{R} oder \mathbb{C}

Generalvereinb. : $K, K' \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}, D \subseteq K,$

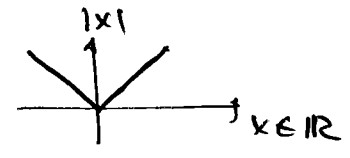
$f: D \rightarrow K'$ eine Fkt. (also $D = \text{dom}(f)$)

3.1. Beispiele (allg. für Fkt.'en - nicht natw. stetig).

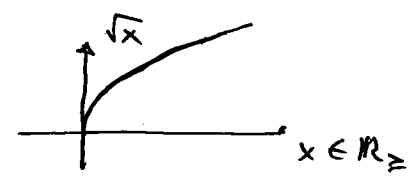
• konst. Fkt. $f: K \rightarrow K'$
 $x \mapsto c$

wobei $c \in K'$

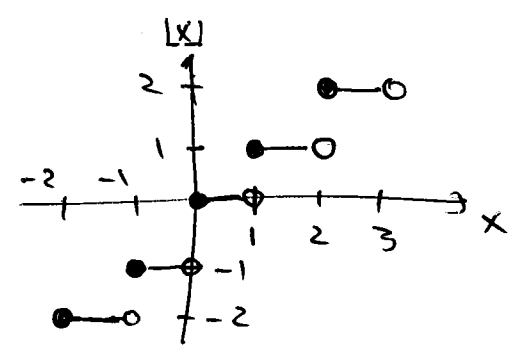
• Betrag : $|\cdot|: K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq}$
 $x \mapsto |x|$



• Wurzel: $\sqrt{\cdot}: \mathbb{R}_{\geq} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq}$
 $x \mapsto \sqrt{x}$



• ganzzahliger Anteil $L: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \lfloor x \rfloor$



wobei • $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$
• $0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$

• Polynom n'ten Grades, $n \in \mathbb{N}_0$:

$p: K \rightarrow K$
 $x \mapsto p(x)$

$$p(x) := \sum_{k=0}^n a_k x^k, a_k \in K \forall k, \underline{\underline{a_n \neq 0}}$$

• Rationale Fkt. : Seien $p, q: K \rightarrow K$ Polynome,

$$D := K \setminus \{x \in K : q(x) = 0\}$$

$$r: D \rightarrow K$$
$$x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$$

- Dirichlet-Kamm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

3.2 Definition Operationen mit \mathbb{K}' -wertigen Funktionen

Seien $f, g: D \rightarrow \mathbb{K}'$

- $f + g: D \rightarrow \mathbb{K}'$
 $x \mapsto f(x) + g(x) =: (f+g)(x)$
 - analog: " - " , " \cdot "
 - $\frac{f}{g}: D \setminus \{x \in \mathbb{K}' : g(x) = 0\} \rightarrow \mathbb{K}'$
 $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)} =: \left(\frac{f}{g}\right)(x)$
- } "punktweise Operationen"

[speziell: $\forall \alpha \in \mathbb{K}' : (\alpha f)(x) := \alpha f(x) \quad \forall x \in D$]

- für $\mathbb{K}' = \underline{\underline{\mathbb{R}}}$ (!):

$$f \underset{>}{\leq} g : \Leftrightarrow (D_f = D_g \wedge f(x) \underset{>}{\leq} g(x) \quad \forall x \in D_f)$$

- Erinnerung: Komposition in Def. 1.29.