## 2.5 Folgen, Grenzwert, Reihen

Im folgenden ist $\mathbb{K} := \mathbb{Q}$ (aber auch, später, für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

### 2.28 Definition

Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(\subseteq \mathbb{K})$ $:\Longleftrightarrow$ Abbildung $\begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{K} \\ n \mapsto a_n \end{array}$

(auch: $(a_1, a_2, a_3, \dots)$)

Analog mit „verschobener Indexmenge": $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(a_n)_{n\geq 10}$

– falls keine Verwechslung der Indexmenge: $(a_n)_n$

### 2.29 Beispiele

(i) konstante Folge: $(a, a, a, \dots)$ mit $a \in \mathbb{K}$

(ii) alternierende Folge $\left((-1)^{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, 1, \dots)$

(iii) geometrische Folge $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a \in \mathbb{K}$

(iv) Fibonacci-Folge (rekursiv def.): $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

wobei $a_0 := 0$, $a_1 := 1$, $a_{n+1} := a_n + a_{n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$

### 2.30 Definition

(i) $\left.\begin{array}{l}\text{Folge } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K} \\ \text{konvergent gegen } a \in \mathbb{K}\end{array}\right\} :\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \overbrace{\forall \varepsilon \in \mathbb{K}, \varepsilon > 0}^{\text{kurz: } \forall \varepsilon > 0} \ \exists N \in \mathbb{N}: \\ \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon \end{array}\right.$

Schreibweise: $\lim\limits_{(n\to\infty)} a_n = a$, $a_n \xrightarrow{(n\to\infty)} a$

Sprechweise: $a$ ist limes oder Grenzwert von $(a_n)_n$

(NB: $N = N(\varepsilon)$ hängt von $\varepsilon$ ab!)

(ii) $(a_n)_n$ ist <u>Nullfolge</u> $:\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(iii) $(a_n)_n$ <u>divergent (in $\mathbb{K}$)</u> $:\Leftrightarrow \nexists\, a \in \mathbb{K} : \lim_{n\to\infty} a_n = a$

(auch: <u>nicht konvergent</u>)

(iv) Spezialfall von (iii):

<u>$(a_n)_n$ divergent nach $\underset{(-)}{+}\infty$</u> $:\Leftrightarrow \forall s \in \mathbb{N}\ \exists N \in \mathbb{N}:$

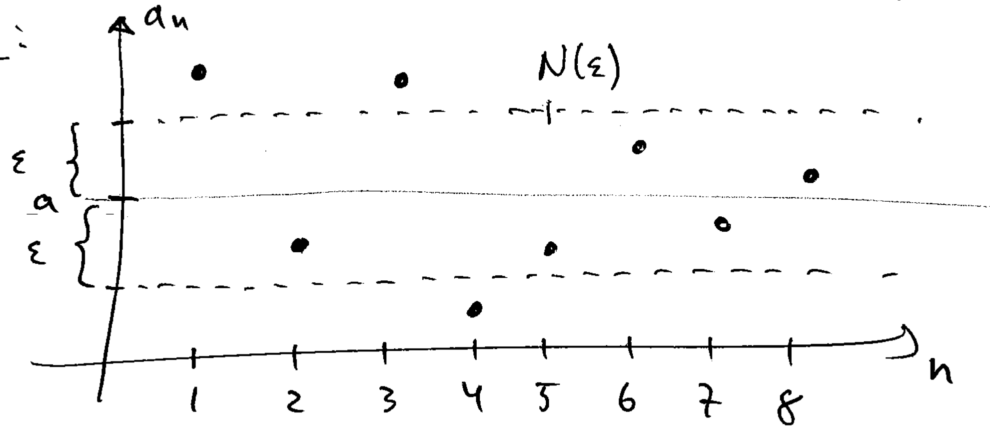
$\forall n \geq N$ gilt $a_n > s$

$(a_n < -s)$

Schreibweise: $\lim_{n\to\infty} a_n = \underset{(-)}{+}\infty$

(NB: $N = N(s)$ hängt von $s$ ab!)

<u>Skizze zu (i)</u>:




<u>2.31 Beispiele</u> In Bsp. 2.29 gilt:

(i) kgt. gegen $a$ : $N = 1$ mögliche Wahl $\forall \varepsilon > 0$

(ii) divergent : $\varepsilon \leq 1$ erlaubt keine Wahl von $N$ (was auch immer $a$)

Beweis: Ann. $\left((-1)^{n+1}\right)_n \xrightarrow{n\to\infty} a$

$\Rightarrow$ für $\varepsilon = 1\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N: |a_n - a| < \varepsilon = 1$

andererseits, $2 = |a_{n+1} - a_n| = |(a_{n+1} - a) + (a - a_n)|$

$\overset{2.21 (B3)}{\leq} |a_{n+1} - a| + |a - a_n| \overset{(n,\, n+1 \geq N)}{<} 1 + 1 = 2$ ↯ ☒

(iii), (iv) <u>Übung</u>!

Desweiteren:

(v) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Nullfolge, da für $\varepsilon>0$ (bel., fest)

$\Rightarrow$ (Lemma 2.19 (i)) $\exists N\in\mathbb{N}: 1 < N\varepsilon$

$\Rightarrow \forall n\geq N: \quad 0<\frac{1}{n}\leq\frac{1}{N}<\varepsilon$ ✓

**2.32 Satz** Eindeutigkeit des Limes

Sei $(a_n)_n\subseteq\mathbb{K}$ Folge, seien $a,b\in\mathbb{K}$ und sei

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$. Dann ist $a=b$.

Beweis: Ann.: $a\neq b$. $\Rightarrow \varepsilon := \frac{1}{2}|a-b|>0$

n. V. $\exists N_a, N_b\in\mathbb{N}$ mit (1) $|a_n-a|<\varepsilon \quad \forall n\geq N_a$

(2) $|a_n-b|<\varepsilon \quad \forall n\geq N_b$

Sei $n\geq N:=\max(N_a,N_b)$, dann

$$|a-b| = |(a-a_n)+(a_n-b)| \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |a-a_n|+|b-a_n| \underset{(1)+(2)}{<} 2\varepsilon = |a-b| \quad \lightning$$

$\blacksquare$

**2.33 Definition**

Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{K}$ **beschränkt** $:\Leftrightarrow \exists s\in\mathbb{K}\ \forall n\in\mathbb{N}: |a_n|\leq s$

analog: beschränkt von oben: $a_n\leq s$

" " unten: $a_n\geq -s$

$\boxed{\text{2.34 Satz}}$ Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ Folge. Dann gilt:

$$(a_n)_n \text{ kgt.} \implies (a_n)_n \text{ beschränkt.}$$

2.35 Bemerkung Umkehrung von Satz 2.34 i.a. falsch!

Bsp.: $\left((-1)^{n+1}\right)_n$ beschränkt $(s=1)$, aber divergent (Bsp. 2.31 (ii))

Beweis von Satz 2.34

Sei $\lim a_n = a \implies \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: |a_n - a| < 1$

$$\implies |\underbrace{a_n}_{a_n - a + a}| < |a| + 1 \quad \forall n \geq N$$

Setze $S := \max(|a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |a|+1)$

$$\implies |a_n| \leq s \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \blacksquare$$

Hilfreich beim Berechnen von Limiten:

$\boxed{\text{2.36 Satz}}$ Summe u. Produkt krg.'er Folgen

Seien $(a_n)_n, (b_n)_n \subseteq \mathbb{K}$ kgt'e Folgen mit Limiten $a$ und $b$.

Dann gilt:

(i) $(a_n + b_n)_n$ ist kgt. und $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n) + (\lim\limits_{n\to\infty} b_n)$
$= a + b$

(ii) $(a_n b_n)_n$ ist kgt. und $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)\cdot(\lim\limits_{n\to\infty} b_n) = ab$

Beweis: (i) Übung. Hier nur (ii)

Satz 2.34 $\implies (a_n)_n$ beschränkt.

$\implies \exists s \in \mathbb{K}: |a_n| \leq s \quad \forall n \in \mathbb{N}$
$(s \neq 0)$ und $|b| \leq S$

Sei $\tilde{\varepsilon} > 0$ bel.

$(a_n)_n, (b_n)_n$ kgt

$\Rightarrow \quad \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \ |a_n - a| < \tilde{\varepsilon}$ und $|b_n - b| < \tilde{\varepsilon}$

$$\Rightarrow |a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab|$$

$$\leq \underbrace{|a_n|}_{\leq S} \cdot \underbrace{|b_n - b|}_{< \tilde{\varepsilon}} + \underbrace{|b|}_{\leq S} \cdot \underbrace{|a_n - a|}_{< \tilde{\varepsilon}} \quad \forall n \geq N$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

Also: $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \ |a_n b_n - ab| < 2S\tilde{\varepsilon}$ (*)

Beweiskosmetik: Sei nun $\varepsilon > 0$ bel., wähle $\tilde{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{2S} > 0$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \ |a_n b_n - ab| < \varepsilon$

(dies hätte man auch von Anfang an machen können!) ∎

$\boxed{\text{2.37 Satz}}$ Quotient kgt.-'er Folgen

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ kgt.'e Folgen mit Limiten $a$ und $b \neq 0$. Dann $\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0$ gilt:

(i) $b_n \neq 0$

(ii) $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq N_0}$ kgt. mit $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$

Beweis

(i) $b_n \xrightarrow{n\to\infty} b \neq 0 \quad \overset{\varepsilon = \frac{|b|}{2} > 0}{\Rightarrow} \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0 : \ |b_n - b| < \frac{|b|}{2}$

$$\Rightarrow \forall n \geq N_0 : \ |b| = |b - b_n + b_n|$$

$$\leq |b - b_n| + |b_n| \quad (\Delta\text{-Ungl.})$$

$$< \frac{|b|}{2} + |b_n|$$

$$\Rightarrow \quad |b_n| > \frac{|b|}{2} > 0 \quad \forall n \geq N_0 \quad (*)$$

$$\overset{2.21(B1)}{\Longrightarrow} \quad b_n \neq 0 \quad \forall n \geq N_0$$

(ii) es genügt zu zeigen:

$$\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n\geq N_0} \text{ kgt. mit } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$$

(denn dann folgt die Beh. mit Satz 2.36 (ii))

Also: Sei $\varepsilon > 0$ bel. $\Rightarrow \exists N \geq \overset{\text{aus (i)}}{N_0} : \forall n \geq N \quad |b_n - b| < \varepsilon$

$\forall n \geq N_0$
$$\Rightarrow \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b_n - b}{b_n b}\right| = \underbrace{\frac{1}{|b_n|}}_{< \frac{2}{|b|} \text{ wegen } (*)} \cdot \frac{1}{|b|} |b_n - b| < \frac{2}{|b|^2} \varepsilon$$

(auch ohne Kosmetik!)

$\Longrightarrow$ Beh. ▨

2.38 Beispiele (i) Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$a_n = \frac{3n^2 + 13n}{n^2 - 2} = \frac{3 + \frac{13}{n}}{1 - \frac{2}{n^2}} \qquad (!)$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \underset{\text{Bsp. 2.31 (v)}}{=} 0 \quad \Rightarrow$ (a) $\frac{13}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ wg. Satz 2.36 (ii) (& 2.31 (i))

(b) $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \to 0 \cdot 0 = 0$ "

$\Rightarrow \frac{2}{n^2} \to 0$ "

(c) $3 + \frac{13}{n} \to 3$ wg. (a) $\wedge$ Satz 2.36 (i)

(d) $1 - \frac{2}{n^2} \to 1$ wg. (b) $\wedge$ Satz 2.36 (i) (& 2.31 (i))

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ wg. (c), (d), Satz 2.37.

(ii) $a_n := n$, $b_n := 1$, $c_n := a_n + b_n$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty$

$\Rightarrow$ "$\pm\infty$" ist <u>nur</u> formales Symbol def. durch 2.30 (iv), insbes. $\notin \mathbb{K}$ und es liegt keine <u>Konvergenz</u> vor!

Analogon von Satz 2.37 für $b=0$:

**2.39 Satz** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ Nullfolge und $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (bzw. $a_n < 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$). Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty \qquad (\text{bzw.} -\infty)$$

Beweis: Fall $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (Fall $a_n < 0$ analog):

Sei $s \in \mathbb{N}$ bel. $\xRightarrow{(a_n)_n \text{ Nullfolge}} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : 0 < a_n < \frac{1}{s}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a_n} > s \quad \blacksquare$$

**2.40 Satz** Verträglichkeit von lim und Ordnung

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ kgt.'e Folgen mit $a_n \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Dann gilt $\quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Beweis: Wir zeigen „nur": Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ kgt. mit $c_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n \geq 0$

(Beh. folgt dann mit Satz 2.36(i) und $c_n := b_n - a_n$)

Ann.: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c < 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N$: $|\underbrace{c_n}_{\geq 0} - \underbrace{c}_{<0}| < \frac{|c|}{2}$

$$\Rightarrow \quad c_n - c < \frac{-c}{2}$$

$$\Rightarrow \quad c_n < \frac{c}{2} < 0 \quad ⚡ \quad \blacksquare$$

**2.41 Korollar** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ kgt.'e Folge und sei $A, B \in \mathbb{K}$, so dass $A \leq a_n \leq B$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Dann gilt $\quad A \leq \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq B$

**2.42 Warnung** Falls sogar $a_n < b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, so folgt doch nur $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ im allgemeinen.

Bsp.: $a_n = 0$, $b_n = \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}$. Also $b_n > a_n \ \forall n$

und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

$\boxed{\textbf{2.43 Definition}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ sei $a_n \in \mathbb{K}$

- Partialsumme: $S_N := \sum\limits_{n=1}^{N} a_n$, $N \in \mathbb{N}$
- Reihe $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ : Folge $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$
- Summe der Reihe: falls $(S_N)_N$ kgt., setzte $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n := \lim\limits_{N\to\infty} S_N$

Vorsicht!! Selbes Symbol für 2 versch. Dinge

Jargon: Reihe kgt.

(analog: $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ für $k \in \mathbb{Z}$)

**2.44 Bemerkung** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ Folge,

so ist $\forall N \in \mathbb{N}$:

$$a_N = a_1 + \sum_{n=2}^{N} (a_n - a_{n-1})$$

„Teleskopsumme"

(Bew.: Üb.!)

**2.45 Beispiel** Zeige Kgz. der Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\frac{1}{n(n+1)}}_{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}$ Partialbruchzerlegung

; sei $a_n := -\frac{1}{n+1}$

Somit $-\frac{1}{N+1} = -\frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{N}\left(-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}\right)$ und

$$S_N := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = -\frac{1}{N+1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \quad N\in\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n(n+1)} = \left(\lim_{N\to\infty} -\frac{1}{N+1}\right) + 1 \underset{\text{Bsp. 2.31 (v).}}{=} 1$$

**2.46 Satz** Geometrische Reihe. Sei $q\in\mathbb{R}$

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ist $\begin{cases} \text{konvergent} & \Leftrightarrow |q|<1 \\ \text{divergent} & \Leftrightarrow |q|\geq 1 \end{cases}$

Für $|q|<1$ gilt $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} q^n = \frac{1}{1-q}$

---

**Beweis** $S_N = \sum_{n=0}^{N} q^n \quad (N\in\mathbb{N})$

1. Fall $q=1 \Rightarrow S_N = N+1 \xrightarrow{N\to\infty} +\infty$ (diverg. nach $+\infty$)

2. Fall $q=-1 \Rightarrow S_N = \begin{cases} 1, & N \text{ gerade} \\ 0, & N \text{ ungerade} \end{cases}$

$\Rightarrow$ divergent.

3. Fall $|q|>1$ oder $|q|<1$ $\Rightarrow S_N = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$ (gültig $\forall q\neq 1$ 2.24 (iv))

Es gilt $q^{N+1} \xrightarrow{N\to\infty} 0$ für $|q| < 1$, und ist divergent für $|q| > 1$. Von 2.36 & 2.37, $\frac{1-q^{N+1}}{1-q} \xrightarrow{N\to\infty} \frac{1}{1-q}$

(2.29(iii) & Üb!).

für $|q| < 1$ ∎

---

**2.47 Definition** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ Folge

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge (oder Fundamentalfolge) $:\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geq N$ $|a_n - a_m| < \varepsilon$

(„alle Glieder rücken schließlich zusammen")

notwendig für Konvergenz ...

**2.48 Satz** Sei $(a_n)_n \subseteq \mathbb{K}$ kgt'e Folge

$\Rightarrow$ $(a_n)_n$ ist Cauchy-Folge

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ bel. $\overset{\text{Kgz.}}{\Longrightarrow} \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N: |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \forall n, m \geq N: |a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon$ ∎

Die Umkehrung von Satz 2.48 gilt nur in den allerbesten Welten ...

**2.49 Definition** Sei $\mathbb{K}$ ein bewerteter Körper

$\mathbb{K}$ vollständig $:\Longleftrightarrow$ Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$ konvergiert

**2.50 Satz** $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig!

Beweis: Heron-Verfahren (= babylonisches Wurzelziehen)

Sei $0 < c \in \mathbb{Q}$. Def. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ durch

$$a_1 := 1$$
$$a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

wohldef. da $\bullet\ a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $\bullet\ a_n \in \mathbb{Q} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. } Bew. per Induktion

1. Beh.: $a_n^2 \geq c \quad \forall n \geq 2$

da $\quad a_{n+1}^2 = \left[\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)\right]^2 \geq a_n \cdot \frac{c}{a_n} = c \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Üb.: $\left[\frac{1}{2}(q+r)\right]^2 \geq qr$

2. Beh.: $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = c$ und $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$

Def. „Fehler": $f_n := a_n^2 - c \overset{\text{1. Beh.}}{\geq} 0 \quad \forall n \geq 2$

$$\Rightarrow f_{n+1} + c = a_{n+1}^2 = \left[\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)\right]^2 = \frac{1}{4}\left(a_n^2 + 2c + \frac{c^2}{a_n^2}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(f_n + c + 2c + \frac{c^2}{f_n + c}\right)$$

Aber $\quad \frac{c^2}{f_n + c} = \frac{c^2 + f_n c}{f_n + c} - \underbrace{\frac{f_n c}{f_n + c}}_{\geq 0} \leq c$

damit

$$f_{n+1} + c \leq c + \frac{1}{4} f_n \quad \forall n \geq 2$$

$\Rightarrow \quad 0 \le f_{n+1} \le \frac{1}{4} f_n \quad \forall n \ge 2$

$\Rightarrow \quad \bullet \quad \underbrace{0}_{\text{Nullfolge}} \le f_n \le \underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}}_{\text{Nullfolge}} \underbrace{f_2}_{\text{unabh. von } n} \quad \forall n \ge 2$

$\Rightarrow$ $(f_n)_n$ Nullfolge nach Satz 2.40 $\Rightarrow$ Beh.

$\bullet \quad f_n - f_{n+1} \ge 0 \Rightarrow 0 \le a_n^2 - a_{n+1}^2 = (a_n - a_{n+1})\underbrace{(a_n + a_{n+1})}_{>0}$

$\Rightarrow a_n - a_{n+1} \ge 0.$

3. Beh. $(a_n)_n$ ist Cauchy.

Bew. 2. Beh. & Satz 2.48 $\Rightarrow$ $(a_n^2)_n$ ist Cauchy:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n, m \ge N:$

$|a_n^2 - a_m^2| < \varepsilon$

i.e. $\quad |a_n - a_m| < \dfrac{\varepsilon}{a_n + a_m} \quad (*)$

Wähle $l \in \mathbb{N}$ so groß, dass $c \ge \frac{1}{l^2} \overset{\text{1. Beh}}{\Longrightarrow} a_n \ge \frac{1}{l} \quad \forall n \ge 2$

$(*) \Rightarrow \quad |a_n - a_m| < \frac{l}{2}\varepsilon \quad (\forall n, m \ge N).$ ✓

4. Beh: $(a_n)_n$ divergent in $\mathbb{Q}$ für $c = 2$

Ann.: $\exists a \in \mathbb{Q}: a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$

$\overset{\text{Satz 2.36 (ii)}}{\Longrightarrow} \quad a^2 = \lim_{n\to\infty} a_n^2 \underset{\uparrow\ \text{2. Beh. (\& 2.32)}}{=} c = 2$

Sonit ↯ zu Satz 2.22

3. und 4. Beh $\Rightarrow$ $\mathbb{Q}$ nicht vollständig.

Moral für $c = 2$:

aus 1. & 2. Beh.: $1 \le a_{n+1} \le a_n \quad \forall n \ge 2$