2.4 Endliche Summen

In diesem Abschnitt, sei $\mathbb{K} \supseteq \mathbb{Q}$ ein Körper (z. B. $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$; später auch $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

2.23 Definition $\forall k \in \mathbb{N}$, sei $a_k \in \mathbb{K}$.

Dann heißt $\forall n \in \mathbb{N}$:

$\sum_{k=1}^{n} a_k := a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ (endliche) <u>Summe</u>

analog: $\forall M \subseteq \mathbb{N}$, M <u>endlich</u>: $\sum_{k \in M} a_k$ Summe der a_k's mit $k \in M$

falls $M = \emptyset$: $\sum_{k \in M} a_k := 0 \quad (\in \mathbb{K})$

2.24 Beispiele

(i) $\sum_{k=1}^{3} k = 1+2+3 = \sum_{j=1}^{3} j = \sum_{j=0}^{2} (j+1) = \sum_{k=2}^{4} (k-1)$

<u>Name</u> des Summationsindex ist belanglos!

(ii) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Bew. Per Ind.

- $n = 1$: $1 = 1$ ✓
- $n \to n+1$: $\sum_{k=1}^{n+1} k = (n+1) + \sum_{k=1}^{n} k$

$= (n+1) + \frac{n(n+1)}{2}$ per Ind.-<u>ann.</u>

$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ ✓

(iii) $\sum_{k=1,\, k \text{ \underline{ungerade}}}^{2n} k = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)$

$= n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Bew. Ind: $n = 1$: klar

$n \to n+1$: $\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = 2n+1 + \sum_{k=1}^{n} (2k-1)$

$= (2n+1) + n^2 = (n+1)^2$

per Ind. <u>ann.</u> $\Rightarrow$ Beh. per Ind.

(iv) geometrische Summe: $\forall q \in \mathbb{K} \setminus \{1\}, \ \forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Beweis: per Induktion oder aus

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} q^{k+1}}_{=\sum_{k=1}^{n+1} q^k \text{ (Index verschieben)}} = q^0 - q^{n+1} = 1 - q^{n+1} \quad \blacksquare$$

2.25 Definition (i) $\forall j \in \mathbb{N}$, sei $a_j \in \mathbb{K}$. Dann heißt $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\prod_{j=1}^{n} a_j := a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$ (endliche) Produkt

Speziell für $a \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}_0$: $a^0 := 1$, $a^n := \prod_{j=1}^{n} a$, $n \in \mathbb{N}$

(ii) Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei die Fakultät definiert als

$$0! := 1, \quad n! := \prod_{j=1}^{n} j \quad (= 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n)$$

(iii) Für $q \in \mathbb{K}$, $k \in \mathbb{Z}$ sei der Binomialkoeffizient definiert als

$$\binom{q}{k} := \begin{cases} \prod_{j=1}^{k} \frac{q+1-j}{j}, & k > 0 \\ 1, & k = 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

und speziell für $q = n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{q}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

2.26 Binomischer Satz $\forall x,y \in \mathbb{K}$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Spezialfälle:

$$(x+y)^0 = 1$$
$$(x+y)^1 = x+y$$
$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Beweis per Induktion: $n=0$, $n=1$ klar, s.o.

$n \to n+1$: $$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n x + (x+y)^n y$$

- $$(x+y)^n x \underset{\text{Ind. ann.}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k}$$
$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} \quad (\text{Index „verschieben“!})$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} \quad \left(\binom{n}{-1} = 0 \right)$$

- $$(x+y)^n y = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \quad (\text{Ind. ann.!})$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \quad \left(\binom{n}{k} = 0 \text{ für } 1 \le n < k,\ n,k \in \mathbb{N} \right)$$

$$\Rightarrow (x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \underbrace{\left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right]}_{= \binom{n+1}{k} \ (\text{Übung!})} x^k y^{n+1-k}$$

$\boxed{2,27 \text{ Korollar}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \quad , \quad 0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

$x = y = 1$ $\qquad$ $x = -1, \ y = 1$