2.2. Ganze Zahlen

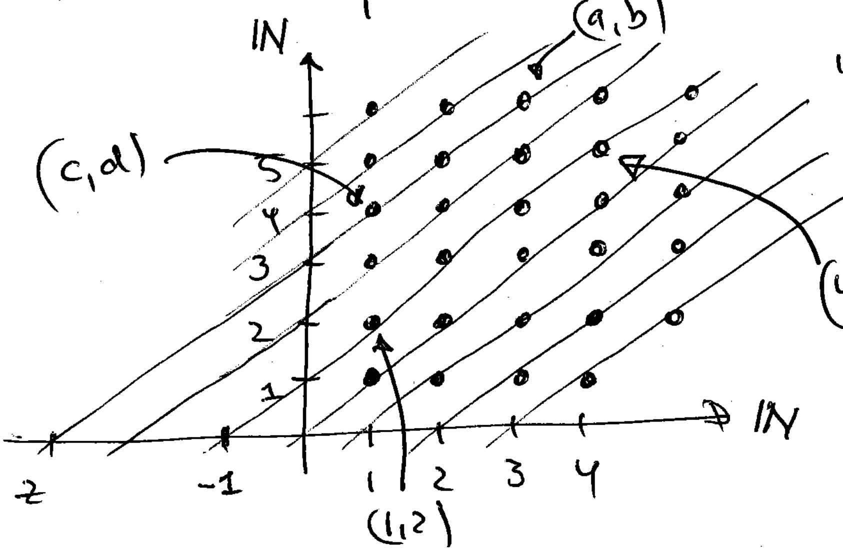
Ziel: Konstruktion der ganzen Zahlen aus $\mathbb{N}$

Durchführung: nur Ideen, Resultate; keine Beweise ($\to$ Üb.!)

grundlegende Idee: jede ganze Zahl ist Differenz zweier natürlicher Zahlen: „$\underset{\mathbb{Z}}{z} = \underset{\mathbb{N}}{a} - \underset{\mathbb{N}}{b}$"

Probleme:
- „$-$" (noch) nicht def.
- nicht eindeutige Darst.: „$-1 = 1-2 = 4-5$"

Lösung: Äquiv.klassen in $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$



„$z = a-b$", „$z = c-d$"

$\to\ a+d = b+c$

2.12. Def. & Satz (i) Für $(a,b),(c,d)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ def.

$$(a,b)\sim(c,d) :\iff a+d = b+c$$

eine Äquiv.relation auf $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ mit Äquiv.klassen

$$[(a,b)] := \{(c,d)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} : a+d = b+c\}$$

Menge der ganzen Zahlen:

$$\mathbb{Z} := \{[(a,b)] : a,b\in\mathbb{N}\}$$

(ii) Für $[(a_1,b_1)], [(a_2,b_2)] \in \mathbb{Z}$ sind die Rechenoperationen

Addition: $[(a_1,b_1)] \oplus [(a_2,b_2)] := [(a_1+a_2, b_1+b_2)] \in \mathbb{Z}$

Multiplikation: $[(a_1,b_1)] \odot [(a_2,b_2)] := [(a_1a_2+b_1b_2, a_1b_2+b_1a_2)] \in \mathbb{Z}$

wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl der Repräsentanten

(iii) $\oplus$ und $\odot$ sind kommutativ, assoziativ und distributiv (vgl. Lemma 2.5)

(iv) Zudem gilt:

$[(a,a)] \in \mathbb{Z}$ $(a \in \mathbb{N})$ ist neutrales Element von $\oplus$

d.h. $[(a_1,b_1)] \oplus [(a,a)] = [(a_1,b_1)]$ $\forall [(a_1,b_1)] \in \mathbb{Z}$

$\forall [(a,b)] \in \mathbb{Z}$ gilt: $[(b,a)]$ ist inverses Element bzg $\oplus$

d.h. $[(a,b)] \oplus [(b,a)] = [(1,1)]$.

Dies legt nahe:

$\boxed{\text{2.13 Definition}}$ Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$(n) := [(1+n,1)] \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}_+ := \{(n) : n \in \mathbb{N}\}$$

$$(0) := [(1,1)] \in \mathbb{Z}$$

$$(-n) := [(1,1+n)] \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}_- := \{(-n) : n \in \mathbb{N}\}$$

$\boxed{\text{2.14 Satz}}$ (i) Die Abb. $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}_+$, $n \mapsto (n)$ ist eine Bijektion

und $\forall [(a,b)] \in \mathbb{Z}$ gilt genau 1 der 3 Aussagen

$$[(a,b)] \begin{cases} \in \mathbb{Z}_+ \\ = (0) \\ \in \mathbb{Z}_- \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Rechtfertigung der Notation

$$(z) := [(a,b)], \quad (-z) := [(b,a)]$$

(ii) Verträglichkeit von ◯ mit + und · :

$\forall n, m \in \mathbb{N}$:
- $n+m = n \oplus m$
- $n \cdot m = n \odot m$

(iii) Setzt man $z_1 \ominus z_2 := z_1 \oplus (-z_2)$ für $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ so gelten alle aus der Schule bekannten Rechenregeln für $\oplus, \ominus, \odot$ auf $\mathbb{Z}$.

(iv) Via $z_1 \leq z_2 :\Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} : z_2 = z_1 + n$ ist eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{Z}$ erklärt und $(\mathbb{Z}, \leq)$ ist total geordnet.

Verträglichkeit: $\forall n, m \in \mathbb{N}$ ist $n \leq m \Leftrightarrow n \leq m$

2.15 Bemerkung
- Von nun an werden alle ◯ weggelassen!
- $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist abelsche Halbgruppe.
- $(\mathbb{Z}, +)$ ist abelsche Gruppe.

(vergl. Lin. Alg.!).