2. Aufbau des Zahlensystems

Wir postulieren die natürliche Zahlen $\mathbb{N}$ und leiten davaus $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. samt alle Rechenregeln ab.

2.1. Natürliche Zahlen

Menge $\mathbb{N}$, für die gelte

2.1 Axiomsystem von Peano

(P1) $\mathbb{N} \neq \emptyset$ (also $\exists$ mind. ein Element in $\mathbb{N}$. Bezeichnung: 1)

$\exists$ Funktion (Nachfolgerabb.) $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

(P2) $1 \notin \nu(\mathbb{N})$ „1 ist kein Nachfolger"

(P3) ν injektiv „Eindeutigkeit des Vorgängers"

(P4) $\forall M \subseteq \mathbb{N}$ gilt:

$$\left(1 \in M \wedge \nu(M) \subseteq M\right) \Rightarrow \underline{M = \mathbb{N}}$$

(Bem. $\nu(M) \subseteq M \iff \forall n \in M : \nu(n) \in M$)

„Prinzip der Vollständigen Induktion"

Bezeichnungsweisen: $\nu(1) =: 2$, $\nu(2) =: 3$, ...

(Nach (P4) werden so alle $n \in \mathbb{N}$ mit einem Zahlensymbol erfasst).

2.2 Bemerkung: (P1) - (P4) sind

- vollständig (im Sinne von: alle bekannten Rechenregeln ableitbar)
- unabhängig (keines der Axiome aus den anderen ableitbar)
- widerspruchsfrei (Gentzen, 1936)

2.3 Definition $\forall\, k, n \in \mathbb{N}$ sei

"+": $n+1 := \nu(n)$ (1)
$n+\nu(k) := \nu(n+k)$ (2)

"$\cdot$": $n \cdot 1 := n$
$n \cdot \nu(k) = n \cdot k + n$

wird meist weggelassen!

2.4 Bemerkung

- rekursive Def. erklärt wegen (P4) $n+m$ $\forall n, m \in \mathbb{N}$:

$$n+2 = n+\nu(1) \overset{\text{Def}}{=} \nu(n+1) \overset{\text{Def}}{=} \nu(\nu(n))$$
$$n+3 = n+\nu(2) = \nu(n+2) = \nu(\nu(\nu(n)))$$
$$\vdots$$

- analog für $n \cdot m$

2.5 Lemma Rechenregeln $\forall\, k, m, n \in \mathbb{N}$

	"+"	"$\cdot$"
kommutativ	$n+k = k+n$	$nk = kn$
assoziativ	$(k+m)+n = k+(m+n)$	$(km)n = k(mn)$
distributiv	$(k+m)n = kn + mn$	

[insbes.: $(\mathbb{N},+)$ und $(\mathbb{N},\cdot)$ sind abelsche Halbgruppen, vgl. Lin. Alg.]

Beweis: "$+$" ist assoz. $\rightsquigarrow$ Übung!

Hier: "$+$" ist komm. (dabei wird assoz. verwendet)

1. Schritt: Zeige $\forall n \in \mathbb{N}: \; n+1 = 1+n$

Bew. per vollst. Induktion: Sei $M := \{n \in \mathbb{N} : n+1 = 1+n\}$

(i) $1 \in M$, klar! $(1+1 = 1+1)$ „Induk.anfang"

(ii) Sei $n \in M$; zur zeigen (z.z.): $\underbrace{n+1}_{\nu(n)} \in M$: „Induk.schritt"

„Ind.annahme"

$$\nu(n)+1 \overset{2.3(1)}{=} \nu(\underbrace{\nu(n)}_{n+1}) \underset{n\in M}{=} \nu(1+n) \overset{2.3(2)}{=} 1+\nu(n)$$

d.h., $n+1 \in M$

$(i) \wedge (ii) \overset{(P4)}{\Longrightarrow} M = \mathbb{N}$.

2. Schritt: Zeige, $\forall k, n \in \mathbb{N}: \; n+k = k+n$

Sei $n \in \mathbb{N}$ fix, Beweis per Ind. nach k:

Sei $K := \{k \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}: n+k = k+n\}$

(i) $1 \in K$ wegen 1. Schritt

(ii) Sei $k \in K$; z.z.: $\nu(k) = k+1 \in K$:

$\forall n \in \mathbb{N}$:
$$n+\nu(k) \overset{2.3(2)}{=} \nu(\underbrace{n+k}_{\overset{\shortparallel}{k+n} \text{ da } k\in K}) \overset{2.3(2)}{=} k+\underbrace{\nu(n)}_{\overset{\shortparallel}{n+1} = 1+n \text{ (1. Schritt)}}$$

$$= k+(1+n) \underset{\text{"+" assoziativ}}{=} (k+1)+n \overset{2.3(1)}{=} \nu(k)+n,$$

also $\nu(k) \in K$

$(i) \wedge (ii) \overset{(P4)}{\Longrightarrow} K = \mathbb{N}$. Für "$\cdot$" alles analog ∎

Die Rechenregeln dürfen (sollen) ab jetzt "hemmungslos" verwendet werden!

2.6 Definition $\forall m, n \in \mathbb{N}$ definieren

- $n < m \;:\Leftrightarrow\; (\exists k \in \mathbb{N} : m = n + k)$
- $n \leq m \;:\Leftrightarrow\; (n < m \;\vee\; n = m)$

$\leq, <$ sind Relationen auf $\mathbb{N}$

Inverse Relationen: $n > m \;:\Leftrightarrow\; m < n$

$n \geq m \;:\Leftrightarrow\; m \leq n$

2.7 Satz $\forall m, n \in \mathbb{N}$ ist <u>genau</u> 1 der 3 Aussagen

$$m < n, \quad m = n, \quad n < m$$

wahr.

Beweis beruht auf 3 Lemmata

2.8 Lemma Jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ hat einen Vorgänger

$(\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : \exists m \in \mathbb{N}$ mit $\nu(m) = n)$

<u>Beweis</u>: per Ind. Sei $M := \{1\} \cup \{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} \text{ mit } \nu(m) = n\}$

- $1 \in M$ klar („Ind. anf.")
- Sei $n \in M$ („Ind. annahme").
  Dann ist $\nu(n) \in M$, da Nachfolger von n
- $\overset{(P4)}{\Longrightarrow} M = \mathbb{N}$ ☒

2.9 Lemma $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : 1 < n$

<u>Beweis</u> Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \overset{\text{Lem. 2.8}}{\Longrightarrow}$

$$\exists k \in \mathbb{N} : n = \nu(k) = k + 1$$
$$= 1 + k \quad (\text{bei Lem. 2.5})$$
$$\Rightarrow 1 < n \quad (\text{bei Def. 2.6}).$$

☒

$\boxed{\text{2.10 Lemma}}$ $\forall k, n \in \mathbb{N}: \; n + k \neq n$

Beweis. Ind. nach n:

(i) $1 + k = \nu(k) \neq 1 \; \forall k$, da $1 \notin \nu(\mathbb{N})$ (P2)

(ii) gelte $n + k \neq n \quad \forall k \in \mathbb{N}$; („Ind. annahme")

zeige: $\nu(n) + k \neq \nu(n) \; \forall k \in \mathbb{N}$ (*) per Widerspruch:

Annahme: $\exists k \in \mathbb{N}: \nu(n) + k = \nu(n)$ $(\neg (*))$

$$\Rightarrow \quad \nu(n) \overset{2.5}{=} k + \nu(n) \overset{2.3(2)}{=} \nu(k+n)$$

$$\overset{(P3)}{\Rightarrow} \quad n = k + n \overset{2.5}{=} n + k$$ ↯ (Widerspruch) zu Ind.annahme

– also ist $\neg(*)$ falsch, so (*) wahr.

(i) $\wedge$ (ii) $\overset{(P4)}{\Rightarrow}$ Behauptung („Beh.") ∎

Beweis von Satz 2.7:

Sei $n \in \mathbb{N}$ fix, setze $\mathbb{N}_- := \{m \in \mathbb{N} : m < n\}$, $\mathbb{N}_+ := \{m \in \mathbb{N} : n < m\}$

und $M := \mathbb{N}_- \cup \{n\} \cup \mathbb{N}_+$

1. Schritt: zeige $M = \mathbb{N}$ ($\Rightarrow \forall m, n \in \mathbb{N}$ ist $m < n \vee m = n \vee n < m$) wahr

Ind.anf.: $1 \in M$, denn, falls $n = 1$ klar, und falls $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, gilt $1 \in \mathbb{N}_-$ wegen Lemma 2.9.

Ind. schritt: sei $m \in M$; z.z.: $\nu(m) \in M$

1. Fall: $m = n$ $\Rightarrow \nu(m) = n + 1 \in \mathbb{N}_+ \subseteq M$

Def. von $<$

2. Fall: $m \in \mathbb{N}_+ \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: m = n+k$ (Def. $<$)

$\Rightarrow \nu(m) = \nu(n+k) \overset{2.3(2)}{=} n + \nu(k) \overset{\text{Def. von} <}{\Rightarrow} n < \nu(m)$

$\Rightarrow \nu(m) \in \mathbb{N}_+ \subseteq M.$

3. Fall: $m \in \mathbb{N}_- \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: n = m+k$

falls $k = 1 \Rightarrow n = \nu(m) \in M$ ✓

falls $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \overset{2.8}{\Rightarrow} k = \tilde{k} + 1$ für $\tilde{k} \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow n = m + \tilde{k} + 1 \overset{2.5}{=} \underbrace{m+1}_{\nu(m)} + \tilde{k}$

$\overset{\text{Def. von} <}{\Rightarrow} \nu(m) < n \Rightarrow \nu(m) \in \mathbb{N}_- \subseteq M$

$\Rightarrow$ 1. Schritt bewiesen.

2. Schritt: $M = \mathbb{N}_- \,\dot{\cup}\, \{n\} \,\dot{\cup}\, \mathbb{N}_+$ (paarw. disjunkte Mengen)

1. Teil: z.z. $n \notin \mathbb{N}_-$

Sei $m \in \mathbb{N}_- \Rightarrow m < n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: n = m+k$

$\Rightarrow m \neq n$ wegen Lemma 2.10.

2. Teil: z.z. $n \notin \mathbb{N}_+$: analog zu 1. Teil

3. Teil: $\mathbb{N}_+ \cap \mathbb{N}_- = \emptyset$:

Sei $m_- \in \mathbb{N}_- \Rightarrow n = m_- + k_-$ für ein $k_- \in \mathbb{N}$

$m_+ \in \mathbb{N}_+ \Rightarrow m_+ = n + k_+$ — " — $k_+ \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow m_+ = (m_- + k_-) + k_+$

$= m_- + \underbrace{(k_- + k_+)}_{\in \mathbb{N}}$

$\Rightarrow m_+ \neq m_-$ nach Lema 2.10

$\boxtimes$

2-11 Lemma „Kürzen": $\forall k, n, m \in \mathbb{N}$ gilt

- $n = m \iff (n + k = m + k) \iff (nk = mk)$
- $n < m \iff (n + k < m + k) \iff nk < mk$

Beweis: Übung mit vollst. Ind. nach k $\blacksquare$