8. Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 22: (F17T3A4) Im folgenden sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine integrable Funktion.

a) Formulieren Sie den Transformationssatz für Integrale im Spezialfall, daß Sie das Integral von $f \circ T$ zurückführen auf das Integral über f, wobei die Transformation $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung ist.

b) Integrieren Sie die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) &\mapsto \frac{1}{(1+(x_1+x_2)^2)(1+(2x_1+5x_2)^2)} \end{aligned}$$

über $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 23: (F17T3A5) Gegeben sei die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) = \frac{n}{1+n^2x^2}.$$

Beweisen Sie:

a) f_n konvergiert auf dem offenen Intervall $]0,1[$ punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen null.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx = \frac{\pi}{2}$.

c) Für jeden Parameter $\alpha \in]0,1[$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 x^\alpha f_n(x)dx = 0$

Aufgabe 24: (F18T1A1) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen (uneigentliche Integrale und Grenzwerte haben in dieser Aufgabe im Falle der Existenz immer einen endlichen Wert). Für alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt:

a) Wenn der Grenzwert $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)dx$ existiert, dann existiert auch das uneigentliche Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

b) Wenn das uneigentliche Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ existiert, dann existiert auch der Grenzwert $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)dx$.

c) Wenn das uneigentliche Integral $\int\limits_0^\infty f(x)dx$ existiert, dann existiert auch $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ und es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.