

7. Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 19: (H13T1A4) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}), \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Geben Sie die allgemeine Lösung des linearen Differentialgleichungssystems

$$\dot{x} = Ax$$

an. Berechnen Sie auch die Lösung, die der Anfangsbedingung $x(0) = v$ genügt und begründen Sie, warum diese Lösung eindeutig ist.

Aufgabe 20: (F20T1A1) Gegeben seien das Ellipsoid

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 9\}$$

und die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

$$(x, y, z) \mapsto x + 4y - 2z + 9$$

- Begründen Sie, daß die Funktion f auf E ihr Maximum und Minimum annimmt.
- Bestimmen Sie die Maximums- und Minimumsstellen von f auf E .

Aufgabe 21: (F21T3A4) Es seien

$$f : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad g : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad h : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}.$$

$$x \mapsto \frac{\sin(\ln(x))}{x}, \quad x \mapsto \frac{\sin(e^{-x})}{x}, \quad x \mapsto \frac{\sin(\pi x)}{x}.$$

- Entscheiden Sie, ob f uneigentlich integrierbar ist.
Nutzen Sie hierfür eine geeignete Substitution unter dem Integral.
- Entscheiden Sie, ob g uneigentlich integrierbar ist.
Schätzen Sie dazu den Integranden geeignet ab.
- Begründen Sie, daß h uneigentlich integrierbar ist.

Hinweis: Vergleichen Sie den Integralwert mit der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, wobei $a_k = \int_k^{k+1} \frac{\sin(\pi x)}{x} dx$ gilt oder lösen Sie die Aufgabe durch partielle Integration.