5. Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 13: (H20T3A1)
Sei $\Omega := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1, x_2 > 0\}$ die obere Hälfte der Einheitskreisscheibe. Berechnen Sie

$$\int\limits_\Omega x_1^2(x_1^2 + x_2^2)^2 dx$$

mit Hilfe von Polarkoordinaten.

Aufgabe 14: (F21T2A1)

a) Zeigen Sie, daß $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

b) Bestimmen Sie die Menge $D \subseteq \mathbb{R}$ aller Punkte, in denen die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) := \begin{cases} x\cos(x^{-1}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

differenzierbar ist und berechnen Sie für diese Punkte die Ableitung von f. Ist $f' : D \to \mathbb{R}$ stetig?

c) Sei $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$. Skizzieren Sie D und berechnen Sie das Integral $I := \int\limits_D (x^3 + y^2) dxdy$.

Aufgabe 15: (F22T1A1)

a) Es sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $f'(0) = 0 < f''(0)$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$. Zeigen Sie: Es gibt ein $\xi > 0$ mit $f'(\xi) = 0$.

b) Es sei $(f_n : [0, 1] \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen die Grenzfunktion f konvergiert. Zudem sei

$$F_n(x) := \int\limits_0^x f_n(t)dt$$

für alle $x \in [0, 1]$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Begründen Sie kurz, daß die Integralfunktion

$$F(x) := \int\limits_0^x f(t)dt$$

auf $[0, 1]$ wohldefiniert ist, und zeigen Sie, daß die Funktionenfolge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $[0, 1]$ gegen F konvergiert.