1. Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 1: (H05T1A3)
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(x), \qquad x(0) = 0 \tag{1}$$

mit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

a) f stetig differenzierbar $\Rightarrow$ (1) hat eine eindeutig bestimmte Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

b) f stetig differenzierbar und $x :]-1, 1[\to \mathbb{R}^n$ die maximal fortgesetzte Lösung von (1) $\Rightarrow \limsup_{t\to 1} |x(t)| = \infty$.

c) (1) hat eine eindeutig bestimmte Lösung auf einem Intervall $]-\delta, \delta[$ mit $\delta > 0 \Rightarrow f$ ist in einer Umgebung von 0 Lipschitz-stetig.

d) f beschränkt und lokal Lipschitz-stetig $\Rightarrow$ (1) hat eine eindeutig bestimmte Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

Die Antwort ist durch Hinweis auf entsprechende allgemeine Aussagen oder Gegenbeispiel kurz zu begründen.

Aufgabe 2: (F18T2A4)
Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \sin(x)\sqrt{1 + 4y(x)}, \quad y(0) = y_0$$

zu Anfangswerten $y_0 \in -\frac{1}{4}, \infty[$.

a) Geben Sie eine möglichst große Menge von Anfangswerten an, für die das Anfangswertproblem lokal eindeutig lösbar ist. Begründen Sie, warum in den entsprechenden Anfangswerten lokale Eindeutigkeit der Lösung vorliegt.

b) Geben Sie für Anfangswerte, für die eindeutige Lösbarkeit nicht gegeben ist, zwei verschiedene Lösungen an.

Aufgabe 3: (H18T1A3) In dieser Aufgabe sollen Existenz und Eindeutigkeit globaler Lösungen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Anfangswertaufgaben

$$\dot{x}(t) = 2\sqrt{|x(t)|}\cos(t), \quad x(0) = c$$

für $c \in [0, \infty[$ diskutiert werden. Unter einer globalen Lösung verstehen wir in dieser Aufgabe stets eine Lösung, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

a) Bestimmen Sie für jedes $c > 1$ eine globale Lösung x_c des entsprechenden Anfangswertproblems. Warum ist dies deren einzige globale Lösung?

b) Geben Sie für jedes $0 \le c \le 1$ jeweils zwei verschiedene globale Lösungen des Anfangswertproblems an.