Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 21: (F09T2A1) Gegeben sei folgendes Differentialgleichungssystem

$$x' = -y + x\sin(x^2+y^2) \tag{1}$$
$$y' = x + y\sin(x^2+y^2) \tag{2}$$

a) Bestimmen Sie alle periodischen Orbits.

b) Skizzieren Sie das Phasenportrait.

Hinweis: Man transformiere auf Polarkoordinaten. Zunächst bestimme man eine Differentialgleichung für $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

Aufgabe 22: (H03T3A4) Erstellen Sie für das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= |x| \end{aligned}$$

das Phasenportrait und bestimmen Sie explizite Darstellungen aller Lösungen, die für $t \to \infty$ oder $t \to -\infty$ gegen $(0,0)$ konvergieren. Erklären Sie ferner, warum jedes zu diesem System gehörige Anfangswertproblem eindeutig lösbar ist.

Aufgabe 23: (H06T3A4) Gegeben sei das parameterabhängige, 2-dimensionale Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = f_\alpha(x,y) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - (1-x^2-y^2)\begin{pmatrix} \alpha x \\ y^3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

mit $\alpha \in]-1,1[$.

a) Zeigen Sie, daß der Ursprung $(0,0)$ die einzige Ruhelage von (3) in $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$ ist und untersuchen Sie diese für $\alpha \neq 0$ auf Stabilität.

b) Zeigen Sie für $\alpha = 0$ mit Hilfe der Funktion $H(x,y) := x^2+y^2$ die Stabilität der Ruhelage $(0,0)$.

Aufgabe 24: (H08T2A2)
Seien σ, r und b positive Konstanten. Die Lorenz-Gleichungen lauten:

$$\begin{aligned} x' &= \sigma(y-x) \\ y' &= rx - y - xz \\ z' &= xy - bz \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, daß der Nullpunkt für $r > 1$ ein instabiler Gleichgewichtspunkt ist.

b) Zeigen Sie sowohl durch Linearisierung als auch unter Verwendung der Lyapunov-Funktion $V(x,y,z) := x^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2$, daß der Nullpunkt für $0 < r < 1$ ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt ist.