Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 1: (F03T3A4) Sei $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig und in der zweiten Variablen lokal Lipschitzstetig. Geben Sie die Definition des Begriffs der maximalen Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

an. Bestimmen Sie die maximale Lösung des Problems (1) im Falle $f(x, y) = x^2y^2$.

Aufgabe 2: (F03T1A2) Finden Sie eine Lösung λ des Anfangswertproblems

$$x'(t) = (t + x(t))^2, \qquad x(0) = 0. \tag{2}$$

Was ist der maximale Definitionsbereich dieser Lösung? Ist diese Lösung eindeutig?

Aufgabe 3: (H06T2A3)
Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g :]a, b[\to \mathbb{R}$ zwei $C^\infty-$Funktionen; wir betrachten die Differentialgleichung mit getrennten Variablen

$$\dot{x} = f(t)g(x).$$

Sei x_0 eine Zahl zwischen zwei Nullstellen von g, dh. $x_1 < x_0 < x_2$ und $g(x_1) = g(x_2) = 0$. Folgt aus diesen Angaben bereits, daß die maximale Lösung von

$$\dot{x} = f(t)g(x), \quad x(0) = x_0$$

auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4: (H03T2A4) Berechnen Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{1}{\sin(t + y)} - 1, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Aufgabe 5: (H00T3A1) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x' = \frac{1}{1 + x^2} \tag{3}$$

Man zeige: Zu jedem $c \in \mathbb{R}$ existiert genau eine Lösung $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung (3) mit der Anfangsbedingung $\lambda(0) = c$. Für diese Lösung gilt:

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = \infty \qquad \lim_{t\to-\infty} \lambda(t) = -\infty \tag{4}$$

Aufgabe 6: (H09T1A1) Für die Differentialgleichung $u'(x) = \sqrt{1 - u(x)^2}$ bestimmen Sie jeweils alle Lösungen $u : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ zu den Anfangswerten

a) $u(0) = 1$

b) $u(0) = -1$.

Aufgabe 7: (F09T1A4) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Der topologische Abschluß M der Menge $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$ sei kompakt. Man zeige:

a) Eine Lösung des Anfangswertproblems $x' = f(x), x(0) = x_0$ verläuft für jeden Punkt $x_0 \in M$ vollständig in M.

b) Das Anfangswertproblem $x' = f(x), x(0) = x_0$ ist für jeden Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ global lösbar.

Aufgabe 8: (H18T2A4)
Sei $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n$ ein Lipschitz-stetiges Vektorfeld mit $\langle f(x), x \rangle = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. (Dabei bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^n$.) Man zeige:

a) Für jede auf einem offenen Intervall J definierte Lösung $\varphi : J \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ der Differentialgleichung $x' = f(x)$ ist die Euklidische Norm $|\varphi(t)|$ konstant.

b) Jede auf einem offenen Intervall J definierte Lösung φ kann zu einer Lösung $\widetilde{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ fortgesetzt werden.

Aufgabe 9: (H16T1A3) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = -\tan(y)e^y, \quad y(0) = -1$$

a) Zeigen Sie, daß das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung auf $\mathbb{R}_+ = [0, \infty[$ besitzt.

b) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to \infty} y(x)$.

Aufgabe 10: (H18T3A5) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y_1' &= \dfrac{y_1}{2(1+t)} \\ y_2' &= \dfrac{t}{t^2-1} y_2 + \alpha y_1 \end{cases}$$

mit $(y_1(0), y_2(0)) = (2, 1)$ für den Fall $\alpha = 1$, indem Sie zunächst den Fall $\alpha = 0$ betrachten.

Aufgabe 11: (H07T2A4) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(t) \geq f(t)$ für alle $t \geq 0$ und sei $f(0) \geq 1$.

a) Zeigen Sie, daß f auf $[0, \infty[$ streng monoton steigend ist.

b) Zeigen Sie, daß $f(t) \geq e^t$ für alle $t \geq 0$.