

Vorlesung Sommersemester 2016 Geometrie und Topologie von Flächen

Hinweis: Dieses Kurzsript fasst die Inhalte einer Vorlesung wirklich kurz zusammen, es ersetzt nicht den Besuch der Vorlesung. Es werden nur die wichtigsten Stichpunkte und Tatsachen wiedergegeben. Des Weiteren sind alle Übungsaufgaben klausurrelevanter Bestandteil der Vorlesung.

Verweise auf Literatur sollen auch helfen, die Grundbegriffe zu wiederholen die man schon vergessen hat. Es lohnt sich, nicht nur den angegebenen Abschnitt/die angegebenen Seite anzusehen. Die Kapitelnummern/Seitenzahlen beziehen sich auf die Auflage, die im Literaturverzeichnis angegeben ist. Andere Auflagen weichen eventuell davon ab.

Erweiterungen und Änderungen erfolgen ohne besondere Ankündigung zu unvorhersagbaren Zeiten. Sollten Ihnen Fehler auffallen, wenden Sie sich bitte an mich.

1. VORLESUNG AM 24.4.

- **Definition:** Eine *Kurve* γ in einem metrischen Raum (X, d) ist eine stetige Abbildung $\gamma : I \rightarrow X$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist. (Intervalle sind zusammenhängende Teilmengen von \mathbb{R} .)

Anstatt dem Wort *Kurve* verwendet man oft synonym *Weg*.

Zu metrischen Räumen, s. [Wa2] Kap. 1.5, Wege und Kurven [Wa2], Kap. 5.10.

- Ein wichtiges Beispiel eines metrischen Raumes ist $(X, d) = (\mathbb{R}^n, d_{st})$ mit

$$d_{st}(x, y) = |x - y| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Wenn man vom metrischen Raum \mathbb{R}^n spricht, so meint man (\mathbb{R}^n, d_{st}) .

- Eigenschaften von Kurven in \mathbb{R}^n : Eine Kurve ist differenzierbar, glatt, C^k mit $k \geq 1$, wenn die Komponenten die jeweilige Eigenschaft haben.
- **Definition (Reguläre Kurve):** Eine Kurve in \mathbb{R}^n ist *regulär*, wenn sie stetig differenzierbar ist und $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.
- **Definition:** Seien $\gamma : I \rightarrow X$ und $\bar{\gamma} : J \rightarrow X$ zwei Kurven. $\bar{\gamma}$ ist eine *Umparametrisierung* von γ , wenn ein Homöomorphismus $\varphi : I \rightarrow J$ existiert, sodass $\gamma \circ \varphi^{-1} = \bar{\gamma}$.

Wenn man es mit einer differenzierbaren/glatten/analytischen Kurve γ zu tun hat und sicherstellen möchte, dass $\bar{\gamma}$ es auch ist, so verlangt man, dass φ auch differenzierbar/glatt/analytisch ist.

- **Beispiel:** Die Kurve

$$\begin{aligned} \gamma : (0, \pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) + \ln(\tan(t/2)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ist glatt, analytisch. Die Einschränkungen von γ auf $(0, \pi/2)$ und $(\pi/2, \pi)$ sind regulär, aber $\dot{\gamma}(0) = 0$. An der Stelle $t = 0$ hat das Bild von γ einen Knick.

- Der folgende Satz ist der mathematische Inhalt der Aussage *reguläre Kurven haben keine Knicke*.
- **Satz (Rangsatz für reguläre Kurven):** Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve und $t_0 \in I$ im Inneren. Dann gibt es eine Umparametrisierung $h : I \rightarrow J$ und einen Diffeomorphismus k einer Umgebung von $\gamma(t_0)$ in \mathbb{R}^n auf eine (evtl. andere) Umgebung von $\gamma(t_0)$ sodass

$$(1) \quad \begin{aligned} k \circ \gamma \circ h^{-1} : J &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ s &\mapsto (s, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

- Dieser Satz sagt, dass die Kurve nach geeigneter Umparametrisierung (h) und differenzierbarem Koordinatenwechsel (k) lokal aussieht wie eine Gerade.
- **Redeweise:** Ein Diffeomorphismus k einer Umgebung von $\gamma(t_0)$ in \mathbb{R}^n auf eine (evtl. andere) Umgebung von $\gamma(t_0)$ ist ein *lokaler Diffeomorphismus bei $\gamma(t_0)$* .
- **Beweis vom Satz:** Um die Notation zu vereinfachen, nehmen wir $t_0 = 0$ und $\gamma(t_0) = 0$ an. Weil $\dot{\gamma} \neq 0$, ist eine Komponente $\dot{\gamma}_i \neq 0$. Wir nehmen $\dot{\gamma}_1(0) \neq 0$ an.

– *Konstruktion von h :* Die Abbildung

$$\begin{aligned} h : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \gamma_1(t) \end{aligned}$$

erfüllt $h'(0) \neq 0$ und $h(0) = 0$. Nach dem Umkehrsatz (s. S. 199, [Wa2]) gibt es eine Umgebung I' von 0 in I so dass $h|_{I'}$ ein Diffeomorphismus auf sein Bild J (ein Intervall welches 0 enthält) ist.

– *Konstruktion von k :* Die Abbildung

$$\begin{aligned} h : J \times \mathbb{R}^{n-1} &\rightarrow J \times \mathbb{R}^{n-1} \\ (s, x_2, \dots, x_n) &\mapsto (s, x_2 - \gamma_2(h^{-1}(s)), \dots, x_n - \gamma_n(h^{-1}(s))) \end{aligned}$$

erfüllt $k(0) = 0$ und $Dk(0)$ ist eine obere Dreiecksmatrix, die offensichtlich invertierbar ist. Nachdem Umkehrsatz gibt es eine Umgebung U von $0 \in J \times \mathbb{R}^{n-1}$ so dass $k|_U$ ein Diffeomorphismus auf sein Bild ist.

Man rechnet nach, dass $k \circ \gamma \circ h^{-1}$ die geforderte Eigenschaft (1) hat.

- **Bemerkung:** Tatsächlich ist k ein Diffeomorphismus dessen Umkehrung man direkt angeben kann. Daher ist es im obigen Beweis nur ungeschickt nicht zu fordern, dass $\gamma \circ h^{-1}(J) \subset U$. Dies kann man durch Verkleinerung von J leicht erreichen.
- **Bemerkung:** Der Satz oben ist ein Spezialfall des Rangsatzes den man z.B. in [BJ], S. 46ff nachlesen kann.
- **Definition (Rektifizierbarkeit, Weglänge) :** Sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und $\gamma : I \rightarrow (X, d)$ eine Kurve. Die Kurve ist *rektifizierbar*, wenn

$$l(\gamma) = \sup \left\{ L(\gamma, Z) = \sum_{i=1}^m d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})) \mid Z = (a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b) \right\} < \infty.$$

$l(\gamma)$ ist dann die Länge von γ . $Z = (a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b)$ ist eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$.

- Wir wollen prüfen, ob dies ein Begriff ist, der Eigenschaften hat, die man von einer Weglänge erwartet. Unter anderem sind dies
 - Parameterisierungsinvarianz,
 - Additivität,

- nicht konstante Wege haben positive Länge, die Länge eines konstanten Weges ist 0,
- falls $(X, d) = (\mathbb{R}^n, d_{st})$, so ist die Länge der Strecke zwischen zwei Punkten gerade der Euklidische Abstand dieser Punkte. Insbesondere sind Strecken im Euklidischen Raum rektifizierbar.
- **Lemma (Parametrisierungsinvarianz der Weglänge):** Sei $\gamma : I \rightarrow (X, d)$ ein Weg und $\bar{\gamma} = \gamma \circ h^{-1} : J \rightarrow (X, d)$ eine Umparametrisierung von γ . Dann ist γ genau dann rektifizierbar, wenn $\bar{\gamma}$ es ist. In diesem Fall gilt $l(\gamma) = l(\bar{\gamma})$.
- **Beweis:** Wir schreiben

$$\Lambda = \{L(\gamma, Z) \mid Z \text{ ist eine Zerlegung von } I\}$$

$$\bar{\Lambda} = \{L(\bar{\gamma}, \bar{Z}) \mid \bar{Z} \text{ ist eine Zerlegung von } J\}.$$

Es genügt $\bar{\Lambda} = \Lambda$ zu beweisen. Wir nehmen an, dass h monoton wächst. (Wenn h monoton fällt, so wandelt man den Beweis leicht ab. Weil h ein Homöomorphismus ist, ist h entweder überall monoton fallend oder überall monoton steigend.)

- $\Lambda \subset \bar{\Lambda}$: Sei $Z = (a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b)$ eine Zerlegung von $I = [a, b]$. Dann ist $h(Z) = (h(a) = h(t_0) < \dots < h(t_m))$ eine Zerlegung von $J = h(I)$ sodass $L(\gamma, Z) = L(\bar{\gamma}, h(Z))$.
- $\bar{\Lambda} \subset \Lambda$: analog.

2. VORLESUNG AM 25.4.

- **Lemma (Additivität):** Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow (X, d)$ eine Kurve und $I_1 = [a, c], I_2 = [c, b]$. Dann ist γ genau dann rektifizierbar, wenn $\gamma_1 = \gamma|_{I_1}$ und $\gamma_2 = \gamma|_{I_2}$ es sind. In diesem Fall ist

$$l(\gamma) = l(\gamma|_{I_1}) + l(\gamma|_{I_2}).$$

- **Beweis:** \Rightarrow : Sei $Z_1 = (a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = c)$ eine Zerlegung von I_1 . Dann ist $Z = (a = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = b)$ eine Zerlegung von I so dass $L(\gamma, Z) = L(\gamma_1, Z_1) + d(\gamma(c), \gamma(b))$. Dies zeigt, dass γ_1 rektifizierbar ist. Die Kurve γ_2 behandelt man analog.

\Leftarrow : Wir nehmen an, dass γ_1, γ_2 rektifizierbar sind. Sei $Z = (a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b)$ eine Zerlegung von I . Falls $c = t_j$ ist für ein bestimmtes j , so setzen wir $Z' = Z$. Ansonsten sei Z' die Zerlegung von I die man aus Z durch Hinzunahme von c an der richtigen Stelle erhält. Wir schreiben

$$Z' = (a = t'_0 < \dots < t'_j = c < \dots < t'_{N'} = b).$$

Dann gilt wegen der Dreiecksungleichung

$$(2) \quad L(\gamma, Z) \leq L(\gamma, Z').$$

Z' enthält die Zerlegungen

$$Z'_1 = (a = t'_0 < \dots < t'_j = c) \text{ von } I_1$$

$$Z'_2 = (t'_j = c < \dots < t'_{N'} = b) \text{ von } I_2$$

und es gilt

$$L(\gamma, Z') = L(\gamma_1, Z'_1) + L(\gamma_2, Z'_2)$$

Aus der Rektifizierbarkeit von γ_1, γ_2 und (2) folgt die Rektifizierbarkeit von γ .

Beweis der Additionsformel, \leq : folgt unmittelbar aus der Diskussion im Teil \Rightarrow :

$$L(\gamma, Z) \leq L(\gamma, Z') = L(\gamma_1, Z'_1) + L(\gamma_2, Z'_2) \leq l(\gamma_1) + l(\gamma_2).$$

Beweis der Additionsformel, \geq : Sei $\varepsilon > 0$ und $Z_i, i = 1, 2$, eine Zerlegung von I_i sodass

$$l(\gamma_i) - \varepsilon \leq L(\gamma_i, Z_i).$$

Durch das Zusammenfügen von Z_1 mit Z_2 erhält man eine Zerlegung Z von I sodass

$$l(\gamma) \geq L(\gamma, Z) = L(\gamma_1, Z_1) + L(\gamma_2, Z_2) \geq l(\gamma_1) - \varepsilon + l(\gamma_2) - \varepsilon.$$

Weil ε beliebig klein gewählt werden kann, folgt $l(\gamma) \geq l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$.

- **Lemma (Positivität):**
- **Beweis:** Übung
- **Lemma (Streckenlänge):**
- **Beweis:** Übung
- **Satz (Stetigkeit der Streckenlänge):** Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow (X, d)$ rektifizierbar. Dann ist

$$\begin{aligned} s : [a, b] &\longrightarrow [0, l(\gamma)] \\ t &\longrightarrow l(\gamma|_{[a, t]}) \end{aligned}$$

monoton wachsend und stetig.

- **Beweis:** Die Monotonie folgt aus der Additivität der Länge.
Sei $Z = (t_0 < \dots < t_m)$ eine Zerlegung von I und $I_i = [t_{i-1}, t_i], i = 1, \dots, m$, $\gamma_i = \gamma|_{I_i}$ und $\alpha_i = d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1}))$. Dann gilt offenbar $\alpha_i \leq l(\gamma_i)$ und für festes k

$$l(\gamma_k) - \alpha_k \leq \sum_{i=1}^m (l(\gamma_i) - \alpha_i) = l(\gamma) - L(\gamma, Z).$$

Weil γ gleichmäßig stetig ist gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass aus $|t - s| < \delta$

$$d(\gamma(t), \gamma(s)) < \varepsilon$$

folgt.

Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben und δ wie oben. Wir nehmen nun an, dass $t_i - t_{i-1} < \delta$ für alle i und die Zerlegung Z erfüllt $l(\gamma) - L(\gamma, Z) \leq \varepsilon$. Es folgt

$$(3) \quad s(t_k) - s(t_{k-1}) = L(\gamma_k) \leq (l(\gamma) - L(\gamma, Z)) + \alpha_k \leq 2\varepsilon.$$

s ist eine monotone Funktion, Unstetigkeitsstellen sind also Sprungstellen.

Dies impliziert die Stetigkeit von s in T : Wähle $\delta > 0$ und Z eine Zerlegung wie oben sodass $T = t_k$ ein Element der geordneten Menge Z ist. Sei $[c, d] = J \subset I$ das Intervall welches von den Nachbarn von t_k in der Zerlegung begrenzt wird (wenn t_k nur einen Nachbarn hat (d.h. $t_k \in \{a, b\}$), so ersetzt t_k selbst den fehlenden anderen Nachbarn.) Es gilt nun wegen der Monotonie und ein- bis zweimaliger Anwendung von (3)

$$|s(t) - s(t_k)| < \max\{|s(c) - s(t_k)|, |s(d) - s(t_k)|\} \leq 2\varepsilon.$$

Also liegt $s(J)$ in der 2ε -Umgebung von $s(T)$.

- **Definition (Lipschitzstetig):** Eine Kurve $\gamma : I \rightarrow (X, d)$ ist Lipschitzstetig wenn eine Konstante λ existiert, sodass $d(\gamma(t), \gamma(s)) \leq \lambda|t - s|$.

- **Lemma (Rektifizierbarkeit Lipschitzstetiger Kurven):** Lipschitzstetige Kurven sind rektifizierbar: Wenn λ eine Lipschitzkonstante von $\gamma : I \rightarrow (X, d)$ ist, so gilt $l(\gamma) \leq \lambda(b - a)$.
- **Beweis:** Sei $Z = (t_0 = a < t_1 \dots t_m = b)$ eine Zerlegung von I . Dann gilt

$$\begin{aligned}
 L(\gamma, Z) &= \sum_{i=1}^m d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})) \\
 &\leq \sum_{i=1}^m \lambda |t_i - t_{i-1}| && \text{Lipschitz} \\
 &= \sum_{i=1}^m \lambda (t_i - t_{i-1}) && t_i > t_{i-1} \text{ für alle } i \\
 &= \lambda(b - a).
 \end{aligned}$$

- **Bemerkung:** Stetig differenzierbare Kurven $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sind rektifizierbar und ihre Länge kann mithilfe der Formel

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

berechnet werden. Diese Tatsache wird in der nächsten Vorlesung bewiesen, aber kann in den aktuellen Übungen verwendet werden.

3. VORLESUNG AM 2.5.

- **Satz (Länge von C^1 -Kurven):** Stetig differenzierbare Kurven $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ sind rektifizierbar und es gilt

$$(4) \quad l(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

- Das folgende Lemma ist Hilfsmittel im Beweis des Satzes.
- **Erinnerung(Konsequenz aus Dreiecksungleichung):** Für alle $a, b \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$(5) \quad \left| \|a\| - \|b\| \right| \leq \|a - b\|.$$

- **Lemma (Länge eines Differenzweges):** Seien $\gamma, \phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ rektifizierbare Wege. Dann ist $\gamma - \phi$ auch rektifizierbar und es gilt

$$(6) \quad |l(\gamma) - l(\phi)| \leq l(\gamma - \phi) \leq l(\gamma) + l(\phi).$$

- **Beweis des Lemmas:** Sei $Z = (a = t_0 < \dots < t_N = b)$ eine Zerlegung von I . Dann gilt nach der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
 L(\gamma - \phi, Z) &= \sum_{i=1}^N \|(\gamma - \phi)(t_i) - (\gamma - \phi)(t_{i-1})\| \\
 &= \sum_{i=1}^N \|(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})) - (\phi(t_i) - \phi(t_{i-1}))\| \\
 &\leq \sum_{i=1}^N \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| + \sum_{i=1}^N \|\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})\| \\
 &= L(\gamma, Z) + L(\phi, Z) \leq l(\gamma) + l(\phi).
 \end{aligned}$$

Also ist $\gamma - \phi$ rektifizierbar. Weiter gilt (u.a. wegen (5))

$$\begin{aligned}
 |L(\gamma, Z) - L(\phi, Z)| &= \left| \sum_{i=1}^N \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| - \sum_{i=1}^N \|\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})\| \right| \\
 &\leq \sum_{i=1}^N \left| \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| - \|\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})\| \right| \\
 &\leq \sum_{i=1}^N \left\| (\gamma(t_i) - \phi(t_i)) - (\gamma(t_{i-1}) - \phi(t_{i-1})) \right\| \\
 &= L(\gamma - \phi, Z) \leq l(\gamma - \phi).
 \end{aligned}$$

Weil man nach Wahl einer geeigneten Zerlegung $l(\gamma)$ und $l(\phi)$ beliebig genau durch $L(\gamma, Z)$ und $L(\phi, Z)$ approximieren kann folgt der linke Teil von (6). (Anmerkung: In diesem Beweis verwendet man, dass durch die Verfeinerung einer gegebenen Zerlegung die Qualität der Approximation der Länge verbessert.)

- **Beweis des Satzes:** Wenn γ stetig differenzierbar ist, so ist γ auch Lipschitzstetig (Mittelwertsatz). Daher ist γ rektifizierbar.

Um (4) zu beweisen, werden wir zeigen, dass die Streckenlängenfunktion differenzierbar ist und dass $s'(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|$. Die Behauptung folgt dann aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (s. [Wa1], Abschnitt 10.12). Um den Differenzenquotienten $(s(t) - s(\tau))/(t - \tau)$ für $t \neq \tau$ abzuschätzen, vergleichen wir die Kurve γ nahe τ mit der Geraden

$$\begin{aligned}
 (7) \quad \phi : I &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\
 t &\longmapsto \gamma(\tau) + \dot{\gamma}(\tau)(t - \tau)
 \end{aligned}$$

Weil γ stetig differenzierbar ist, ist $\dot{\gamma}$ gleichmässig stetig. Daher gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass aus $|s - t| < \delta$

$$|\dot{\gamma}(t) - \dot{\gamma}(s)| < \varepsilon$$

folgt. Sei $\tau < t < \tau + \delta$ gegeben. Für die Länge der Strecke ϕ zwischen $\phi(\tau)$ und $\phi(t)$ gilt $l(\phi|_{[\tau, t]}) = \|\dot{\gamma}\|(t - \tau)$, für die Länge der Kurvenstücks γ zwischen $\gamma(\tau)$ und $\gamma(t)$ gilt (wegen Additivität) $l(\gamma|_{[\tau, t]}) = s(t) - s(\tau)$.

Die Differenz $\psi(t) = \gamma(t) - \phi(t)$ definiert einen weiteren Weg $\psi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Er ist stetig differenzierbar, also rektifizierbar, und es gilt

$$(8) \quad l(\psi|_{[\tau, t]}) \leq \underbrace{\max\{|\dot{\psi}(\sigma)| \mid \sigma \in [\tau, t]\}}_{< \varepsilon} \cdot (t - \tau).$$

Damit bekommen wir eine Abschätzung

$$\begin{aligned}
 |s(t) - s(\tau) - \underbrace{l(\phi|_{[\tau, t]})}_{=\|\dot{\gamma}(\tau)\|}| &= |l(\gamma|_{[\tau, t]}) - l(\phi|_{[\tau, t]})| \\
 &\leq l(\psi|_{[\tau, t]}) && \text{wegen Lemma} \\
 &\leq \varepsilon(t - \tau) && \text{wegen (8)}.
 \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass der rechtsseitige ($t > \tau$) Differenzenquotient $\frac{s(t) - s(\tau)}{t - \tau}$ um höchstens ε von $\|\dot{\gamma}(\tau)\|$ abweicht, wenn $t - \tau < \delta$. Also ist s in τ von rechts differenzierbar und die rechtsseitige Ableitung ist $\|\dot{\gamma}(\tau)\|$. Analog kann man die linksseitige Ableitung behandeln. Man erhält wieder $\|\dot{\gamma}(\tau)\|$ als Wert der Ableitung. Es folgt, dass s in τ differenzierbar ist und $s'(\tau) = \|\dot{\gamma}(\tau)\|$.

- **Definition (Tangente an reguläre Kurve):** Wenn γ regulär ist, so parametrisiert (7) eine Gerade. Dies ist die *Tangente* von γ in $\gamma(\tau)$.
- **Bemerkung:** Nach der Definition von Differenzierbarkeit gilt

$$\lim_{t \rightarrow \tau} \frac{\gamma(t) - \phi(t)}{t - \tau} = 0.$$

Die (parametrisierte) Tangente ist durch die Parametrisierung der Kurve eindeutig durch diese Eigenschaft bestimmt (auch wenn γ nicht regulär ist). Die parametrisierte Tangente ist die bestmögliche lineare Approximation einer regulären Kurve.

- **Bemerkung:** Die Formel (4) gilt auch für Kurven, die stückweise C^1 sind.
- Wir interessieren uns in erster Linie für Eigenschaften von Kurven, die nicht von der Parametrisierung der Kurve abhängen. Manchmal ist es aber nützlich, eine spezielle Parametrisierung zu wählen. Weiter kann man Umparametrisierungen $h : I \rightarrow J$ in zwei Klassen einteilen.
- **Definition (orientierungserhaltende Umparametrisierung):** Sei $h : I \rightarrow J$ eine Umparametrisierung einer Kurve $\gamma : I \rightarrow X$. Dann ist h *orientierungserhaltend*, falls h (streng) monoton wachsend ist. Andernfalls ist h *orientierungsumkehrend*.
- **Definition (Parametrisierung nach Bogenlänge):** Sei $\gamma : I \rightarrow (X, d)$ eine rektifizierbare Kurve. Dann ist γ nach Bogenlänge parametrisiert, falls für alle $s < t \in I$ gilt

$$|s - t| = l(\gamma|_{[s,t]}).$$

Oft erlaubt man, dass I nicht kompakt ist. Dann fordert man, dass γ auf jedem kompakten Teilintervall von I rektifizierbar und dort nach Bogenlänge parametrisiert ist.

- **Lemma:** Wenn $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und nach Bogenlänge parametrisiert ist, so gilt $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$ für alle $t \in I$.
- **Beweis:** Unmittelbare Konsequenz aus dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung.
- **Lemma (Parametrisierung nach Bogenlänge für reguläre Kurven):** Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und regulär. Dann kann man γ zu einer nach Bogenlänge parametrisierten Kurve umparametrisieren. Die umparametrisierte Kurve ist stetig differenzierbar, regulär und die Umparametrisierung kann orientierungserhaltend gewählt werden.
- Sei $a \in I$. Wir definieren

$$h : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto \begin{cases} l(\gamma|_{[a,t]}) & a \leq t \\ -l(\gamma|_{[t,a]}) & t \leq a. \end{cases}$$

Dann ist h orientierungserhaltend, differenzierbar (HDI) und es gilt immer $h'(\tau) = \|\dot{\gamma}(\tau)\|$. Weil γ regulär ist, ist h überall ein lokaler Diffeomorphismus, und weil h streng monoton wachsend ist, ist h ein Diffeomorphismus (also bijektiv, stetig differenzierbar, mit stetig differenzierbarer Umkehrung) auf sein Bild J (welches wieder ein Intervall ist). Daher ist die Verkettung $\gamma \circ h^{-1}$ stetig differenzierbar und regulär. Nach Definition von h gilt $|s - t| = l(\gamma|_{[s,t]})$.

- **Terminologie:** Eine *ebene Kurve* ist eine stetige Abbildung $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$. Analog definiert man reguläre ebene Kurven etc.

- **Rechnung:** Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine zweifach stetig differenzierbare Kurve die nach Bogenlänge parametrisiert ist. Dann gilt $\langle \dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t) \rangle = 0$ für alle t . Dies folgt durch Differenzieren von $\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle$ (Produktregel). Insbesondere steht $\ddot{\gamma}(t)$ auf $\dot{\gamma}(t)$ senkrecht.
- Wir betrachten jetzt nur reguläre ebene Kurven und verwenden die Notation

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beachte $J^2 = -E$.

- **Definition:** Sei γ eine reguläre ebene Kurve. Der *Normalenvektor* an γ in $\gamma(t)$ ist $J(\dot{\gamma}(t)/\|\dot{\gamma}(t)\|)$. Es gibt eine eindeutig bestimmte Zahl $\kappa(t)$, sodass

$$(9) \quad \kappa(t)J(\dot{\gamma}(t)) = \ddot{\gamma}(t).$$

$\kappa(t)$ ist die *Krümmung* von γ in $\gamma(t)$. Wenn γ nicht nach Bogenlänge parametrisiert ist, so kann man die Krümmung direkt bestimmen:

- **Lemma:** Wenn γ regulär und C^2 ist, so gilt für die Krümmung $\kappa(t)$ in $\gamma(t)$

$$(10) \quad \kappa(t) = \frac{\det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t))}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3}.$$

- **Beweis:** Übung.

4. VORLESUNG AM 8.5.

- **Beispiel:** Die Krümmung einer Gerade ist überall 0, die Krümmung eines Kreises mit Radius R , der gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird, ist überall R^{-1} .
- Sei γ eine glatte, nach Bogenlänge parametrisierte Kurve und $\kappa_0 = \kappa(\tau) \neq 0$. Wir betrachten den Kreis mit Radius $|\kappa_0|^{-1}$

$$\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$s \mapsto \gamma(\tau) + \kappa_0^{-1}J(\dot{\gamma}(\tau)) - \kappa_0^{-1} \begin{pmatrix} \cos(\kappa_0 s) & -\sin(\kappa_0 s) \\ \sin(\kappa_0 s) & \cos(\kappa_0 s) \end{pmatrix} J(\dot{\gamma}(\tau)).$$

Dies ist der *Ankreis* an γ in $\gamma(\tau)$. Es gilt

$$\mu(0) = \gamma(\tau)$$

$$\dot{\mu}(0) = \dot{\gamma}(\tau)$$

$$\ddot{\mu}(0) = \ddot{\gamma}(\tau).$$

Weiter gilt

$$\lim_{t \rightarrow \tau} \frac{\gamma(t) - \mu(t)}{(t - \tau)^2} = 0.$$

- **Lemma:** Sei γ eine C^2 -Kurve und regulär. Sowie σ eine Tangente an γ in $\gamma(t_0)$. (orientiert durch $\dot{\gamma}(t)$) Wenn γ ganz auf der Seite von σ liegt, die $J\dot{\gamma}(t)$ enthält, so gilt $\kappa(t_0) \geq 0$.
- **Satz:** Sei $k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lipschitz stetige Funktion. Dann gibt es eine, nach Bogenlänge parametrisierte, C^2 -Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, sodass

$$\kappa(t) = k(t).$$

γ ist eindeutig bestimmt bis auf orientierungserhaltende Euklidische Bewegungen in \mathbb{R}^2 . (Euklidische Bewegungen sind Isometrien der Euklidischen Ebene.)

- **Korollar:** Eine nach Bogenlänge parametrisierte C^2 -Kurve, so dass $\kappa(t) \equiv 0$, ist ein Segment einer Gerade. Eine nach Bogenlänge parametrisierte C^2 -Kurve, so dass $\kappa(t) \equiv \kappa_0 \neq 0$, ist ein Kreisbogen mit Radius $|\kappa_0|^{-1}$.
- **Bemerkung:** Die folgende Diskussion kann man auf Kurven in \mathbb{R}^n verallgemeinern.
- **Definition:** Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine reguläre $C^{m=3}$ -Kurve. Sie ist eine *Frenet-Kurve*, falls zudem $\ddot{\gamma}(t) \neq 0$. Wir nehmen an, dass γ nach Bogenlänge parametrisiert ist. Dann ist

$$\begin{aligned} e_1 &= \dot{\gamma}(t) && \text{Tangente} \\ e_2 &= \frac{\ddot{\gamma}(t)}{\|\ddot{\gamma}(t)\|} && \text{Hauptnormale} \\ e_3 &= e_1 \times e_2 && \text{Binormale} \end{aligned}$$

das begleitende *Frenet-Dreibein*. Es ist eine positive Orthonormalbasis von \mathbb{R}^3 . Differenziert man $\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = 1$, so erhält man

$$\dot{e}_1(t) = \ddot{\gamma}(t) = \kappa(t)e_2(t)$$

κ ist die Krümmung der Frenet-Kurve (sie kann auch für reguläre Kurven definiert werden, das Dreibein degeneriert dann eventuell). Sie ist für Frenet Kurven immer positive und im Allgemeinen nicht negativ. Differenziert man e_2 so erhält man

$$\begin{aligned} \dot{e}_2 &= \langle \dot{e}_2, e_1 \rangle e_1 + \underbrace{\langle \dot{e}_2, e_2 \rangle}_{=0} e_2 + \langle \dot{e}_2, e_3 \rangle e_3 \\ &= \langle -e_2, \dot{e}_1 \rangle e_1 + \underbrace{\langle \dot{e}_2, e_3 \rangle}_{=: \tau} e_3 \end{aligned}$$

weil $\|e_2\|^2 = 1$ und $\langle e_2, e_1 \rangle = 0$. τ ist die *Torsion* von γ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \dot{e}_3 &= \langle \dot{e}_3, e_1 \rangle e_1 + \langle \dot{e}_3, e_2 \rangle e_2 + \underbrace{\langle \dot{e}_3, e_3 \rangle}_{=0} e_3 \\ &= -\underbrace{\langle e_3, \dot{e}_1 \rangle}_{=0} e_1 - \langle e_3, \dot{e}_2 \rangle e_2 \\ &= -\tau e_2. \end{aligned}$$

wegen $\dot{e}_1 \perp e_3$ und der Definition der Torsion.

- **Bemerkung:** Der folgende Satz ist der Hauptsatz der lokalen Kurventheorie. Sein Beweis ist nur ein wenig komplizierter als derjenige für Kurven in der Ebene. Letzteren haben wir oben besprochen. Sie können den Beweis selber finden oder in [Kü], S. 18ff nachsehen.
- **Satz:** Sei I kompakt, $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine positive C^1 -Funktion und $t : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es eine, nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, sodass $\kappa(s) = k(s)$ und $\tau(s) = t(s)$ für $s \in I$.
- Wir wenden uns nun globalen Eigenschaften ebener Kurven zu.
- **Definition:** Eine Kurve $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow (X, d)$ ist *periodisch mit Periode T* , falls $\gamma(t) = \gamma(t + T)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.
- **Definition:** Eine Kurve $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow (X, d)$ ist *periodisch mit Periode $T > 0$* falls $\gamma(t + T) = \gamma(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. γ ist periodisch, falls ein $T > 0$ existiert, sodass γ periodisch mit Periode T ist.

- **Lemma:** Sei $\gamma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine ebene C^1 -Kurve, die nach Bogenlänge parametrisiert ist. Dann gibt es eine stetige Funktion $\vartheta : I \rightarrow \mathbb{R}$, sodass

$$(11) \quad \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta(t)) \\ \sin(\vartheta(t)) \end{pmatrix}.$$

Wenn $\vartheta, \widehat{\vartheta}$ zwei Funktionen mit diesen Eigenschaften sind, so gilt $\vartheta - \widehat{\vartheta} = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

5. VORLESUNG AM 9.5.

- **Beweis:** Wir beweisen als Erstes die Eindeutigkeit bis auf Addition ganzzahliger Vielfacher von 2π . Seien ϑ_0, ϑ_1 zwei Funktionen die (11) lösen. Zur Zeit $\tau \in I$ gilt dann

$$(\cos(\vartheta_0(\tau)), \sin(\vartheta_0(\tau))) = (\cos(\vartheta_1(\tau)), \sin(\vartheta_1(\tau))).$$

Aus bekannten Eigenschaften von \cos, \sin folgt $\vartheta_0(\tau) = \vartheta_1(\tau) + 2\pi k(\tau)$ wobei $k(\tau) \in \mathbb{Z}$. Weil $k(\tau) = \frac{\vartheta_0(\tau) - \vartheta_1(\tau)}{2\pi}$ für alle $\tau \in I$ ganzzahlig ist und $k(\cdot)$ auch stetig ist, ist k konstant.

Existenz von ϑ : Weil γ nach Bogenlänge parametrisiert ist, gilt $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$. Wir nehmen zuerst an, dass $\dot{\gamma}(t) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\} = H_R$ (rechter Halbkreis) für alle t . Dann erfüllt $\vartheta = \arctan(y/x)$ mit $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ die Gleichung (11).

Falls $\dot{\gamma}(t) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} = H_O$, so kann man $\vartheta = \operatorname{arccot}(x/y)$ mit $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$ setzen. Die Fälle

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &\in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\} = H_U \text{ für alle } t \\ \dot{\gamma}(t) &\in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\} = H_L \text{ für alle } t \end{aligned}$$

behandelt man analog.

Wir wählen nun eine Zerlegung $Z = (t_0 = a < \dots < t_m = b)$ von $I = [a, b]$, sodass für jedes $i = 1, \dots, m$ die Menge $\gamma([t_i, t_{i-1}])$ ganz in einem der Halbkreise H_U, H_O, H_R, H_L enthalten ist. Man wählt $\vartheta(a)$, sodass (11) für $t = a$ gilt. Dann setzt man ϑ auf das Intervall $[t_0 = a, t_1]$ fort (etwa durch $2\pi k_0 + \arctan(\dot{x}(t)/\dot{y}(t))$ falls $\dot{\gamma}([t_0, t_1]) \subset H_R$). Danach setzt man ϑ stetig auf $[t_1, t_2]$ fort usw. Wir erhalten so eine Lösung ϑ von (11).

- **Ergänzung:** Wir haben $\vartheta : I \rightarrow \mathbb{R}$ konstruiert unter der Annahme, dass I kompakt ist. Falls I nicht kompakt ist, kann man ϑ auf ganz I definieren indem man eine kompakte Ausschöpfung von I wählt nd. Eine Kompakte Ausschöpfung ist eine Familie kompakter Intervalle $K_i, i \in \mathbb{N}$, sodass

$$\begin{aligned} K_i &\subset K_{i+1} \text{ für alle } i \in \mathbb{N} \\ I &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i. \end{aligned}$$

Man beachte dass ϑ eindeutig bestimmt ist durch seinen Wert an einem festen Punkt t_0 in $K_0 \neq \emptyset$. Man wählt also alle $\vartheta_i : K_i \rightarrow \mathbb{R}$, sodass $\vartheta_i(t_0)$ von i unabhängig ist. Dies definiert eine Lösung ϑ auf ganz I .

- **Definition:** Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist *sternförmig* bezüglich $x_0 \in A$ wenn für alle $x \in A$ auch die Strecke zwischen x, x_0 ganz in A liegt.

- **Hebungslemma:** Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig bezüglich $x_0 \in A$ und $e : A \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert eine stetige Abbildung $\vartheta : X \rightarrow \mathbb{R}$, sodass

$$e(x) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta(x)) \\ \sin(\vartheta(x)) \end{pmatrix}$$

für alle $x \in A$ gilt.

- **Terminologie/Ausblick:** Die Abbildung $\text{pr} : \mathbb{R} \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}$ ist ein Beispiel (das wichtigste) einer universellen Überlagerung. Das Hebungsproblem ist die Suche nach Lösungen ϑ der Gleichung $\text{pr} \circ \vartheta = e$.

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R} & \\ & \nearrow \vartheta & \downarrow \text{pr} \\ X & \xrightarrow{e} & S^1 \end{array}$$

Die Lösbarkeit dieses Problems hängt von X ab. Zum Beispiel existiert *kein* $\vartheta : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R} & \\ & \nearrow \vartheta & \downarrow \text{pr} \\ S^1 & \xrightarrow{\text{id}} & S^1 \end{array}$$

kommutiert.

- **Beweis des Hebungslemmas:** Den Fall $n = 1$ haben wir für kompakte Intervalle behandelt. Der allgemeine Fall ist nur in Hinblick auf die Notation komplizierter.
- **Definition:** Sei $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte C^1 -Kurve, periodisch mit Periode T und ϑ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft (11), so ist

$$n_\gamma = \frac{1}{2\pi}(\vartheta(T) - \vartheta(0))$$

die *Windungszahl* von γ .

- **Beispiel:** Sei $\gamma_+(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$. Dies ist eine einfach geschlossene, auf \mathbb{R} definierte, nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve mit Periode $T = 2\pi$. Es gilt

$$\dot{\gamma}_+(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t + \pi/2) \\ \sin(t + \pi/2) \end{pmatrix}$$

In diesem Fall ist also $\vartheta_+(t) = t + \pi/2$ eine Funktion mit der Eigenschaft (11) und es gilt

$$n_{\gamma_+} = \frac{1}{2\pi}(\vartheta_+(2\pi) - \vartheta_+(0)) = 1.$$

Die Kurve $\gamma_-(t) = \gamma_+(-t)$ kann man analog behandeln. Man erhält $\vartheta_-(t) = -t - \pi/2$ und $n_{\gamma_-} = -1$.

- Die Windungszahl kann einfach aus der Betrachtung des Bildes von γ berechnet werden.

6. VORLESUNG AM 15.5.

- **Bemerkung:** n_γ ist unabhängig von der Wahl von ϑ (offensichtlich) und des Zeitnullpunktes, denn

$$(\vartheta(T + t_0) - \vartheta(t_0)) - (\vartheta(T) - \vartheta(0)) = (\vartheta(T + t_0) - \vartheta(T)) - (\vartheta(t_0) - \vartheta(0)) = 0$$

weil auch $\vartheta(t + t_0) - \vartheta(t)$ periodisch mit Periode T ist. Wenn $\bar{\gamma}(t) = \gamma(-t)$, so gilt $n_\gamma = -n_{\bar{\gamma}}$. Wenn man also die Orientierung von γ umdreht, so ändert die Windungszahl ihr Vorzeichen.

- **Folgerung:** Ursprünglich haben wir die Umlaufzahl für nach Bogenlänge parametrisierte Kurven definiert. Wir wissen, dass man jede reguläre Kurve so umparametrisieren kann, dass das Resultat $\hat{\gamma}$ nach Bogenlänge parametrisiert ist, und zwar ohne die Orientierung zu ändern (natürlich kann sich die Periode ändern, die Kurve bleibt aber periodisch). Man erhält so eine Definition der Umlaufzahl für reguläre, periodische Kurven in \mathbb{R}^2 . Nach dem, was oben diskutiert wurde, ist die Umlaufzahl wohldefiniert.
- **Beobachtung:** Wenn γ zweimal stetig differenzierbar ist, so ist ϑ auch differenzierbar (wegen (11)) und der Glattheit von $\arctan, \operatorname{arccot}, \dots$. Differenziert man (11) nach t , so erhält man

$$\ddot{\gamma}(t) = \dot{\vartheta}(t) \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta(t)) \\ \cos(\vartheta(t)) \end{pmatrix}.$$

Ein Vergleich mit der Definition der Krümmung (9) zeigt

$$(12) \quad \kappa(t) = \dot{\vartheta}(t).$$

- **Satz:** Sei $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte periodische C^2 -Kurve mit Periode T und κ ihre Krümmung. Dann gilt

$$n_\gamma = \frac{1}{2\pi} \int_0^T \kappa(t) dt.$$

- **Beweis:** Dies folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung sowie (12).
- **Bemerkung:** Alles was wir bis jetzt gemacht haben, basierte auf lokalen Betrachtungen (etwa der Kurve auf der Umgebung eines Punktes im Definitionsbereich). Der folgende Satz geht auf Heinz Hopf zurück und ist anders. Er betrachtet eine Eigenschaft, die man nicht lokal nachprüfen kann, nämlich ob eine T -periodische Kurve γ eingebettet ist, d.h. ob es Selbstschnitte gibt, die nicht aus der T -Periodizität von γ folgen.
- **Satz (Umlaufsatz):** Sei γ eine T -periodische, nach Bogenlänge parametrisierte C^1 -Kurve, die eingebettet ist (d.h. $\gamma(t) = \gamma(s)$ impliziert $s - t \in \mathbb{Z}T \subset \mathbb{R}$). Dann gilt $n_\gamma = \pm 1$.
- **Korollar:** Wenn γ eine reguläre, periodische C^1 -Kurve mit $|n_\gamma| \neq 1$ ist, so ist γ nicht eingebettet (es gibt also mindestens einen Selbstschnitt).
- **Beweis des Umlaufsatzes:** Der Beweis erfolgt in drei Schritten. Sei $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ T -periodisch und nach Bogenlänge parametrisiert.
 1. *Wahl eines Referenzpunktes:* Sei γ_x bzw. γ_y die x - bzw. y -Koordinate von γ . Weil $[0, T]$ kompakt ist, und γ T -periodisch ist, gibt es ein $t'_0 \in [0, T]$ mit

$$\gamma_x(t'_0) = \max\{\gamma(t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

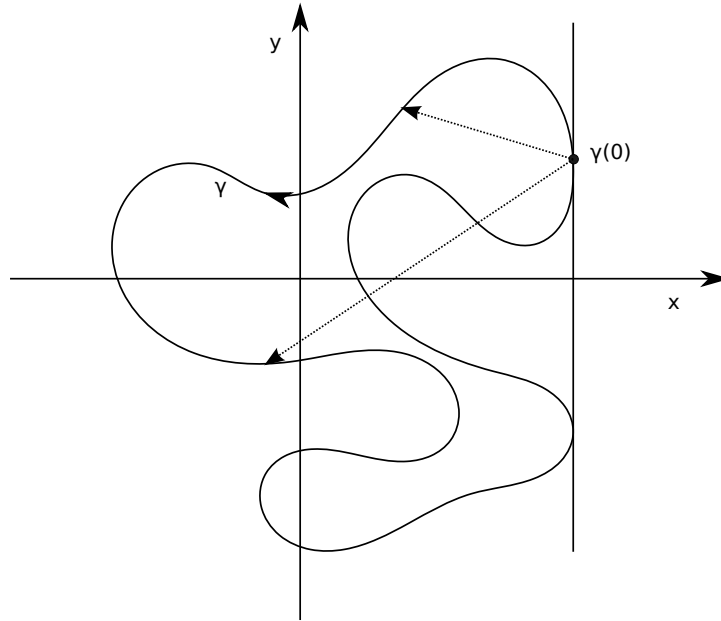
Die Menge $\{t \in [0, T] \mid \gamma_x(t) = \gamma_x(t'_0)\}$ ist abgeschlossen, also kompakt und nicht leer. Wir wählen t_0 , sodass

$$\begin{aligned}\gamma_x(t_0) &= \max\{\gamma_x(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \\ \gamma_y(t_0) &\geq \{\gamma_y(t) \mid \gamma_x(t'_0) = \gamma_x(t)\}.\end{aligned}$$

Die Gerade $c : t \mapsto \gamma(t_0) + t\dot{\gamma}(t_0)$ ist dann parallel zur y -Achse und tangential an γ . Wir nehmen

$$\dot{\gamma}(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

an. Nach einer Translation im Definitionsbereich kann annehmen, dass $t_0 = 0$. Das Bild zeigt die aktuelle Situation.



2. *Erweiterung von ϑ* : Sei

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \mid 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Die Menge A ist konvex/sternförmig bezüglich jedes ihrer Punkte. Man definiert nun

$$e : A \longrightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2$$

$$(t_1, t_2) \longmapsto \begin{cases} \frac{\gamma(t_2) - \gamma(t_1)}{\|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)\|} & \text{falls } t_1 < t_2 \text{ und } (t_1, t_2) \neq (0, T). \\ \dot{\gamma}(t) & \text{falls } t_1 = t_2 = t \\ -\dot{\gamma}(0) & \text{falls } (t_1, t_2) = (0, T). \end{cases}$$

Diese Funktion ist stetig (Übung, s. Bemerkung nach dem Beweis). Im ersten Teil dieser Definition verwendet man, dass γ eingebettet ist.

Nach dem Hebungslemma existiert eine *stetige* Abbildung

$$\widehat{\vartheta} : A \longrightarrow \mathbb{R},$$

sodass $e(t) = \begin{pmatrix} \cos(\widehat{\vartheta}(t)) \\ \sin(\widehat{\vartheta}(t)) \end{pmatrix}$. Die Einschränkung $\vartheta(t) = \widehat{\vartheta}(t, t)$ von $\widehat{\vartheta}$ auf die Diagonale $\{(t, t) \mid 0 \leq t \leq T\}$ liefert eine Funktion, die (11) erfüllt.

3. *Bestimmung der Umlaufzahl:* Nach Definition von n_γ gilt

$$n_\gamma = \frac{1}{2\pi}(\vartheta(T) - \vartheta(0)) = \frac{1}{2\pi} \left((\widehat{\vartheta}(T, T) - \widehat{\vartheta}(0, T)) + (\widehat{\vartheta}(0, T) - \widehat{\vartheta}(0, 0)) \right)$$

Weil e entlang der Strecken zwischen $(0, 0)$ und $(0, T)$, bzw. zwischen $(0, T)$ und (T, T) , immer in der Halbebene $\overline{H_L}$ bzw in $\overline{H_R}$ liegt, sieht man leicht

$$\begin{aligned} \widehat{\vartheta}(0, T) - \widehat{\vartheta}(0, 0) &= \pi \\ \widehat{\vartheta}(T, T) - \widehat{\vartheta}(0, T) &= \pi. \end{aligned}$$

Also folgt $n_\gamma = +1$. Der Fall $n_\gamma = -1$ tritt auf, wenn man mit $\dot{\gamma}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ beginnt.

- **Bemerkung:** In der Übung wurde die Stetigkeit von e unter der Annahme, γ sei eine C^2 -Kurve, bewiesen. Dabei wurde direkt die Definition von Differenzierbarkeit benutzt. Um den Umlaufsatz dann auch für C^1 -Kurven zu beweisen argumentiert man, dass man periodische C^1 -Funktionen bezüglich der C^1 -Norm (nicht nur gleichmässig, also bzgl. C^0 -Norm) durch C^2 -Funktionen approximieren kann. Wesentlich eleganter ist folgender Beweis, der auch C^1 -Kurven behandelt:

Stetigkeit von e in (t_0, t_0) : Es genügt, Folgen $(t_{1,n}, t_{2,n})$ mit $t_{1,n} < t_{2,n}$ zu betrachten, die gegen (t_0, t_0) konvergieren. Dann gilt

$$\frac{\gamma(t_{2,n}) - \gamma(t_{1,n})}{\|\gamma(t_{2,n}) - \gamma(t_{1,n})\|} = \frac{\gamma(t_{2,n}) - \gamma(t_{1,n})}{t_{2,n} - t_{1,n}} \cdot \left\| \frac{\gamma(t_{2,n}) - \gamma(t_{1,n})}{t_{2,n} - t_{1,n}} \right\|^{-1}.$$

Wir betrachten also den ersten Faktor

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma(t_{2,n}) - \gamma(t_{1,n})}{t_{2,n} - t_{1,n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t_{2,n} - t_{1,n}} \int_0^1 \frac{d}{ds} (\gamma(t_{1,n} + s(t_{2,n} - t_{1,n}))) ds \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \dot{\gamma}(t_{1,n} + s(t_{2,n} - t_{1,n})) ds && \text{ Kettenregel} \\ &= \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \dot{\gamma}(t_{1,n} + s(t_{2,n} - t_{1,n})) ds && \text{ glm. Stetigkeit von } \dot{\gamma} \\ &= \int_0^1 \dot{\gamma}(t_0) ds = \dot{\gamma}(t_0) \end{aligned}$$

Zur Vertauschung von Integration und Limes beachte man

1. Stetige Funktionen (wie etwa $\dot{\gamma}$) auf kompakten Intervallen (wie $[0, T]$) sind gleichmässig stetig (s. [Wa1], S. 123.)
2. Die gleichmässige Stetigkeit von $\dot{\gamma}$ impliziert, dass die Folge $\dot{\gamma}(t_{1,n} + s(t_{2,n} - t_{1,n}))$ auf $[0, T]$ gleichmässig konvergiert.

Man verwendet dann den Satz über gliedweise Integration ([Wa1], S. 209) für das Riemann-Integral. Alternativ kann man das Lebesgue-Integral und den Satz über dominierte Konvergenz ([Wa2], S. 332, Satz 9.14) verwenden.

Die Stetigkeit in $(0, T)$ kann man analog beweisen.

Diesen Weg hat übrigens einem/er Ihrer Mitstudenten/innen gefunden.

7. VORLESUNG AM 16.5.

- **Definition:** Eine ebene Kurve γ ist *konvex*, falls es für jeden Punkt p auf γ eine Gerade σ_p durch p gibt, sodass γ ganz auf einer Seite der Geraden liegt.
- **Bemerkung:** Wenn γ eine reguläre, konvexe Kurve ist, so gibt es für jedes p genau eine Gerade σ_p (bis auf Orientierung) mit der obigen Eigenschaft. Wir werden uns mit diesem Fall beschäftigen.
- **Definition:** Sei γ eine reguläre ebene Kurve. Dann ist $n(t) = J \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$ das *Normalenfeld* entlang γ . Jedem Zeitpunkt im Definitionsbereich wird ein Vektor orthogonal zum Geschwindigkeitsvektor zugeordnet.
- **Bemerkung:** Wenn $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ konvex ist, so ist gilt für $t_0 \in I$

$$\langle \gamma(t) - \gamma(t_0), n(t_0) \rangle \geq 0 \text{ für alle } t \in I \text{ oder}$$

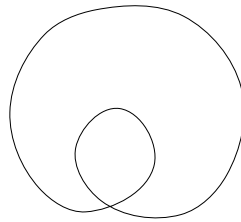
$$\langle \gamma(t) - \gamma(t_0), n(t_0) \rangle \leq 0 \text{ für alle } t \in I.$$

Es ist a priori denkbar, dass für $t_0 \neq t'_0 \in I$ verschiedene dieser Ungleichungen gelten. Dann gibt es aber zwischen t_0, t'_0 eine Zeit t''_0 für die beide dieser Ungleichungen gelten (Stetigkeit), also

$$\langle \gamma(t) - \gamma(t_0), n(t_0) \rangle = 0 \text{ für alle } t \in I.$$

Dann parametrisiert γ ein Stück der Tangente an γ durch $\gamma(t''_0)$.

- **Proposition (Charakterisierung konvexer Kurven):** Sei γ eine einfach geschlossene (=eingebettete und periodische) Kurve γ die nach Bogenlänge parametrisiert ist und κ ihre Krümmung. γ ist genau dann konvex, falls $\kappa(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ oder $\kappa(t) \leq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
- **Beispiel:** Wenn man nicht annimmt, dass γ eingebettet ist, so ist die Aussage der Proposition falsch:



- **Beweis der Proposition:** \implies : Sei $t_0 \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an (Konvexität), dass $\langle \gamma(t) - \gamma(t_0), n(t_0) \rangle \geq 0$ für alle t gilt. Die Tatsache, dass γ eine C^2 -Kurve ist liefert

$$\gamma(t) - \gamma(t_0) = \dot{\gamma}(t_0)(t - t_0) + \frac{\ddot{\gamma}(t_0)}{2}(t - t_0)^2 + r(t)$$

wobei $\frac{r(t)}{(t-t_0)^2} \rightarrow 0$ wenn $t \rightarrow t_0$. Dann folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \gamma(t) - \gamma(t_0), n(t_0) \rangle \\ &= \underbrace{\langle \dot{\gamma}(t_0)(t - t_0), n(t_0) \rangle}_{=0} + \left\langle \frac{\ddot{\gamma}(t_0)}{2}(t - t_0)^2, n(t_0) \right\rangle + \langle r(t), n(t_0) \rangle. \end{aligned}$$

Dividiert man durch $(t - t_0)^2 > 0$ für $t \neq t_0$ und führt den Grenzübergang $t \rightarrow t_0$ durch, so folgt

$$0 \leq \frac{1}{2} \langle \ddot{\gamma}(t_0), n(t_0) \rangle = \frac{1}{2} \langle \kappa(t_0) J \dot{\gamma}(t_0), J \dot{\gamma}(t_0) \rangle = \kappa(t_0)/2.$$

\Leftarrow : Wir nehmen an, dass $\kappa \geq 0$ und γ ist T -periodisch. Falls γ nicht konvex ist, gibt es $t_0 \in [0, T)$, sodass

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \langle \gamma(t) - \gamma(t_0), n(t_0) \rangle$$

positive *und* negative Werte annimmt. Weil γ periodisch ist, nimmt F sein Minimum und sein Maximum an. Also gibt es $t_{min}, t_{max} \in [0, T)$, sodass

$$(13) \quad F(t_{min}) < 0 = F(t_0) < F(t_{max})$$

Insbesondere $\dot{F}(t_{min}) = \dot{F}(t_{max}) = 0$ und keine zwei dieser Punkte liegen auf der selben Geraden parallel zu $\dot{\gamma}(t_0)$. Alle drei Tangentialvektoren

$$\dot{\gamma}(t_{min}), \dot{\gamma}(t_{max}), \dot{\gamma}(t_0)$$

sind also senkrecht auf $n(t_0)$, d.h. parallel zu $\dot{\gamma}(t_0)$. Mindestens zwei von ihnen, $\dot{\gamma}(t'), \dot{\gamma}(t''), t' < t'' \in [0, T)$, zeigen darüberhinaus in die gleiche Richtung. Sei nun $\vartheta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion für die

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta(t)) \\ \sin(\vartheta(t)) \end{pmatrix}$$

gilt (wir wissen, dass eine solche Funktion existiert). Auf keinem der Intervalle zwischen den Zeiten t_{min}, t_{max}, t_0 (und Translaten um $\pm 2\pi$) kann ϑ konstant sein. Wegen $\dot{\gamma}(t'') = \dot{\gamma}(t')$ gilt $\vartheta(t'') - \vartheta(t') = 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Weil zudem $\kappa \geq 0$ folgt $k \geq 0$ aus (12) und ϑ ist monoton wachsend. Wegen (13) ist ϑ nicht konstant auf $[t', t'']$ (und auch nicht auf der Vereinigung $[0, t'] \cup [t'', T]$). Also gilt $k \geq 1$ und

$$\vartheta(T) - \vartheta(0) > \vartheta(t'') - \vartheta(t') \geq 2\pi.$$

Daraus folgt $n_\gamma > 1$. Dies widerspricht dem Umlaufsatz (erst hier verwendet man, dass γ eingebettet ist). Die Annahme, γ sei nicht konvex, ist also falsch.

- **Bemerkung:** Wenn γ nicht eingebettet ist, so ist die Aussage des Satzes im Allgemeinen falsch.
- **Definition:** Sei $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine ebene, nach Bogenlänge parametrisierte C^2 -Kurve. t_0 ist ein *Scheitel* von γ , falls $\kappa(t_0) = 0$.
- Weil man jede reguläre C^2 -Kurve nach Bogenlänge parametrisieren kann, und die unparametrisierte Kurve wieder zweimal stetig differenzierbar ist, würde es in dieser Definition genügen, *regulär* anstatt *nach Bogenlänge parametrisiert* zu fordern.
- **Beispiel:** Die Kurve $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$ parametrisiert eine Ellipse. Diese Kurve ist einfach geschlossen, konvex, analytisch und hat vier Scheitelpunkte.
- **Satz (Vierscheitelsatz):** Sei $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine einfach geschlossene, reguläre C^2 -Kurve mit Periode T . Dann hat γ vier verschiedene Scheitel in $[0, T)$.
- **Bemerkung:** Der Beweis verwendet die folgenden beiden Hilfsaussagen.
- **Lemma:** Wenn eine einfach geschlossene, reguläre und konvexe C^2 -Kurve γ eine Gerade in mehr als zwei Punkten schneidet, so enthält die Kurve ein Segment der Geraden.
- **Korollar des Lemmas:** Sei γ eine einfach geschlossene, konvexe C^2 -Kurve und c eine Gerade die in mehr als einem Punkt tangential an γ ist. Dann liegt ein ganzes Segment der Geraden auf γ .

- **Beweis des Vierscheitelsatzes:** Wir nehmen an, dass kein Segment von γ eine Strecke ist, denn jeder Punkt dieser Strecke ist ein Scheitelpunkt. Aus dem gleichen Grund können wir annehmen, dass κ auf keinem Intervall mit nichtleerem Inneren konstant ist.

κ ist eine stetige Funktion auf \mathbb{R} die T -periodisch ist. Sie nimmt also ihr Maximum und ihr Minimum an. Dies zeigt, dass κ zwei kritische Punkte in $[0, T)$ hat. Wir nehmen nun an, dass κ höchstens drei kritische Punkte $0 \leq t_0 < t_1 < t_2$ in $[0, T)$ hat. Dann ist $\dot{\kappa}$ auf keinem der Intervalle $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $[t_2, t_0 + 2\pi]$ konstant und ändert sein Vorzeichen (κ ist periodisch). Im Inneren der Intervalle ist $\dot{\kappa} \neq 0$. Wir nehmen an, dass $\dot{\kappa} > 0$ auf $(t_0, t_1) \cup (t_1, t_2)$ und $\dot{\kappa} < 0$ auf $(t_2, t_0 + 2\pi)$.

Wir betrachten die Gerade c durch $\gamma(t_0)$ und $\gamma(t_2)$. Wenn γ ganz auf einer Seite von c liegt, so ist c in $\gamma(t_0)$ und $\gamma(t_2)$ tangential an γ . Nach dem Korollar zum Lemma enthält γ dann ein Geradensegment. Weil γ konvex und eingebettet ist, sowie weil γ kein Segment einer Geraden enthält (s. Hilfslemma und Korollar), schneidet c die Kurve γ in genau zwei Punkten $\gamma(\tau_1), \gamma(\tau_2)$ und beide Abschnitte von $\gamma(\mathbb{R})$ liegen auf verschiedenen Seiten von c . Sei n_c der Vektor senkrecht zu c , welcher auf die Seite von c zeigt, auf der $\dot{\kappa} \geq 0$.

Dann gilt

$$\begin{aligned}
 0 &< \int_0^T \langle \dot{\kappa}(t)(\gamma(t) - \gamma(\tau_1)), n_c \rangle dt && \dot{\kappa} \not\equiv 0 \text{ auf } (t_0, t_2) \text{ und Wahl von } c \\
 &= \langle \kappa(t)(\gamma(t) - \gamma(\tau_1)), n_c \rangle \Big|_0^T - \left\langle \int_0^T \kappa(t) \dot{\gamma}(t) dt, n_c \right\rangle && \text{Linearität, partielle Integration} \\
 &= 0 + \langle n(T) - n(0), n_c \rangle && \text{Frenet Gleichung in } \mathbb{R}^2 \\
 &= 0 && \text{Periodizität}
 \end{aligned}$$

Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme, κ hat höchstens drei kritische Punkte, falsch war.

- **Bemerkung (Frenet Gleichung in \mathbb{R}^2):** Wir haben die Frenet Gleichungen in \mathbb{R}^3 bewiesen. Der Beweis von

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_1(t) &= \kappa(t)e_2(t) \\
 \dot{e}_2(t) &= -\kappa(t)e_1(t)
 \end{aligned}$$

mit $e_1(t) = \dot{\gamma}(t)$ und $e_2(t) = Je_1(t)$ ist eine sehr einfache Übung.

- **Beispiel:** Sei $0 < a < b$. Dann parametrisiert $\gamma(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$ eine Ellipse (nicht nach Bogenlänge). κ hat genau vier kritische Punkte (man kann die Formel (10) auf S. 8 verwenden).

8. VORLESUNG AM 22.5.

- Wir haben im Beweis des Vierscheitelsatzes folgendes Lemma benutzt:
- **Lemma:** Wenn eine einfach geschlossene, reguläre und konvexe C^2 -Kurve γ eine Gerade in mehr als zwei Punkten schneidet, so enthält die Kurve ein Segment der Geraden.
- **Beweis des Lemmas:** Wir nehmen an, dass $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ nach Bogenlänge parametrisiert ist, T sei die Periode von γ . Sei c eine Gerade, die γ in mindestens drei Punkten schneidet. Nach einer Umparametrisierung (evtl. orientierungsumkehrend), dürfen wir annehmen, dass $\gamma(0)$ auf c liegt und $\dot{\kappa} \geq 0$. Sei

$\vartheta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von (11). Weil γ konvex ist, ist ϑ monoton steigend nach (12), und nach dem Umlaufsatz ist $\vartheta : [0, T] \rightarrow [\vartheta_0, \vartheta_0 + 2\pi]$.

γ schneidet c in den Punkten $\gamma(0), \gamma(t_1), \gamma(t_2)$ mit $0 < t_1 < t_2 < T$. Durch Betrachtung von Parallelen zu c erhalten wir drei Zeiten $\tau_1 \in [0, t_1], \tau_2 \in [t_1, t_2], \tau_3 \in [t_2, L]$, sodass $\dot{\gamma}(\tau_i), i = 1, 2, 3$, parallel zu c ist. Wenn γ nicht ein Stück einer Geraden parallel zu c parametrisiert (mit beiden Endpunkten aus $\{\gamma(0), \gamma(t_1), \gamma(t_2)\}$), können wir annehmen, dass die Zeiten τ_i im Inneren des entsprechenden Intervalls liegen.

Sei nun $\vartheta_1, \vartheta_1 + \pi \in [\vartheta_0, \vartheta_0 + 2\pi]$, sodass

$$\dot{\gamma}(\tau_i) = \pm(\cos(\vartheta_1), \sin(\vartheta_1)) \text{ für } i = 1, 2, 3.$$

1. Falls $\vartheta_1 > \vartheta_0$, so nimmt die Einschränkung von ϑ auf $[0, T]$ in τ_1, τ_2, τ_3 einen der Werte $\vartheta_1, \vartheta_1 + \pi$ an, einer der Werte wird also zweimal angenommen, also in $\tau_i < \tau_j$, mit $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3\}$. Wegen der Monotonie ist ϑ auf dem Intervall $[\tau_i, \tau_j]$ konstant. Die Einschränkung von γ auf dieses Intervall parametrisiert also eine Gerade. Weil zwischen je zwei der Zeiten τ_i eine der Zeiten t_1 oder t_2 liegt, enthält dieses Geradenstück einen der Punkte $\gamma(t_1), \gamma(t_2)$. Also enthält γ ein Segment der Geraden c .
 2. Falls $\vartheta_0 = \vartheta_1 = \vartheta(\tau_1)$, so kann es passieren, dass $\vartheta(\tau_2) = \vartheta_1 + \pi$ und $\vartheta(\tau_3) = \vartheta_0 + 2\pi$. Dann funktioniert das Argument aus dem ersten Fall nicht. Aber dann ist ϑ auf $[0, \tau_1]$ konstant, $\tau_1 \neq 0$, und γ enthält wieder ein Segment einer Geraden parallel zu c (weil das Segment von γ und die Gerade den Punkt $\gamma(t_1)$) enthalten.
- **Beweis des Korollars:** γ liegt ganz auf einer Seite der Geraden. Betrachtet man eine ausreichend kleine Parallelverschiebung der Geraden auf diese Seite, so erhält man eine Gerade die γ in drei Punkten schneidet (für jeden Tangentialpunkt mindestens zwei, auf jeder Seite einer Normalen durch den Punkt an dem die Gerade tangential ist). Wir haben das Lemma gezeigt, aber nicht, dass ein Abschnitt von c selbst auf γ liegt. Das stimmt auch, wird aber nicht benötigt.
 - **Bemerkung:** Der Beweis dieses Lemmas ist um einiges länger als man vielleicht erwartet. Die Hypothesen sind auch um einiges stärker als nötig. Man könnte den Beweis mit dem Kurvensatz von Jordan (den wir in seiner ganzen Allgemeinheit nicht beweisen werden und können) erheblich abkürzen.
 - **Satz (Kurvensatz von Jordan):** Sei $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine einfach geschlossene, stetige Kurve. Dann hat $\mathbb{R}^2 \setminus (\gamma(\mathbb{R}))$ genau zwei Wegzusammenhangskomponenten. eine dieser beiden Komponenten ist beschränkt.
 - **Bemerkungen:**
 1. Kurven wie in diesem Satz heißen auch *Jordankurven*.
 2. Camille Jordan, nach dem dieser Satz benannt ist, hat 1887 einen umstrittenen Beweis gegeben, s. aber [Ha]. Der erste anerkannte Beweis stammt von Oswald Veblen (ca. 1905).
 - **Satz von Schoenflies:** Die beschränkte Komponente aus dem Kurvensatz von Jordan ist das Innere einer eingebetteten Scheibe D . Für den Rand der Scheibe gilt $\partial D = \gamma(\mathbb{R})$ gilt.
 - **Bemerkung:** Damit endet der Teil der Vorlesung, in dem Kurven eigenständig und nicht nur als Hilfsmittel betrachtet werden. Man könnte noch einiges diskutieren: isoperimetrische Ungleichung, Satz von Fenchel, Satz von Fary-Milnor, Crofton Formel, etc.

9. VORLESUNG AM 23.5.

- **Literatur:** Abschnitt 2.2. von [dCa]
- **Definition:** Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Teilmenge. S ist eine *reguläre Fläche*, wenn für alle $p \in S$ eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^3$ von p existiert mit einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$ und

$$\varphi : U \longrightarrow V \cap S$$

win Abbildung, sodass folgendes gilt:

1. φ ist glatt,
2. φ ist ein ein Homöomorphismus und
3. $D_p\varphi$ (eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$) ist an jedem Punkt injektiv.

Die Abbildung $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ist eine *Parametrisierung/ein lokales Koordinatensystem*; $V \cap S$ ist eine *Koordinatenumgebung* von p . Insbesondere ist $\emptyset \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche.

- **Bemerkung:** Es wird nicht gefordert, dass die Umkehrabbildung von φ glatt ist (was auch immer das heißen soll).
- **Beispiel 0:** $S = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$. Man kann $V = \mathbb{R}^3$, $U = \mathbb{R}^2$ und

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 = U &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \\ (u, v) &\longmapsto (u, v, 0) \end{aligned}$$

wählen. Die Jacobimatrix von φ hat überall Rang 2, ist also injektiv.

- **Lemma:** Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ glatt. Der Graph

$$\Gamma_f = \{(u, v, f(u, v)) \mid (u, v) \in U\} \subset \mathbb{R}^3$$

ist eine reguläre Fläche. Man wählt $V = U \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$, und

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 = U &\longrightarrow V = U \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (u, v, f(u, v)) \end{aligned}$$

Dann ist

$$D_{(u,v)}\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat Rang zwei, repräsentiert also eine injektive Abbildung. Die Umkehrabbildung von φ ist

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : S \cap (U \times \mathbb{R}) &\longrightarrow U \\ (u, v, f(u, v)) &\longmapsto (u, v). \end{aligned}$$

Sie ist insbesondere stetig.

- **Beispiel 1:** $S = S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$. Eine Koordinatenumgebung von $(0, 0, 1)^T = p$ ist gegeben durch $V = \{z > 0\}$, $U = D^2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$ und die glatte Abbildung

$$(14) \quad \begin{aligned} \varphi : U = D^2 &\longrightarrow \{z > 0\} \cap S^2 \\ (u, v) &\longmapsto \left(u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}\right). \end{aligned}$$

$S \cap V$ ist also der Graph einer glatten Funktion. Koordinatenumgebungen um andere Punkte $q = A \cdot p \in S^2$ mit $A \in O(3)$ erhält man durch Betrachtung von $V_q = A \cdot V$, $U_q = U$, $\varphi_q = \varphi \circ A^{-1}$.

- **Definition:** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. $p \in U$ ist ein *kritischer Punkt* von f wenn df_p nicht surjektiv ist. In diesem Fall ist $f(p)$ ein *kritischer Wert*. Ein Punkt p ist *regulär* wenn p nicht kritisch ist und $q \in \mathbb{R}^n$ ist ein *regulärer Wert* wenn kein Element des Urbildes $f^{-1}(q)$ kritisch ist.

Insbesondere ist q ein regulärer Wert wenn $f^{-1}(q) = \emptyset$.

- **Satz (Satz vom regulären Wert):** Sei $V \subset \mathbb{R}^3$ offen, $f : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ glatt und $a \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert. Dann ist $f^{-1}(a) \subset V \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche.
- **Beweis:** Sei $p \in f^{-1}(a)$. Die Koordinaten auf dem Urbildbereich von f bezeichnen wir mit (x, y, z) . Weil $D_p f$ surjektiv ist, ist $\nabla f(p) \neq 0$. Nach einer Umbenennung der Achsen darf man $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$ annehmen. Man definiert

$$F : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \rightarrow (x, y, f(x, y, z)).$$

Die Jacobimatrix von F in p ist

$$D_p F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \partial_x f(p) & \partial_y f(p) & \partial_z f(p) \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist invertierbar. Nach dem Umkehrsatz gibt es eine offene Umgebung U' von $F(p)$ und eine glatte Abbildung $G : U' \rightarrow G(U') = V' \subset V$ auf eine offene Umgebung $G(U') = V'$ von p , sodass $F \circ G = \text{id}_{V'} \subset \mathbb{R}^3$ and $G \circ F = \text{id}_V$. Die Koordinaten auf \mathbb{R}^3 als Zielbereich von F bezeichnen wir mit u, v, w . Nach Definition von F gilt

$$G_x(u, v, w) = u \quad G_y(u, v, w) = v \quad G_z(u, v, w) = g(u, v, w).$$

Hier bezeichnet G_x die x -Komponente von G etc. Wir wählen $U'' \subset \mathbb{R}^2$ offen, so dass $p \in U'' \times \{a\} \subset U'$ und setzen $V'' = G(U'' \times (a - \varepsilon, a + \varepsilon))$ für $\varepsilon > 0$ so klein, dass $U'' \times (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset U'$.

Dann ist $V'' \cap S$ das Bild von

$$\varphi_p : U'' \rightarrow (V'' \cap S) \\ (u, v) \mapsto (u, v, g(u, v, a)).$$

Diese Abbildung ist glatt, hat vollen Rang und ihre Umkehrung ist die Komposition der Einschränkung von F auf $V'' \cap S$ und der Projektion auf die ersten beiden Koordinaten.

- **Beispiel:** Der einzige kritische Wert von $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ist 0, die Sphäre mit Radius 1 ist $f^{-1}(1)$ ist eine reguläre Fläche. Wählt man

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto (f(x, y, z) - 1)^2,$$

so ist jeder Punkt von $g^{-1}(0)$ kritisch, trotzdem ist $g^{-1}(0) = f^{-1}(1)$ eine reguläre Fläche.

- **Beispiel:** $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Der einzige kritische Punkt von f ist $(0, 0, 0)$, der einzige kritische Wert ist 0.

- $f^{-1}(0)$ ist ein Doppelkegel und *keine* reguläre Fläche (s. unten), entfernt man den Punkt $(0, 0, 0)$ so erhält man die reguläre Fläche $f^{-1}(0) \setminus \{(0, 0, 0)\}$.
- $f^{-1}(1)$ bzw. $f^{-1}(-1)$ sind reguläre Flächen, man nennt sie einschaliges bzw. zweischaliges Hyperboloid.
- **Tatsache:** Der Doppelkegel ist keine reguläre Fläche.
- Der Beweis ist ein Widerspruchsbeweis: Wir nehmen an, dass es eine lokale Parametrisierung φ von $f^{-1}(0)$ um $q = (0, 0, 0)$ gibt. Man zeigt dann:
 - Nach dem Zwischenwertsatz gibt es keinen stetigen Weg in $f^{-1}(0) \setminus \{(0, 0, 0)\}$ der Punkte in $\{z < 0\}$ mit Punkten in $\{z > 0\}$ verbindet. (Die analoge Aussage gilt für das zweischalige Hyperboloid $f^{-1}(-1)$.)
 - Im Doppelkegel können je zwei Punkte durch stetige Wege verbunden werden.
 - In regulären Flächen kann Wege, deren Endpunkte von q verschieden sind, immer so abändern, dass die modifizierten Wege q nicht treffen ohne dabei die Endpunkte der Wege zu verändern. Für diese Konstruktion verwendet man die lokale Parametrisierung φ .

10. VORLESUNG AM 29.5.

- **Literatur:** Abschnitte 2.2. (Ende) und 2.3. von [dCa]
- **Tatsache (reguläre Flächen häufen sich nicht auf sich selber):** Sei S eine reguläre Fläche, $p \in S$ und $\psi(U') \ni p$ das Bild einer injektiven, glatten Abbildung $\psi : U' \rightarrow S$ mit Rang 2 die auf einer offenen Teilmenge von \mathbb{R}^2 definiert ist so dass $p \in \psi(U')$. Dann ist p kein Häufungspunkt von $S \setminus \psi(U')$. Es gibt also eine Umgebung von p in \mathbb{R}^3 , die $S \setminus \psi(U')$ nicht trifft.
- **Beweis:** Sei $\varphi : U \rightarrow (V \cap S)$ eine Parametrisierung von S um p mit $U \subset \mathbb{R}^2$ offen. Durch eine Verkleinerung von U' kann man erreichen, dass $\psi(U') \subset \varphi(U)$. Wenn eine Folge x_n von Punkten in $S \setminus \psi(U')$ gegen p konvergiert, so liegen fast alle (= alle bis auf endlich viele) Folgenglieder in der Umgebung V von S , also im Bild von φ . Dann ist $\varphi^{-1}(\psi(U'))$ eine offene Teilmenge von $U \subset \mathbb{R}^2$ die $\varphi^{-1}(p)$ enthält und weil φ ein Homöomorphismus ist (also eine stetige Umkehrung hat), konvergiert $\varphi^{-1}(x_n)$ gegen $\varphi^{-1}(p)$ in U . Das geht aber nicht, weil kein Punkt der Folge $\varphi^{-1}(x_n)$ in der Umgebung $\varphi^{-1}(\psi(U'))$ von $\varphi^{-1}(p)$ liegt.
- **Anmerkung:** Diese Tatsache wird oft implizit verwendet wenn man die Größe einer Umgebung eines Punktes $p \in S$ in \mathbb{R}^3 so verkleinert, dass sie nur noch bestimmte (in der Regel endlich viele) zusammenhängende Stücke enthält.
- **Satz (glatte Koordinatenwechsel auf regulären Flächen):** Seien S eine reguläre Fläche, $p \in S$ und $\varphi_i : U_i \rightarrow (S \cap V_i), i = 1, 2$, reguläre Parametrisierungen um p . Dann ist

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(\varphi_1(U_1) \cap \varphi_2(U_2)) \rightarrow \varphi_2^{-1}(\varphi_1(U_1) \cap \varphi_2(U_2))$$

ein Diffeomorphismus.

- **Beweis:** $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ ist ein Homöomorphismus weil diese Abbildung aus Homöomorphismen zusammengesetzt ist. Weil φ_2 kein (lokaler) Diffeomorphismus ist, kann man nicht analog folgern, dass $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ differenzierbar ist. Um zu zeigen, dass $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ differenzierbar ist, verwendet man den Umkehrsatz und erweitert φ_2 . Sei $q_1 = (u_1, v_1) \in \varphi_1^{-1}(\varphi_1(U_1) \cap \varphi_2(U_2))$ beliebig und $q_2 = (u_2, v_2) = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(q_1)$. Wir verwenden die Notation $\varphi_i = (x_i, y_i, z_i), i = 1, 2$.

Nach einer Umbenennung von Achsen darf man annehmen, dass

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial u_2}(u_2, v_2) & \frac{\partial x_2}{\partial v_2}(u_2, v_2) \\ \frac{\partial y_2}{\partial u_2}(u_2, v_2) & \frac{\partial y_2}{\partial v_2}(u_2, v_2) \end{pmatrix} \neq 0$$

auf einer Umgebung von q_2 . Man definiert

$$F : U_2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ ((u_2, v_2), t) \longmapsto (x_2(u_2, v_2), y_2(u_2, v_2), z_2(u_2, v_2) + t).$$

Dann ist $DF(q_2)$ invertierbar, also ist F ein lokaler Diffeomorphismus bei q_2 . Also gibt es eine Umgebung W von $\varphi_2(q_2)$ in \mathbb{R}^3 , sodass F^{-1} auf W definiert und glatt ist. Weil φ_1 stetig ist, gibt es eine Umgebung N von q_1 die von φ_1 nach W abgebildet wird. Dann gilt

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 = F|_{\varphi_1(N)}^{-1} \circ \varphi_1 = F^{-1} \circ \varphi_1,$$

auf N . Insbesondere ist $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ glatt um q_1 und $q_1 \in \varphi_1^{-1}(\varphi_1(U_1) \cap \varphi_2(U_2))$ war beliebig.

Um zu zeigen, dass die Umkehrung $(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)^{-1} = \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$ glatt ist muss man nur die Rollen von φ_1, φ_2 oben vertauschen.

- **Definition:** Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, $W \subset \mathbb{R}^3$ offen und $f : (W \cap S) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f *glatt*, wenn es für jeden Punkt $p \in W \cap S$ ein lokales Koordinatensystem $\varphi : U \cap (V \cap S)$ um p gibt, so dass $f \circ \varphi$ glatt ist.

Analog definiert man Begriffe wie *differenzierbar*, *stetig differenzierbar*, C^k .

- **Bemerkung:** Wenn φ_1, φ_2 zwei lokale Koordinatensysteme um p sind, so gilt

$$f \circ \varphi_2 = f \circ \varphi_1 \circ (\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2).$$

Weil $(\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2)$ eine Diffeomorphismus ist, ist $f \circ \varphi_1$ genau dann glatt auf einer Umgebung von $\varphi_1^{-1}(p)$, wenn $f \circ \varphi_2$ auf einer Umgebung von $\varphi_2^{-1}(p)$ glatt ist.

- **Bemerkung:** Wir haben in der Definition von regulären Flächen verlangt, dass die lokalen Paramterisierung glatt sind. Daher kann man auf regulären Flächen den Begriff *analytisch* nicht auf die gleiche Weise definieren, wie glatt. Hätten wir *analytische Flächen* definiert, d.h. verlangt, dass lokale Paramterisierungen analytisch sind, so könnte man auch *analytische Funktionen auf S* analog definieren.

In dieser Vorlesung haben wir aber keine echte Verwendung für den Begriff der analytischen Fläche/analytischen Funktion.

- **Anmerkung:** Wenn $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche ist und $W \subset \mathbb{R}^3$ offen, so ist $W \cap S$ auch eine reguläre Fläche.
- **Beispiel:** Sei $\varphi : U \longrightarrow (V \cap S)$ eine lokale Paramterisierung einer regulären Flächen. Dann sind die Koordinatenfunktionen u und v , d.h.

$$p \longmapsto u\text{-Koordinate von } \varphi^{-1}(p)$$

ist glatt auf $\varphi(U)$. Um zu zeigen, dass u auf $\varphi(U)$ glatt ist verwendet man die Paramterisierung φ .

- **Beispiel:** Falls $f : W \longrightarrow \mathbb{R}$ glatt auf einer offenen Menge von $W \subset \mathbb{R}^3$ ist, so ist die Einschränkung von f auf $W \cap S$ für jede reguläre Fläche S glatt auf S . Zum Beispiel ist die Höhenfunktion

$$(15) \quad \begin{aligned} h : S^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto z \end{aligned}$$

glatt auf S^2 .

- **Definition:** Seien $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ reguläre Flächen und $f : S_1 \rightarrow S_2$. Dann ist f *differenzierbar*, falls es für alle $p \in S_1$ lokale Parametrisierungen $\varphi : U \rightarrow (V \cap S_1)$ um p und $\psi : U' \rightarrow (V' \cap S_2)$ um $f(p)$ gibt, so dass $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ glatt ist.

Falls f ein Homöomorphismus mit differenzierbarer Umkehrung ist, so ist f ein Diffeomorphismus.

- **Bemerkung:** In den Übungen werden Sie zeigen, dass die obige Definition von glatten Abbildungen zwischen regulären Flächen zur folgenden äquivalent ist.
- **Alternativdefinition:** Sei $f : S \rightarrow S'$ eine stetige Abbildung zwischen regulären Flächen. Dann ist f glatt, falls für alle $p \in S$ eine lokale Parametrisierung $\varphi : U \rightarrow (V \cap S)$ von S um p und $\psi : U' \rightarrow (V' \cap S')$ eine lokale Parametrisierung von S' um $f(p)$, sodass

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$$

glatt ist.

- **Definition:** Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Dann ist die Diffeomorphismengruppe $\text{Diff}(S)$ von S

$$\text{Diff}(S) = \{f : S \rightarrow S \mid f \text{ ist ein Diffeomorphismus}\}.$$

11. VORLESUNG AM 5.6.

- **Literatur:** Abschnitt 2.3. von [dCa]
- **Bemerkung:** Es ist nicht einfach, allgemeine Aussagen über $\text{Diff}(S)$ für eine reguläre Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ zu beweisen. In den Übungen werden Sie aber beweisen, dass für eine wegzusammenhängende Fläche S und Punkte $p_i, q_i, i = 1, \dots, n$, so dass die p_i ebenso wie die Punkte q_i paarweise verschieden sind ein $f \in \text{Diff}(S)$ existiert, so dass $f(p_i) = q_i$. Man sagt, dass $\text{Diff}(S)$ auf S für alle n -transitiv operiert.

Man kann dies mit den holomorphen Automorphismen $\text{Aut}(\mathbb{C})$ bzw. $\text{Aut}(\mathbb{E})$ von \mathbb{C} bzw. der Einheitskreisscheibe \mathbb{E} . $\text{Aut}(\mathbb{C})$ operiert 2-fach transitiv, aber nicht 3-fach transitiv. $\text{Aut}(\mathbb{E})$ operiert 3-fach transitiv, aber nicht 4-fach transitiv (s. [Re], S. 211ff).

Die Diffeomorphismengruppe soll man sich als unendlich dimensionale Gruppe denken (nicht wie etwa $\text{SO}(n), \text{SU}(n), \text{PSL}(2, \mathbb{C})$).

- Bei speziellen Flächen sind gewisse Symmetrien offensichtlich.
- **Beispiel (Rotationsflächen):** Sei I ein offenes Intervall,

$$\gamma : I \rightarrow \{(\xi, \nu) \in \mathbb{R}^2 \mid \xi > 0\}$$

eine glatte, reguläre Kurve, sodass für alle t eine Umgebung $U_t \subset \mathbb{R}^2$ von $\gamma(t)$ und $\varepsilon > 0$ mit $U_t \cap \gamma((t - \varepsilon, t + \varepsilon))$ existieren. Insbesondere ist γ injektiv. Wir schreiben $\gamma = (f, g)$. Dann ist

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \text{es gibt } s \in I \text{ so dass } x^2 + y^2 = (f(s))^2, z = g(s)\}$$

eine reguläre Fläche in \mathbb{R}^3 .

Die Einschränkung von Rotationen des \mathbb{R}^3 auf die z -Achse zum Winkel α liefert Diffeomorphismen

$$\begin{aligned} \rho_\alpha : S &\rightarrow S \\ (x, y, z) &\mapsto (\cos(\alpha)x - \sin(\alpha)y, \sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y, z) \end{aligned}$$

von S .

- Wir kehren kurz zurück zur Definition regulärer Flächen und Kriterien an denen man reguläre Flächen erkennt (z.B. Satz vom regulären Wert).
- **Terminologie:** Eine lokale Parametrisierung $\varphi : U \rightarrow (V \cap S)$ parametrisiert ein Stück einer regulären Fläche S . Manchmal kann man eine Fläche auch mit einem Koordinatensystem überdecken. Die Wahl eines solchen Koordinatensystems ist dann eine parametrisierte Fläche.
- **Definition:** Eine *parametrisierte Fläche* ist eine glatte Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$, sodass Df an jedem Punkt injektiv ist.
- **Beispiel:** Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine glatte, reguläre, parametrisierte Kurve. Dann ist

$$\begin{aligned} \varphi : I \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, s) &\mapsto \gamma(t) + s\dot{\gamma}(t) \end{aligned}$$

eine glatte Abbildung, aber parametrisiert im Allgemeinen keine Fläche. Zum Beispiel hat φ immer nur Rang 1 entlang von $I \times \{0\}$. Wenn γ eine Frenetkurve ist, dann ist $\varphi|_{\{s \neq 0\}}$ eine parametrisierte Fläche (aber im Allgemeinen parametrisiert φ keine reguläre Fläche).

- **Bemerkung:** Es ist im Allgemeinen schwierig, zu prüfen ob eine Abbildung wie diejenige aus dem letzten Beispiel injektiv ist (oder effektive Bedingungen angeben die das sicherstellen). Nur dann könnte $\varphi(\{s \neq 0\})$ eine reguläre Fläche sein. Immerhin stellt die folgende Proposition eine Beziehung zu regulären Flächen her.
- **Proposition:** Angenommen $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist eine parametrisierte Fläche. Dann gibt es für alle $q \in U$ eine offene Umgebung $U' \subset U \subset \mathbb{R}^2$ sodass $f|_{U'}$ die reguläre Fläche $f(U')$ parametrisiert.
- **Beweis:** Man verwendet den selben Trick wie im Beweis der Tatsache, dass Koordinatenwechsel glatt sind: Sei $q \in U$. Weil Df injektiv ist, darf man nach einer Umbenennung der Achsen annehmen, dass

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial u}(q) & \frac{\partial f_x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial f_y}{\partial u}(q) & \frac{\partial f_y}{\partial v}(q) \end{pmatrix} \neq 0$$

wobei $f = (f_x, f_y, f_z)$. Dann ist

$$\begin{aligned} F : U \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ ((u, v), t) &\mapsto (f_x(u, v), f_y(u, v), f_z(u, v) + t) \end{aligned}$$

ein lokaler Diffeomorphismus um $(q, 0)$. Also gibt es eine Umgebung U' von $(q, 0)$ so dass $F|_{U'}$ ein Diffeomorphismus ist. Außerdem gilt $F|_{t=0} = f$. Dann ist

$$\begin{aligned} f : U' \cap \{t = 0\} &\rightarrow U' \cap f(U' \times \{t = 0\}) \\ (u, v) &\mapsto F(u, v, 0) = f(u, v) \end{aligned}$$

eine lokale Parametrisierung um $f(q)$, die zeigt, dass $f(U')$ eine reguläre Fläche ist.

- **Bemerkung:** Sei $\varphi : U \rightarrow (V \cap S)$. Wenn man diese Parametrisierung auf eine Teilmenge $U' \subset U$ einschränkt, so würde man gerne argumentieren, dass $\varphi' = \varphi|_{U'}$ auch eine lokale Parametrisierung von S ist. Dazu muß man eine offene Teilmenge $V' \subset V$ finden, so dass

$$\varphi' = \varphi|_{U'} : U' \rightarrow S \cap V'.$$

Dies wird vom vorangehenden Beweis geleistet: Für jeden Punkt $u \in U'$ erhält man lokale Parametrisierungen $\varphi_u : U'(u) \rightarrow V'(u) \cap S$. Man definiert

$$V' = \cup_{u'} V'(u).$$

Dann ist φ' surjektiv nach Wahl von V' , injektiv, stetig, glatt, $D\varphi'$ ist injektiv als Einschränkung. Die Einschränkung der Umkehrung auf $V'(u) \cap S$ ist φ_u^{-1} , also stetig.

- **Lemma (reguläre Flächen als lokale Graphen):** Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $p \in S$. Dann gibt es eine Umgebung W von p in S , sodass $W = f(U_1)$ der Graph einer glatten Funktion $f : U_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ist, wobei U eine offene Teilmenge der xy -Ebene, der yz -Ebene oder der zx -Ebene ist.
- **Beweis:** Sei $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S$ ein Koordinatensystem um p . Die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial x(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial y(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial y(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial z(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial z(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix}$$

hat Rang 2. Wir nehmen an, dass

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial x(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial y(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial y(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix} \neq 0 \text{ in } \varphi^{-1}(p).$$

Wir definieren die Projektion $\text{pr}_z : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch $\text{pr}_z(x, y, z) = (x, y)$. Nach dem Umkehrsatz ist $\text{pr}_z \circ \varphi$ ein lokaler Diffeomorphismus h einer Umgebung von $\varphi^{-1}(p)$ auf eine Umgebung U_1 von $\text{pr}_z(p)$.

Dann ist $\varphi \circ h^{-1} : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ glatt, es gilt

$$\text{pr}_z \circ \varphi \circ h^{-1}(u', v') = (u', v').$$

Die Einschränkung von pr_z auf $\varphi(h^{-1}(U_1))$ ist also injektiv. Daher gibt es eine glatte (weil $\varphi \circ h^{-1}$ glatt ist) Funktion $f : U_1 \rightarrow \mathbb{R}$, sodass

$$\varphi \circ h^{-1}(u', v') = (u', v', f(u', v')) \in V' \cap S.$$

Hier ist V' eine offenen Umgebung von $\varphi(p)$, mit der Eigenschaft, dass $\varphi(h^{-1}(V_1)) = V' \cap S$, s.o.

Also ist $S \cap V' \cap \text{pr}_z^{-1}(V_1)$ der Graph von f .

- **Beispiel:** Dies zeigt, dass der Kegel

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$$

keine reguläre Fläche ist. Es genügt nicht, einfach zu sagen, dass die erste Parametrisierung um $(0, 0, 0)$ die einem einfällt, nämlich $(x, y, z) \mapsto (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$, nicht glatt ist. Man braucht das letzte Lemma.

12. VORLESUNG AM 6.6.

- **Literatur:** Abschnitte 2.4. von [dCa]
- **Bemerkung:** Wir haben die Definition glatter Abbildungen auf regulären Flächen diskutiert und wollen nun wichtige Begriffe aus der Analysis mehrerer Veränderlicher auf unsere Situation verallgemeinern. Der folgende Begriff ist dabei zentral!

- **Definition:** Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und p in S . Der *Tangentialraum* von S in p ist

$$T_p S = D\varphi_{\varphi^{-1}(p)}(\mathbb{R}^2),$$

wobei $\varphi : U \rightarrow (V \cap S)$ eine Parametrisierung von S mit $p \in \varphi(U)$ ist.

Elemente des Tangentialraums $T_p S$ sind *Tangentialvektoren*.

- **Bemerkung:** Nach dem Satz über Koordinatentransformationen ist der Tangentialraum von S in p unabhängig von der Wahl der Parametrisierung, denn seien

$$\varphi_1 : U_1 \rightarrow (V_1 \cap S)$$

$$\varphi_2 : U_2 \rightarrow (V_2 \cap S)$$

zwei lokale Parameterisierungen um p , so gilt

$$\begin{aligned} D\varphi_1(\mathbb{R}^2) &= D(\varphi_2 \circ \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)(\mathbb{R}^2) \\ &= D\varphi_2(D(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)(\mathbb{R}^2)) \\ &= D\varphi_2(\mathbb{R}^2) \end{aligned}$$

weil $D(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)$ ein Isomorphismus ist. Das folgende Lemma liefert eine alternative Beschreibung von Tangentialvektoren.

- **Lemma:** Für jeden Tangentialvektor $v \in T_p S$ gibt es eine glatte Kurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ mit $\varepsilon > 0$ und $\gamma(0) = p$, sodass $\dot{\gamma}(0) = v$.

Umgekehrt ist für jede differenzierbare Kurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ mit $\gamma(0) = p$ die Ableitung $\dot{\gamma}(0)$ ein Element von $T_p S$.

Man sagt, dass der Weg γ mit $\dot{\gamma}(0) = v \in T_p S$ den Tangentialvektor v *repräsentiert*. Wir schreiben $[\gamma] = v$, zwei Wege sind hier äquivalent falls sie den selben Tangentialvektor repräsentieren.

- **Beweis:** Sei $\varphi : U \rightarrow V \cap S$ eine lokale Parametrisierung um $p \in S$ und $D\varphi(X) \in T_p S$ mit $X \in \mathbb{R}^2$ ein Tangentialvektor. Weil U offen ist gibt es $\varepsilon > 0$, sodass $\varphi^{-1}(p) + tX \in U$ für alle $-\varepsilon < t < \varepsilon$. Dann ist $\gamma(t) = \varphi(\varphi^{-1}(p) + tX)$ eine Kurve die $D\varphi(X)$ repräsentiert.

Sei nun $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ glatt. Man wählt wieder eine lokale Parametrisierung $\varphi : U \rightarrow (V \cap S)$ um p . Weil γ stetig ist existiert $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, sodass

$$\gamma((-\varepsilon, \varepsilon')) \subset (V \cap S).$$

Dann ist $\varphi^{-1} \circ \gamma$ glatt (hier erinnert man sich an den Beweis vom Satz über glatte Koordinatenwechsel und wie $\varphi^{-1} = F^{-1}$ als glatte Abbildung aufzufassen ist) und es gilt nach der Kettenregel

$$D\varphi_{\varphi^{-1}(\gamma(0))} \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi^{-1} \circ \gamma(t) \right)}_{\in \mathbb{R}^2} = \dot{\gamma}(0)$$

- **Definition:** Sei $f : S \rightarrow S'$ eine glatte Abbildung. Das *Differential* df_p von f bei p ist

$$Df_p : T_p S \rightarrow T_{f(p)} S'$$

$$v \mapsto \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ \gamma)(t), \text{ wobei } \gamma \text{ ein Weg ist, der } v \text{ repräsentiert.}$$

- **Notation:** Häufig schreibt man anstelle von df_p auch Df_p oder f_{*p} .

- **Proposition:** Seien S, S' reguläre Flächen und $f : S \rightarrow S'$ sei glatt. Sei $v \in T_p S$ und $\gamma, \tilde{\gamma}$ Kurven die v repräsentieren. Dann gilt

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \gamma)(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \tilde{\gamma})(t)$$

und $Df_p : T_p S \rightarrow T_{f(p)} S'$ ist eine lineare Abbildung.

- **Beweis:** Man wählt lokale Parametrisierungen $\varphi : U \rightarrow (S \cap V)$ um p und $\psi : U' \rightarrow (S' \cap V')$ um $f(p)$. Man schreibt

$$(16) \quad f \circ \gamma = \psi \circ (\psi^{-1} \circ f \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \gamma).$$

Wir haben schon gezeigt, dass φ^{-1} ersetzt werden kann durch eine differenzierbare Abbildung G , die auf einer Umgebung V_1 von $\gamma(0) = p$ in \mathbb{R}^3 definiert ist und $S \cap V_1$ auf eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ abbildet. Analog interpretiert man G^{-1} .

Dann kann man die Kettenregel auf (16) anwenden (die Abbildungen sind so geklammert, dass man die Komposition von drei Abbildungen betrachtet, welche auf offenen Teilmengen von \mathbb{R} oder \mathbb{R}^2 definiert sind). Man erhält

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \gamma)(t) = D\psi_{\psi^{-1}(f(p))} \circ D(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)_{\varphi^{-1}(p)} \circ DG_p(\dot{\gamma}(0)).$$

Die rechte Seite hängt nur noch von v ab und Df_p ist die Komposition linearer Abbildungen.

- **Zusammenfassung:** Für alle p ist $T_p S$ ein Vektorraum und ein Unterraum von \mathbb{R}^3 . Obwohl also in der Definition von $T_p S$ eine lokale Parametrisierung gewählt wird ist der Tangentialraum selbst, zusammen mit seiner Vektorraumstruktur, unabhängig von der Wahl einer Parametrisierung (weil $D\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ linear ist). Das Differential Df_p einer regulären Abbildung ist eine lineare Abbildung $Df_p : T_p S \rightarrow T_{f(p)} S'$.
- **Satz (Kettenregel):** Seien S, S' sowie S'' reguläre Flächen in \mathbb{R}^3 und $f : S \rightarrow S'$ sowie $g : S' \rightarrow S''$ glatt. Dann gilt für $p \in S$

$$D(g \circ f)_p = Dg_{f(p)} \circ Df_p$$

- **Beweis:** Man betrachtet einen Weg γ , der v repräsentiert und bemerkt, dass $f \circ \gamma$ den Tangentialvektor $df_p(v) \in T_p S'$ repräsentiert.
- **Bemerkung:** Für eine lokale Parametrisierung $\varphi : U \rightarrow (S \cap V)$ um p erhält man aus der Standardbasis von \mathbb{R}^2 die Basis

$$X_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u} = d\varphi_{\varphi^{-1}(p)} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$X_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v} = d\varphi_{\varphi^{-1}(p)} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

von $T_p S$. Hier sind u, v die kartesischen Koordinaten auf $U \subset \mathbb{R}^2$.

Sei nun $f : S \rightarrow S'$ glatt und $\psi : U' \rightarrow (S' \cap V')$ eine Parametrisierung von S' um $f(p)$. Die darstellende Matrix von df_p bezüglich der Basen $\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}$ von $T_p S$ und $\frac{\partial \psi}{\partial u'}, \frac{\partial \psi}{\partial v'}$ von $T_p S'$ ist die Jacobimatrix von $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ bei $\varphi^{-1}(p)$.

- **Beispiel:** Wie betrachten $S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ und $p = (0, 0, 1)$. Sei $f : S^2 \rightarrow S^2$ die Rotation um die z -Achse mit Winkel α , d.h.

$$f(x, y, z) = (\cos(\alpha)x - \sin(\alpha)y, \sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y, z).$$

Diese Abbildung ist glatt (als Einschränkung einer glatten Abbildung, die auf ganz \mathbb{R}^3 definiert ist) und p ist ein Fixpunkt von f , d.h. $f(p) = p$. Wir wollen die darstellende Matrix von Df_p bezüglich der Koordinaten $\varphi = \psi$ mit $\varphi(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2})$ (mit $U = \{u^2 + v^2 < 1\}$ und $V = \{z > 0\}$). Dann gilt $X_u = (1, 0, 0)^T$ und $X_v = (0, 1, 0)^T$. $D\rho_\alpha$ ist eine Rotation um den Winkel α .

- **Definition:** Sei $f : S \rightarrow S'$ eine glatte Abbildung zwischen regulären Flächen und $p \in S$. f ist ein *lokaler Diffeomorphismus* bei p wenn es eine Umgebung V_1 von $f(p)$ in S' , eine Umgebung V_2 von p in S sowie einen Diffeomorphismus $g : V_1 \rightarrow V_2$ gibt, sodass $f \circ g = \text{id}_{V_1}$ und $g \circ f|_{V_2} = \text{id}_{V_2}$.
- **Satz:** $f : S \rightarrow S'$ ist ein lokaler Diffeomorphismus genau dann, wenn df_p bijektiv ist.

Der Beweis folgt direkt aus dem Umkehrsatz mit Hilfe von lokalen Parametrisierungen φ, ψ um $p, f(p)$.

- **Definition:** Sei $f : S \rightarrow S'$ eine glatte Abbildung. $p \in S$ ist ein *kritischer Punkt* von f wenn df_p nicht surjektiv ist, ansonsten ist p ein *regulärer Punkt*. Wenn $f^{-1}(p')$ einen kritischen Punkt enthält, so ist p' ein *kritischer Wert* von f , ansonsten ist p' ein *regulärer Wert*.
- **Definition:** Sei $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung. Das *Differential* df_p von f bei p ist

$$df_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v \mapsto \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \gamma)(t), \text{ wobei } \gamma \text{ ein Weg ist, der } v \text{ repräsentiert.}$$

Wie oben zeigt man, dass df_p eine wohldefinierte lineare Abbildung ist.

- **Definition:** $p \in S$ ist *kritischer Punkt* einer glatten Abbildung $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, falls $df_p = 0$, ansonsten ist der Punkt *regulär*.

Reguläre/kritische Werte definiert man wie immer.

- **Bemerkung:** Das Differential einer Funktion $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ liefert eine Zuordnung $p \mapsto df_p$ die jedem Punkt p ein Element des Dualraums $T_p^* S$ des Tangentialraums zuordnet.
- **Beispiel:** Wir betrachten die Höhenfunktion auf S^2 wie in (15) auf S. 22. Repräsentiere $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S^2$ einen Tangentialvektor $[\gamma] \in T_{\gamma(0)} S^2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} df_p([\gamma]) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\gamma(t)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle \gamma(t), (0, 0, 1)^T \rangle \\ &= \dot{\gamma}_z(0) \end{aligned}$$

- **Definition:** Seien $S, S' \subset \mathbb{R}^3$ reguläre Flächen und $p \in S \cap S'$ ein Schnittpunkt. Der *Winkel zwischen* S, S' in p ist der Winkel zwischen $T_p S$ und $T_p S'$ und liegt in $[0, \pi/2]$.

S *berührt* S' in p , wenn $T_p S = T_p S'$.

- **Bemerkung:** Wir werden noch sehen, was eine orientierte Fläche ist. Dann kann man als Schnittwinkel den Winkel zwischen den orientierten Tangentialräumen wählen. Dieser verfeinerte Schnittwinkel liegt dann in $[0, \pi]$.

13. VORLESUNG AM 12.6.

- **Literatur:** Abschnitt 2.6 in [dCa].

- **Erinnerung:** Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum der Dimension $n < \infty$ und seien $v = (v_1, \dots, v_n), w = (w_1, \dots, w_n)$ zwei geordnete Basen. v und w repräsentieren die gleiche Orientierung, $v \sim w$, wenn die lineare Abbildung $F : V \rightarrow V$, die durch $F(v_i) = w_i$ festgelegt wird, positive Determinante hat. Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge \mathcal{B} der geordneten Basen von V und \mathcal{B} zerfällt in genau zwei Äquivalenzklassen.

Falls $n \neq 0$, so ist eine *Orientierung* von V ist die Wahl einer solchen Äquivalenzklasse. Wenn $n = 0$, so ist eine Orientierung von $V = \{0\}$ die Wahl einer der Zahlen ± 1 .

- **Beispiel:** Sei $(v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{B}$ eine Basis von V mit $n \geq 1$. Dann repräsentieren (v_1, \dots, v_n) und $(-v_1, v_2, \dots, v_n)$ verschiedene Orientierungen von V . Mehr dazu steht zum Beispiel in Kapitel 3.4. von [Fi].
- **Definition:** Eine reguläre Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ ist *orientierbar*, wenn es eine Familie $(\varphi_i : U_i \rightarrow (S \cap V_i))_{i \in I}$ von lokalen Parametrisierungen von S gibt, sodass
 1. $\cup_{i \in I} \varphi_i(U_i) = S$, d.h. die Familie überdeckt S und
 2. für alle $i, j \in I$ hat die Determinante der Jacobimatrix von

$$\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j : \varphi_j^{-1}(\varphi_i(U_i) \cap \varphi_j(U_j)) \rightarrow \varphi_i^{-1}(\varphi_i(U_i) \cap \varphi_j(U_j))$$

überall positives Vorzeichen.

Eine *Orientierung* von S ist die Wahl einer solchen Familie. Zwei Orientierungen $(\varphi_i)_{i \in I}$ und $(\psi_j)_{j \in J}$ sind gleich genau dann, wenn die Vereinigung dieser beiden Familien auch eine Orientierung von S ist.

Eine reguläre Fläche ist *orientierbar*, falls es eine Orientierung gibt.

- **Terminologie:** Die Familie lokaler Parametrisierungen $(\varphi_i : U_i \rightarrow (V_i \cap S), i \in I)$ so dass $\cup_i (V_i \cap S) = S$ ist ein *Atlas*. Eine Orientierung ist die Wahl eines orientierten Atlas.
- **Beispiel:** Graphen glatter Funktionen sind orientierbar weil man einen Atlas aus genau einer lokalen Parametrisierung wählen kann.
- **Beispiel:** Die 2-Sphäre $S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ ist orientierbar. Man rechnet nach, dass

$$\varphi_N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \{z < 1\} \cap S^2$$

$$(u, v) \mapsto \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right)$$

$$\varphi_S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \{z > -1\} \cap S^2$$

$$(u, v) \mapsto \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, -\frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right)$$

keine Orientierung ist. Dazu bestimmt man die Determinante der Jacobimatrix von $\varphi_S^{-1} \circ \varphi_N : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit

$$\varphi_S^{-1} : \{z > -1\} \cap S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right).$$

Sei $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Spiegelung $h(u, v) = (-u, v)$. Die Familie $(\varphi_N, \varphi_S \circ h)$ ist eine Orientierung von S^2 .

- **Erinnerung:** Seien $v, w \in \mathbb{R}^3$ Vektoren. Dann steht das Kreuzprodukt $v \times w$ senkrecht auf v, w . Wenn v, w linear unabhängig sind, so ist $v, w, v \times w$ eine Basis von \mathbb{R}^3 die die gleiche Orientierung definiert wie Standardbasis. Insbesondere

ist diese Orientierung unabhängig von der Wahl von v, w ist solange v, w linear unabhängig sind.

- Weil $T_p S \subset \mathbb{R}^3$ zweidimensional ist, gibt es genau zwei Vektoren der Länge 1, die auf $T_p S$ senkrecht stehen. Wenn $\varphi : U \rightarrow (S \cap V)$ eine lokale Parametrisierung von S mit $p \in \varphi(U)$ ist, so sind dies die Vektoren

$$(17) \quad N_\varphi(p) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}(\varphi^{-1}(p)) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(\varphi^{-1}(p))}{\left| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(\varphi^{-1}(p)) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(\varphi^{-1}(p)) \right|} \quad \text{und} \quad -N_\varphi(p).$$

Wenn $\widehat{\varphi}$ eine weitere lokale Parametrisierung ist, deren Bild p enthält, so gilt $N_\varphi(p) = N_{\widehat{\varphi}}(p)$ genau dann, wenn die Jacobideterminante von

$$D(\varphi^{-1} \circ \widehat{\varphi})_{\widehat{\varphi}^{-1}(p)}$$

positiv ist. Auf dieser Tatsache basiert der Beweis von folgendem Lemma.

- **Lemma:** Eine reguläre Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ ist genau dann orientierbar, wenn es eine stetige Abbildung

$$N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$p \mapsto N(p) = \text{ein Einheitsvektor der auf } T_p S \text{ senkrecht steht}$$

existiert. Ein solches Vektorfeld nennt man *Normalenvektorfeld* von S .

- **Beweis:** Sei $(\varphi_i)_{i \in I}$ eine Orientierung. Dann erhält man ein wohldefiniertes Normalenvektorfeld durch (17) (also $p \mapsto N_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(p))$).

Umgekehrt sei $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Normalenvektorfeld. Wir wählen eine Überdeckung von S durch lokale Parametrisierungen $(\varphi_i : U_i \rightarrow S \cap V_i)_{i \in I}$ sodass U_i wegzusammenhängend ist. Sei $i \in I$ und $p \in \varphi_i(U_i)$. Wenn $N_{\varphi_i}(p) = -N(p)$, so ändert man φ_i nicht, falls $N_{\varphi_i}(p) = N(p)$, so ersetzt man φ_i durch $\varphi_i \circ \sigma$ wobei $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein beliebiger Diffeomorphismus von \mathbb{R}^2 ist, der die Orientierung umkehrt (zum Beispiel $\sigma(u, v) = (-u, v)$). Dann gilt $N_{\varphi_i \circ \sigma} = N$ auf ganz $\varphi_i(U_i)$ (weil U_i zusammenhängend ist). Tut man dies für alle $i \in I$, so erhält man eine Orientierung von S .

- **Beispiel (Möbiusband):** Zuerst die anschauliche Beschreibung. Wir betrachten den Kreis $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ um den Ursprung mit Radius 2. Wir betrachten \mathbb{R}^2 als x, y -Ebene in \mathbb{R}^3 . Zu jedem Punkt $p \in \gamma(\mathbb{R})$ betrachten wir ein Geradenstück welches

- seinen Mittelpunkt in $p = (2 \cos(\alpha), 2 \sin(\alpha))$ hat,
- die Länge ist 2,
- ganz in der Ebene liegt, die durch p und die z -Achse aufgespannt wird,
- und der Winkel zwischen dem Geradenstück und der Geraden die p mit dem Ursprung verbindet ist $\alpha/2$.

Man beachte, dass der Winkel zwischen zwei nicht gerichteten (d.h. orientierten) Geraden nur bis auf Vielfache von π (und nicht 2π) definiert ist.

Die Analytische Beschreibung erhält man aus der Betrachtung der Abbildung

$$\psi : \mathbb{R} \times (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\alpha, s) \mapsto \left(\left(2 + s \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) \cos(\alpha), \left(2 + s \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) \sin(\alpha), 0 + s \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right)$$

Eine Überdeckung von $M = \text{Bild}(\psi)$ erhält man durch die Einschränkung von ψ

$$\begin{aligned}\varphi &= \psi|_{(0,2\pi) \times (-1,1)} : (0, 2\pi) \times (-1, 1) \longrightarrow (M \cap \{x \geq 0, y = 0\}) \\ \widehat{\varphi} &= \psi|_{(\pi,3\pi) \times (-1,1)} : (\pi, 3\pi) \times (-1, 1) \longrightarrow (M \cap \{x \leq 0, y = 0\}).\end{aligned}$$

Diese Abbildungen sind glatt, haben überall Rang 2 und sind Homöomorphismen auf ihr Bild. Die Umkehrung von $\widehat{\varphi}$ ist

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}^{-1} : (M \cap \{x \leq 0, y = 0\}) &\longrightarrow (\pi, 3\pi) \times (-1, 1) \\ (x, y, z) &\longmapsto (\alpha(x, y), s(x, y, z)).\end{aligned}$$

Hier ist $\alpha(x, y)$ die eindeutig bestimmte Zahl in $(\pi, 3\pi)$ sodass $\arg(x, y) = \alpha$. Dies ist glatt nach dem Umkehrsatz. Dann definiert man $s(x, y, z)$ als die eindeutig bestimmte Zahl, so dass

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (2 \cos(\alpha(x, y)), 2 \sin(\alpha(x, y)), 0) \\ &= s \left(\cos \left(\frac{\alpha(x, y)}{2} \right) \cos(\alpha(x, y)), \cos \left(\frac{\alpha(x, y)}{2} \right) \sin(\alpha(x, y)), \sin \left(\frac{\alpha(x, y)}{2} \right) \right).\end{aligned}$$

- **Satz:** Das Möbiusband ist nicht orientierbar.
- **Beweis:** Wir betrachten den Koordinatenwechsel

$$\widehat{\varphi}^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(\text{Bild}(\varphi) \cap \text{Bild}(\widehat{\varphi})) \longrightarrow \widehat{\varphi}^{-1}(\text{Bild}(\varphi) \cap \text{Bild}(\widehat{\varphi}))$$

Der Durchschnitt $\text{Bild}(\varphi) \cap \text{Bild}(\widehat{\varphi}) = M \setminus \{y = 0\}$ zerfällt in zwei wegzusammenhängende Stücke und es gilt

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(\text{Bild}(\varphi) \cap \text{Bild}(\widehat{\varphi})) &= ((0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)) \times (-1, 1) \\ \widehat{\varphi}^{-1}(\text{Bild}(\varphi) \cap \text{Bild}(\widehat{\varphi})) &= ((\pi, 2\pi) \cup (2\pi, 3\pi)) \times (-1, 1).\end{aligned}$$

Der Koordinatenwechsel ist

$$\widehat{\varphi}^{-1} \circ \varphi(\alpha, s) = \begin{cases} (\alpha + 2\pi, -s) & \text{falls } \alpha \in (0, \pi) \\ (\alpha, s) & \text{falls } \alpha \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

Insbesondere gilt für die Determinante der Jacobimatrix

$$\det(D_{(\alpha,s)}(\widehat{\varphi}^{-1} \circ \varphi))(\alpha, s) = \begin{cases} -1 & \text{falls } \alpha \in (0, \pi) \\ +1 & \text{falls } \alpha \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

Nimmt man an dass S orientierbar ist, so erhält man ein Normalenvektorfeld. Wendet man den Beweis des vorangehenden Lemmas auf die Familie $(\varphi, \widehat{\varphi})$ an, so erhält man *keine* Orientierung obwohl die Definitionsbereiche zusammenhängend waren. (Ändert man φ oder $\widehat{\varphi}$ durch eine orientierungsumkehrende Abbildung ab, so ändert dies nichts daran, dass die Jacobi Determinante des Kartenwechsels verschieden Vorzeichen auf den Zusammenhangskomponenten des Urbildbereichs hat.) Dies ist ein Widerspruch.

- **Lemma:** Sei $f : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ glatt und a ein regulärer Wert. Dann ist $S = f^{-1}(a)$ orientierbar.
- **Beweis:** Wenn ∇f das Gradientenvektorfeld von f ist, so ist $N(p) = \nabla f / \|\nabla f\|$ ein Normalenvektorfeld entlang S . Also ist S orientierbar.
- **Anmerkung:** Leider können wir folgendes nicht beweisen: Wenn $S \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte, wegzusammenhängende Fläche ist, so zerfällt das Komplement in genau zwei Teile und genau einer davon, das Äußere, ist nicht kompakt. Dann hat S ein Normalenvektorfeld, man wählt bei $p \in S$ den eindeutig bestimmten

Normalenvektor der ins Äußere zeigt. Eine kompakte reguläre Fläche in \mathbb{R}^3 ist also immer orientierbar.

14. VORLESUNG AM 13.6.

- **Literatur:** [dCa] Abschnitt 2.5 und 2.8
- **Rechenregel:** Seien $\varphi, \widehat{\varphi}$ lokale Parametrisierungen von S um p . Und $v = a \frac{\partial \varphi}{\partial u} + b \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \widehat{a} \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \widehat{u}} + \widehat{b} \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \widehat{v}} \in T_p S$ ein Tangentialvektor. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} \widehat{a} \\ \widehat{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial u}(\varphi^{-1}(p)) & \frac{\partial \widehat{u}}{\partial v}(\varphi^{-1}(p)) \\ \frac{\partial \widehat{v}}{\partial u}(\varphi^{-1}(p)) & \frac{\partial \widehat{v}}{\partial v}(\varphi^{-1}(p)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Hier ist \widehat{u} die \widehat{u} -Komponente von $\psi = \widehat{\varphi}^{-1} \circ \varphi$.

- **Folgerung:** Mit der gleichen Notation gilt nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} (18) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= \frac{\partial \widehat{\varphi} \circ \widehat{\varphi}^{-1} \circ \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \widehat{\varphi} \circ \widehat{\varphi}^{-1} \circ \varphi}{\partial v} \\ &= \left(\left(\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \widehat{u}} \circ \psi \right) \frac{\partial \widehat{u}}{\partial u} + \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \widehat{v}} \circ \psi \right) \frac{\partial \widehat{v}}{\partial u} \right) \times \left(\left(\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \widehat{u}} \circ \psi \right) \frac{\partial \widehat{u}}{\partial v} + \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \widehat{v}} \circ \psi \right) \frac{\partial \widehat{v}}{\partial v} \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial u} & \frac{\partial \widehat{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \widehat{v}}{\partial u} & \frac{\partial \widehat{v}}{\partial v} \end{pmatrix} \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \widehat{u}} \circ \psi \right) \times \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \widehat{v}} \circ \psi \right). \end{aligned}$$

- **Erinnerung:** Sei $H \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wenn $\psi : H \rightarrow G$ eine C^1 -Abbildung ist, die injektiv und $\det(D\psi) \neq 0$ überall. Dann gilt für integrierbare Funktionen $f : G \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_G f(x) dx = \int_H f(\psi(u)) |\det(D\psi)| dy.$$

Diese Formulierung bezieht sich auf das Lebesgue-Integral, s. §9.19 von [Wa2] oder auch in [Fo3], §13. Die entsprechende Aussage für das Jordan-Integral steht in [Wa2], §7, insbesondere S. 247. Das Lebesgue-Integral ist bequemer, zum Beispiel weil jede kompakte/offene Menge in \mathbb{R}^n Lebesgue-messbar ist.

- **Definition:** Sei $R \subset S$ eine abgeschlossene, beschränkte Teilmenge einer regulären Fläche in \mathbb{R}^3 sodass es eine lokale Parametrisierung $\varphi : U \rightarrow (S \cap V)$ gibt, mit $\varphi(U) \supset R$. Der *Flächeninhalt/die Fläche* von R ist

$$(19) \quad A(R) = \int_{\varphi^{-1}(R)} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right| du dv =: \int_{\varphi^{-1}(R)} dA.$$

Nach der Transformationsformel ist $A(R)$ unabhängig von der Wahl der Parametrisierung. Man wendet die Transformationsformel auf den Koordinatenwechsel $\psi = \widehat{\varphi}^{-1} \circ \varphi$ an und verwendet (18), genauer:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi^{-1}(R)} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right| du dv &= \int_{\varphi^{-1}(R)} \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial u}(\varphi^{-1}(p)) & \frac{\partial \widehat{u}}{\partial v}(\varphi^{-1}(p)) \\ \frac{\partial \widehat{v}}{\partial u}(\varphi^{-1}(p)) & \frac{\partial \widehat{v}}{\partial v}(\varphi^{-1}(p)) \end{pmatrix} \right| \left(\left| \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \widehat{u}} \times \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \widehat{v}} \right| \circ \psi \right) du dv \\ &= \int_{\widehat{\varphi}^{-1}(R)} \left| \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \widehat{u}} \times \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \widehat{v}} \right| d\widehat{u} d\widehat{v}. \end{aligned}$$

- **Definition:** Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $p \in S$. Die *erste Fundamentalform* auf $T_p S$ ist die symmetrische Bilinearform

$$\begin{aligned} I_p : T_p S \times T_p S &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\mapsto \langle v, w \rangle. \end{aligned}$$

I_p ist also die Einschränkung vom Skalarprodukt von \mathbb{R}^3 auf $T_p S$.

- **Bemerkung:** Die erste Fundamentalform genügt um die Länge und Winkel von Tangentialvektoren zu definieren. Man kann insbesondere die Länge von glatten Kurven, die in S verlaufen, bestimmen. Man kann auch den Flächeninhalt mit ihrer Hilfe berechnen.
- **Notation:** Sei $\varphi : U \rightarrow S \cap V$ eine lokale Parametrisierung von V . Man definiert drei reellwertige Funktionen E, F, G auf U durch

$$(20) \quad \begin{aligned} E(u, v) &= \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \right|^2 \\ F(u, v) &= \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\rangle \\ G(u, v) &= \left| \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right|^2. \end{aligned}$$

Wenn $T_p S \ni v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ in der Basis $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)$ von $T_p S$ (mit $\varphi(u, v) = p$), so gilt

$$I_p(v, w) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

Die erste Fundamentalform I wird bezüglich einem Koordinatensystem um p durch die Matrix $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ beschrieben. Wechselt man das Koordinatensystem, so ändert sich im Allgemeinen auch die darstellende Matrix. Sei $\widehat{\varphi}$ ein weiteres Koordinatensystem um p . Dann gilt für $X, Y \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} X^T I Y &= \langle D\varphi(X), D\varphi(Y) \rangle \\ &= \langle D\widehat{\varphi} \circ D(\widehat{\varphi}^{-1} \circ \varphi)(X), D\widehat{\varphi} \circ D(\widehat{\varphi}^{-1} \circ \varphi)(Y) \rangle \\ &= (D(\widehat{\varphi}^{-1} \circ \varphi)(X))^T \widehat{I} D(\widehat{\varphi}^{-1} \circ \varphi)(Y) \\ &= X^T \left((D(\widehat{\varphi}^{-1} \circ \varphi))^T \widehat{I} D(\widehat{\varphi}^{-1} \circ \varphi) \right) Y. \end{aligned}$$

Also folgt die Transformationsformel für die darstellende Matrix der ersten Fundamentalform

$$I = (D(\widehat{\varphi}^{-1} \circ \varphi))^T \widehat{I} (D(\widehat{\varphi}^{-1} \circ \varphi))$$

- **Bemerkung:** Man kann den Integranden in (19) durch die Koeffizienten der ersten Fundamentalform ausdrücken. Nach bekannten Eigenschaften des Vektorproduktes (Länge des Produkts ist Fläche des von den Faktoren aufgespannten

Parallelogramms) und des Skalarproduktes gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right| &= \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| \left| \sin \left(\angle \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \right) \right| \\ &= \sqrt{EG} \sqrt{1 - \left(\cos \left(\angle \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \right) \right)^2} \\ &= \sqrt{EG} \sqrt{1 - \frac{F^2}{EG}} \\ &= \sqrt{EG - F^2}. \end{aligned}$$

- **Beispiel:** Sei $T^2(a, r) \subset \mathbb{R}^3$, $a > r > 0$ der Torus, der durch das Bild von

$$\varphi(u, v) = ((a + r \cos(u)) \cos(v), (a + r \cos(u)) \sin(v), r \sin(u))$$

mit $u, v \in \mathbb{R}$ gegeben ist. Schränkt man φ auf $(0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ ein, so erhält man eine lokale Parametrisierung deren Bild den ganzen Torus mit Ausnahme von zwei Kreislinien trifft die nichts zur Fläche beitragen. Wir betrachten die Einschränkung von φ auf $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. Das Bild des Randes dieses Quadrates ist eine Vereinigung zweier Kreise die nichts zur Fläche beiträgt.

Die erste Fundamentalform ist gegeben durch

$$\begin{aligned} E &= r^2 \\ F &= 0 \\ G &= (a + r \cos(u))^2. \end{aligned}$$

Man erhält $\sqrt{EG - F^2} = r(a + r \cos(u))$ und

$$\begin{aligned} A(T^2(a, r)) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(a + r \cos(u)) \, du \, dv \\ &= 4\pi^2 r a. \end{aligned}$$

- **Beispiel:** Die folgende Abbildung liefert eine lokale Parametrisierung von S^2 (Kugelkoordinaten)

$$\begin{aligned} \varphi : (0, 2\pi) \times (0, \pi) &\longrightarrow S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \\ (u = \varphi, v = \vartheta) &\longmapsto (\cos(\varphi) \sin(\vartheta), \sin(\varphi) \sin(\vartheta), \cos(\vartheta)). \end{aligned}$$

Hier gilt

$$\begin{aligned} X_\varphi &= (-\sin(\varphi) \sin(\vartheta), \cos(\varphi) \sin(\vartheta), 0) \\ X_\vartheta &= (\cos(\varphi) \cos(\vartheta), \sin(\varphi) \cos(\vartheta), \sin(\vartheta)). \end{aligned}$$

Also folgt $E = 1$, $F = 0$, $G = \sin(\vartheta)^2$. Man erhält für den Flächeninhalt von S^2

$$\begin{aligned} A(S^2) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{\sin(\vartheta)^2} \, d\varphi \, d\vartheta \\ &= 2\pi \int_0^\pi \sin(\vartheta) \, d\vartheta \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

- **Interpretation von $A(R)$:** Bisher haben wir (19) als Definition des Flächeninhalts von R verwendet ohne die Bezeichnung *Flächeninhalt* zu rechtfertigen. Dies soll hier skizziert werden.

1. Wir nehmen an, dass R ganz von einer lokalen Parametrisierung $\varphi : U \rightarrow (V \cap S)$ berdeckt wird. Ansonsten zerlegt man R in endlich viele Abschnitte mit dieser Eigenschaft (R ist nach Annahme kompakt). Insbesondere liefert diese Parametrisierung ein Normalenvektor N zu S in jedem Punkt von R .
2. Für eine kompakte Teilmenge R in \mathbb{R}^3 definieren wir den Durchmesser als $\mu(R) = \max\{d_{\mathbb{R}^3}(p, q) \mid p, q \in R\}$. Wir zerlegen R in kleine, wegzusammenhängende Stücke $R_i^{(n)}$, sodass $\cup_i R_i^{(n)} = R$ für alle n eine endliche Vereinigung ist (die Anzahl der Mengen hängt von n ab) die sich höchstens in Randpunkten schneiden (solche Zerlegungen entsprechen Zerlegungen von $\varphi^{-1}(R_i^{(n)})$). Weiter fordern wir

$$(21) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \max_i \left\{ \mu(R_i^{(n)}) \right\} = 0.$$

3. In $R_i^{(n)}$ wählt man p_i und betrachtet den Flächeninhalt $\bar{A}(\bar{R}_i^{(n)})$ der Projektion $\bar{R}_i^{(n)}$ von $R_i^{(n)}$ auf die Tangentialebene $T_{p_i} S$. In leicht abgewandelter Form (reguläre Flächen als lokale Graphen, S. 25) haben schon gesehen, dass wir annehmen dürfen, dass das Flächenstück $R_i^{(n)}$ ein Graph über $\bar{R}_i^{(n)}$ ist. Insbesondere ist $\bar{R}_i^{(n)}$ Teilmenge einer Ebene und wir wissen schon, was der Flächeninhalt $\bar{A}(\bar{R}_i^{(n)})$ davon ist. Die Summe

$$\sum_i \bar{A}(\bar{R}_i^{(n)})$$

approximiert das was wir als Flächeninhalt auffassen wollen (soweit er definiert ist). Wir betrachten also die alternative Definition

$$(22) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_i \bar{A}(\bar{R}_i^{(n)}) \right)$$

des Flächeninhalts falls dieser Grenzwert immer (d.h. für alle Folgen von Zerlegungen von R) existiert.

4. Es bleibt zu zeigen, dass die alternative Definition und die Definition (19) das gleiche Ergebnis liefern.
5. Dazu betrachten wir ein wegzusammenhängendes Flächenstück R_i für festes n (diesen Index lassen wir jetzt weg). Da wir den Durchmesser so klein wählen dürfen wie wir wollen (wegen (21)), darf man annehmen, dass kein Normalenvektor an S in R_i senkrecht auf $N(p_i)$ steht. Nach Anwendung einer Translation und einer Rotation darf man $p_i = 0$ und $N(p_i) = \partial_z$ annehmen. Dann ist $T_p S$ die x, y -Ebene. Wir wollen die Größen

$$\bar{A}(\bar{R}_i) = \int_{\bar{R}_i} dx dy \quad A(R_i) = \int_{\varphi^{-1}(R_i)} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right| du dv$$

vergleichen. Wir haben angenommen, dass $N(q_i), q_i \in R_i$, nie auf $N(p_i)$ senkrecht steht, also gilt auf $\varphi^{-1}(q_i)$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_x}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_y}{\partial v} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Weil diese Größe gerade die z -Komponente des Normalenvektors ist, ist diese Determinante immer positiv (sie ist positiv in $\varphi^{-1}(p_i)$ und R_i ist wegzusammenhängend). Dann gilt

$$(23) \quad \bar{A}(\bar{R}_i) = \int_{\varphi^{-1}(R_i)} \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_x}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_y}{\partial v} \end{pmatrix} \right| du dv$$

Am Punkt $\varphi^{-1}(p_i)$ gilt $\frac{\partial \varphi_z}{\partial u} = \frac{\partial \varphi_z}{\partial v} = 0$, d.h.

$$\left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_x}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_y}{\partial v} \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right|.$$

Die auf $\varphi^{-1}(R_i)$ definierte Funktion

$$\varepsilon_i(u, v) = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right| - \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_x}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_y}{\partial v} \end{pmatrix} \right|$$

ist stetig und es gilt $\varepsilon_i(\varphi^{-1}(p_i)) = 0$. Weil $\varphi^{-1}(R_i)$ kompakt ist, gibt es Zahlen m_i, M_i

$$|\varepsilon_i(u, v)| \leq M_i.$$

Die Funktion ε_i hat eine einfache geometrische Bedeutung: Sie ist die Differenz zwischen dem Betrag des Kreuzprodukts $\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}$ und der Länge der Projektion dieses Vektors auf den Normalenvektor in einem bestimmten Punkt p_i . Insbesondere folgt $M_i \rightarrow 0$ wenn $\max_i \mu(R_i) \rightarrow 0$ weil R_i kompakt ist, und alle beteiligten Funktionen also gleichmäßig stetig sind. Integriert man diese Ungleichung, so erhält man

$$\left| \int_{\varphi^{-1}(R_i)} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right| du dv - \bar{A}(\bar{R}_i) \right| \leq M_i \bar{A}(\varphi^{-1}(R_i))$$

und bemerkt, dass diese Ungleichungen Sinn machen ohne Bezug auf ein spezielles Koordinatensystem zu nehmen (das Integral ändert sich nicht durch Translationen und Rotationen in \mathbb{R}^3). Man summiert über i und findet

$$\left| A(R) - \left(\sum_i \bar{A}(\bar{R}_i) \right) \right| \leq \sum_i M_i \bar{A}(\varphi^{-1}(R_i))$$

Wenn $n \rightarrow \infty$ (wir hatten diesen Index in der Notation in diesem Schritt bisher weggelassen) so erhält man

$$A(R) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_i \bar{A}(\bar{R}_i^{(n)}) \right).$$

• **Fragen:**

1. Versuchen Sie, Skizzen zu zeichnen die diesen Beweis veranschaulichen.
2. Stimmt es, dass $A(R) \geq \sum_i \bar{A}(\bar{R}_i^{(n)})$?
3. Warum verwendet man *gleichmäßige* Stetigkeit?
4. Wie findet man Folgen von Zerlegungen von R , die (21) erfüllen?
5. Warum gilt (23).

15. VORLESUNG AM 19.6.

- **Literatur:** Abschnitt 3.1 in [dCa].
- **Vereinbarung:** Im Folgenden ist S eine orientierte Fläche und N das entsprechende Normalenvektorfeld.
- **Definition:** Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche mit einer Orientierung. Dann ist

$$\begin{aligned} N : S &\longrightarrow S^2 \\ p &\longmapsto N(p) \end{aligned}$$

die *Gauß-Abbildung* von S .

- **Lemma:** Die Gauß-Abbildung ist glatt.
- **Beweis:** Sei $p \in S$ und $\varphi : U \longrightarrow V \cap S$ ein lokales Koordinatensystem um p . Dann ist

$$N(u, v) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)}{\left| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right|}$$

glatt.

- **Wichtige Bemerkung:** Die Tangentialebene $T_q S^2$ an S^2 im Punkt q ist q^\perp . Wenn $q = N(p)$, so gilt also $T_p S = N(p)^\perp = T_q S^2$. Diese Identifikation erlaubt es, $dN_p : T_p S \longrightarrow T_{N(p)} S^2$ als Endomorphismus von $T_p S$ aufzufassen, die beiden Vektorräume $T_{N(p)} S^2$ und $T_p S$ werden auf natürliche Weise identifiziert. Die Gauß-Abbildung beschreibt die Variation des Tangentialraumes in \mathbb{R}^3 .
- **Terminologie:** Das Differential der Gauß-Abbildung wird oft *Weingartenabbildung* genannt.
- **Beispiel 1:** Sei $S = \{x^2 + y^2 = 1\}$ der Zylinder in \mathbb{R}^3 . Es gilt $T_{(x,y,z)} S = \text{span}\{(0, 0, 1), (-y, x, 0)\}$ und $N(x, y, z) = (x, y, 0)$ für eine geeignete Orientierung. Die Gauß-Abbildung ist also

$$\begin{aligned} N : S &\longrightarrow S^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, y, 0). \end{aligned}$$

Wenn $\gamma = (x(t), y(t), z(t))$ einen Tangentialvektor v in (x_0, y_0, z_0) repräsentiert, so gilt

$$\begin{aligned} dN_{(x_0, y_0, z_0)} : T_{(x_0, y_0, z_0)} S &\longrightarrow T_{(x_0, y_0, z_0)} S^2 \\ [\gamma] = v &\longmapsto \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} N(\gamma(t)) = (x'(0), y'(0), 0). \end{aligned}$$

- **Beispiel 2:** Sei $S = \{ax + by + cz = d\}$ mit $|(a, b, c)| = 1$. Dann ist S eine affine Ebene mit Normalenvektor $N = (a, b, c)$. Die Gauß-Abbildung ist also konstant und ihr Differential Null.
- **Beispiel 3:** Sei $S = S^2$ orientiert durch $N(x, y, z) = (x, y, z)$. Die Gauß-Abbildung ist dann $N = \text{id}_{S^2}$ und für das Differential gilt dann

$$dN_p = \text{id}_{T_p S^2} : T_p S^2 \longrightarrow T_p S^2.$$

Keht man die Orientierung von $S^2 = S$ um, ersetzt man also N durch $-N$, so ist $N = -\text{id}_{S^2}$ und $dN_p(v) = -v$ wenn man $T_{-p}(S^2)$ mit $T_p S^2$ identifiziert (beide Räume sind p^\perp).

- **Beispiel 4:** Sei $S = \{z^2 + x^2 - y^2 = 1\}$. Wegen $\nabla(z^2 + x^2 - y^2) = (2x, -2y, 2z)$ ist S eine reguläre Fläche und

$$N : S \longrightarrow S^2$$

$$(x, y, z) \longmapsto \frac{(2x, -2y, 2z)}{|(2x, -2y, 2z)|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x, -y, z)$$

ein Normalenvektorfeld das einer Orientierung von S entspricht. Sei $p = (0, 0, 1) \in S$. Dann repräsentieren die Kurven

$$\begin{aligned} \gamma_x : \mathbb{R} &\longrightarrow S \\ t &\longmapsto (t, 0, \sqrt{1-t^2}) \\ \gamma_y : \mathbb{R} &\longrightarrow S \\ t &\longmapsto (0, t, \sqrt{1+t^2}) \end{aligned}$$

Elemente $[\gamma_x] = (1, 0, 0)$ und $[\gamma_y] = (0, 1, 0)$ von $T_p S \subset \mathbb{R}^3$ und es gilt

$$\begin{aligned} dN_p((1, 0, 0)) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \frac{(t, 0, \sqrt{1-t^2})}{1} = (1, 0, 0) \\ dN_p((0, 1, 0)) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \frac{(0, -t, \sqrt{1+t^2})}{\sqrt{1+2t^2}} = -(0, 1, 0). \end{aligned}$$

Die Tangentialvektoren $(1, 0, 0)$ bzw. $(0, 1, 0)$ sind also Eigenvektoren des Differentials der Gauß-Abbildung zu den Eigenwerten $+1$ bzw. -1 .

- **Lemma:** Sei $p \in S$ und N die Gauß-Abbildung. Die lineare Abbildung

$$dN_p : T_p S \longrightarrow T_{N(p)} S^2 = T_p S$$

ist selbstadjungiert/symmetrisch (d.h. $I_p(dN_p(v), w) = \langle dN_p(v), w \rangle = \langle v, dN_p(w) \rangle = I_p(v, dN_p(w))$ für alle $v, w \in T_p S$).

- **Beweis:** Es genügt, für eine Basis X, Y von $T_p S$ die Gleichung $\langle dN_p(X), Y \rangle = \langle X, dN_p(Y) \rangle$ nachzuweisen. Sei $\varphi : U \longrightarrow (V \cap S)$ eine lokale Parametrisierung von S um p und X_u, X_v die entsprechende Basis von $T_p S$.

Im Bild dieses Koordinatensystems gilt $\langle N, X_u \rangle = 0 = \langle N, X_v \rangle$ weil N überall auf dem Tangentialraum an die Fläche senkrecht steht. Differenziert man die erste Gleichung nach v und die zweite nach u , so erhält man nach der Produktregel

$$\begin{aligned} 0 &= \langle N_v, X_u \rangle + \left\langle N, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \right\rangle \\ 0 &= \langle N_u, X_v \rangle + \left\langle N, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial u} \right\rangle \end{aligned}$$

Hier steht N_u für $dN(X_u)$, d.h. die Ableitung von N in Richtung der u -Koordinate, etc. Die zweiten Summanden auf der rechten Seite stimmen überein, also folgt die Behauptung

$$\langle N_v, X_u \rangle = \langle N_u, X_v \rangle.$$

- **Erinnerung:** Eine Abbildung $q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ auf einem \mathbb{R} -Vektorraum ist eine quadratische Form falls

$$B(v, w) = \frac{1}{2}(q(v+w) - q(v) - q(w))$$

bilinear ist, B ist dann die zugehörige Bilinearform und nach Definition symmetrisch. Umgekehrt definiert jede symmetrische Bilinearform V auf dem \mathbb{R} -Vektorraum V eine quadratische Form $q(v) = B(v, v)$. Dies liefert eine Korrespondenz zwischen quadratischen Formen und symmetrischen Bilinearenformen auf \mathbb{R} -Vektorräumen. (Dies gilt übrigens über allen Körpern deren Charakteristik nicht 2 ist.) Insbesondere können wir

$$\begin{aligned} T_p S \times T_p S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\longmapsto I_p(dN_p(v), w) \end{aligned}$$

als symmetrische Bilinearform/quadratische Form auffassen.

- **Definition:** Sei S eine orientierte, reguläre Fläche und N ihr Normalenvektorfeld. Die *zweite Fundamentalform* von S in p ist

$$\begin{aligned} II_p : T_p S \times T_p S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\longmapsto -I_p(dN_p(v), w) = -\langle dN_p(v), w \rangle. \end{aligned}$$

- **Erinnerung:** Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine reguläre Kurve. Wir haben die Krümmung κ von γ definiert (wenn γ nach Bogenlänge parametrisiert ist), und es gilt

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|}{|\dot{\gamma}(t)|^3}.$$

Diese Größe ist nie negativ.

- **Definition:** Sei $\gamma : 0 \in I \rightarrow S$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $\gamma(0) = p$. Die Normalenkrümmung von γ in p in S ist

$$(24) \quad \kappa_n = \langle \ddot{\gamma}(0), N(p) \rangle.$$

- **Bemerkung:** Wenn γ nur regulär ist, so gilt

$$\kappa_n = \begin{cases} \kappa \cdot \cos(\angle(\ddot{\gamma}(0), N(p))) & \text{falls } \ddot{\gamma}(0) \neq 0 \\ 0 & \text{falls } \ddot{\gamma}(0) = 0. \end{cases}$$

Diese Größe kann alle Werte in \mathbb{R} annehmen.

- **Orientierungsverhalten:** Ändert man die Orientierung von γ , so ändert sich $\ddot{\gamma}$ nicht und die Normalenkrümmung auch nicht. Ersetzt man die Orientierung N von S durch $-N$, so ändern die Normalenkrümmungen ihr Vorzeichen.
- **Proposition:** Alle Kurven in S durch p , die in p die gleiche Tangente haben, haben auch die gleiche Normalenkrümmung $II_p(\dot{\gamma})$ (wenn γ in der Formel nach Bogenlänge parametrisiert ist).
- **Beweis:** γ verläuft in S , also gilt $\langle \dot{\gamma}(t), N(\gamma(t)) \rangle = 0$. Differenziert man, so folgt die Behauptung

$$\underbrace{\langle \ddot{\gamma}(0), N(\gamma(0)) \rangle}_{\kappa_n} + \langle \dot{\gamma}(0), dN(\dot{\gamma}) \rangle = 0$$

- **Bemerkung:** Die Normalenkrümmung einer nach Bogenlänge parametrisierten Kurve in S hängt gar nicht von der Kurve, sondern nur vom Tangentialvektor, ab. Insbesondere stimmt die Normalenkrümmung in Richtung v , $|v| = 1$ überein mit der Krümmung derjenigen Kurve in p , die man als Schnitt von S mit der affinen Ebene durch p erhält, die von N und v aufgespannt wird (daher der Name Normalenkrümmung).

- **Beispiel 1:** Sei S^2 und betrachte den Schnitt von S^2 mit einer Ebene E durch den Ursprung. Der Schnitt $E \cap S^2$ ist ein Kreis mit Radius 1, die Krümmung dieser Kurve ist überall ± 1 (je nachdem wie die Orientierung der Ebene/Kurve gewählt wird).

In der Definition der Krümmung einer nach Bogenlänge parametrisierten Kurve in \mathbb{R}^2 verwendet man eine Isometrie J von \mathbb{R}^2 . Natürlich ist E isometrisch zu \mathbb{R}^2 , aber die Wahl dieser Isometrie ist nicht klar.

- **Beispiel 2:** Wir betrachten den Zylinder $S = \{x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ und den Schnitt des Zylinders mit einer Ebene durch den Punkt $p = (1, 0, 0)$ die den Tangentialvektor $(0, 1, 0) \in T_p S$ enthält. Der Betrag der Krümmung der Kurve $E \cap S$ in p wird immer größer, je kleiner der Winkel zwischen der Ebene und der z -Achse ist. Dies wird ausgeglichen durch die Multiplikation mit $\cos(\angle(N, \ddot{\gamma}(0)))$ (der Winkel $\angle(N, \ddot{\gamma}(0))$ ist dann nahe bei $\pi/2$).

16. VORLESUNG AM 26.6.

- **Bemerkung + Terminologie:** Die zweite Fundamentalform II_p ist eine *quadratische Form*. Die zugehörige Bilinearform ist symmetrisch, die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander und die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind alle reell. Die Abbildung

$$II_p : \{v \in T_p S \mid |v| = 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$v \longmapsto II_p(v, v)$$

nimmt ihr Minimum und ihr Maximum an, jeweils in $w, -w$. Wenn e_1, e_2 eine orthonormale Eigenbasis von II_p (bzw. dN_p) zu den Eigenwerten k_1, k_2 (bzw. $-k_1, -k_2$) ist und $v = \cos(\vartheta)e_1 + \sin(\vartheta)e_2$, so gilt

$$II_p(v, v) = k_1 \cos^2(\vartheta) + k_2 \sin^2(\vartheta).$$

Die Eigenwerte k_1, k_2 sind die *Hauptkrümmung*. Die Eigenvektoren dazu spannen die *Hauptkrümmungsrichtungen* auf.

- **Definition:** Sei $p \in S$ und $dN_p : T_p S \longrightarrow T_p S \simeq T_{N(p)} S^2$ das Differential der Gauß-Abbildung. Dann ist

$$K = \det(dN_p) = k_1 k_2 \text{ die Gauß-Krümmung}$$

$$H = -\text{tr}(dN_p) = \frac{k_1 + k_2}{2} \text{ die mittlere Krümmung.}$$

p ist *elliptisch*, wenn $\det(dN_p) > 0$, *hyperbolisch*, wenn $\det(dN_p) < 0$, *parabolisch*, wenn $\det(dN_p) = 0$ und $dN_p \neq 0$, und ein Flachpunkt wenn $dN_p = 0$.

- **Orientierungsverhalten:** Die Gauß-Krümmung ist invariant unter Orientierungsänderung. Die mittlere Krümmung ändert ihr Vorzeichen wenn man die Orientierung umkehrt.
- **Beispiele:** S. 37 Beispiel 1, alle Punkte sind parabolisch, Beispiel 2: alle sind flach, Beispiel 3 alle elliptisch, Beispiel 4, p ist hyperbolisch.
- **Proposition:** Wenn $p \in S$ elliptisch ist, so gibt es eine Umgebung $(V \cap S)$ von $p \in S$ die ganz auf einer Seite von $T_p S$ (als affine Ebene durch p in \mathbb{R}^3) liegt. Wenn p hyperbolisch ist, so enthält jede Umgebung von p in S Punkte die auf verschiedenen Seiten von $T_p S$ liegen.
- **Beweis:** Dies folgt unmittelbar aus der Interpretation der Krümmung von Kurven in der Ebene und unserer Interpretation von II_p als Normalenkrümmung (s. die Charakterisierung konvexer Kurven auf S. 15 und die Diskussion davor).

- **Definition:** Sei S regulär und $p \in S$. Dann ist p ein *Nabelpunkt*, falls $k_1 = k_2$ in p . Insbesondere ist p entweder flach oder elliptisch.
- **Bemerkung:** Der folgende Satz zeigt, dass Krümmungseigenschaften von S die Fläche manchmal ziemlich starr festlegen.
- **Satz:** Sei S eine zusammenhängende Fläche mit Normalenvektorfeld N , so dass jeder Punkt ein Nabelpunkt ist. Dann ist S Teilmenge einer Ebene oder einer Kugel.
- **Bemerkung:** Wir verlangen hier nicht, dass S orientiert ist obwohl man das für die Definition der Gauß-Abbildung braucht die Nabelpunkte charakterisiert. Die Eigenschaft eines Punktes ein Nabelpunkt von S zu sein ist unabhängig von der Wahl der Orientierung und auch von der Orientierbarkeit der Fläche. Man benötigt nur eine Orientierung auf einer kleinen Umgebung des Punktes. Lokale Orientierungen kann man zum Beispiel mit Hilfe von lokalen Parametrisierungen konstruieren.
- **Beweis:**

1. Für alle $w \in T_q S$ und jedes Normalenfeld auf einer Umgebung von q gilt $dN_q(w) = \lambda(q)w$ wobei $\lambda : S \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion ist. Wir wollen zeigen, dass λ konstant ist. Dazu sei $p \in S$ und $\varphi : U \rightarrow (S \cap V)$ eine lokale Parametrisierung um p mit wegzusammenhängendem Urbildraum U . Dann ist $w = a_1 X_u + a_2 X_v$ für $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ und $N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}$ ist ein Normalenvektorfeld welches auf einer Umgebung von p definiert ist. Die obige Gleichung $dN_q(w) = \lambda(q)w$ liefert

$$dN(w) = a_1 N_u + a_2 N_v = \lambda(q) \cdot (a_1 X_u + a_2 X_v).$$

Weil a_1, a_2 beliebig gewählt werden können folgt

$$\begin{aligned} N_u &= \lambda(q) X_u \\ N_v &= \lambda(q) X_v. \end{aligned}$$

Man schreibt beide Gleichungen mit Hilfe von φ in Koordinaten und differenziert die erste Gleichung nach v und die zweite nach u (wir schreiben $\lambda \circ \varphi_u = \frac{\partial(\lambda \circ \varphi)}{\partial u}$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 N}{\partial u \partial v}(u, v) &= (\lambda \circ \varphi)_v X_u + \lambda \circ \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 N}{\partial u \partial v} &= (\lambda \circ \varphi)_u X_v + \lambda \circ \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \end{aligned}$$

und es folgt $\lambda_v X_u - \lambda_u X_v = 0$. Weil X_u und X_v linear unabhängig sind hat man $\lambda_u = \lambda_v = 0$. Also ist $\lambda|_U$ konstant.

2. Wir beweisen, dass jeder Punkt von S eine Umgebung hat, die die Aussage des Satzes erfüllt. Man unterscheidet zwei Fälle, $\lambda_0 = 0$ und $\lambda_0 \neq 0$.
 - 2.1 $\lambda_0 = 0$: Dann ist $N = N_0$ konstant ($dN|_U \equiv 0$). Also ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \langle \varphi(u, v), N \rangle &= \langle X_u, N_0 \rangle = 0 \\ \frac{\partial}{\partial v} \langle \varphi(u, v), N \rangle &= \langle X_v, N_0 \rangle = 0 \end{aligned}$$

weil N ein Normalenfeld ist. Daher ist $\langle \varphi(u, v), N_0 \rangle = n_0$ konstant, also liegt das Bild von φ ganz in der Ebene $\langle a, N_0 \rangle = n_0$.

2.2 $\lambda_0 \neq 0$: Jede Hauptkrümmung ist λ_0 , der Schnitt von S mit einer Ebene durch p die $N(p)$ enthält ist also die Vereinigung von Kreisbogensegmenten, sodass die Krümmung jedes Segments Absolutbetrag $|\lambda_0|$ hat. Der Radius des Kreissegmentes durch p ist also λ_0^{-1} . Die Sphäre, die $\varphi(U)$ enthalten sollte muß also den Radius λ_0^{-1} haben und auf der Geraden in Richtung $N(p)$ durch p liegen. Man rechnet nun nach

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left(\varphi(u, v) - \frac{1}{\lambda_0} N(u, v) \right) &= X_u - \frac{1}{\lambda_0} \frac{\partial N}{\partial u} \\ &= X_u - \frac{dN_{\varphi(u,v)} X_u}{\lambda_0} \\ &= X_u - \frac{\lambda_0 X_u}{\lambda_0} = 0. \end{aligned}$$

Man beachte hier dass $(\lambda_0)^{-1}N$ unabhängig von der Wahl von N bzw. φ ist. (Wenn N durch $-N$ ersetzt, so ersetzt man λ_0 durch $-\lambda_0$.) Der Ausdruck auf der linken Seite ist unabhängig von der Wahl von φ .

3. Man muß nun noch zeigen, dass die ebene/spärische Umgebung eines Punktes p nicht vom Punkt p abhängt. Dies ist ein einfaches Zusammenhangsargument. Sei $p, p' \in S$ und $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$ ein Weg der die beiden Punkte verbindet. Dann gibt es eine Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ sodass $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ ganz in einer sphärischen/ebenen Umgebung liegt. Dann stimmen zwei aufeinanderfolgende solche Umgebungen auf einer offenen Umgebung eines t_i überein, die zugehörigen Sphären/Ebenen sind also gleich.

- **Bemerkung:** Insbesondere ist S orientierbar als Teilmenge einer orientierbaren Fläche. Alle Vorsichtsmaßnahmen (lokale Definition von N) waren unnötig.

17. VORLESUNG AM 27.6

- **Literatur:** Abschnitt 3.2 von [dCa]
- **Ziel:** Beschreibung von dN_p durch die erste und zweite Fundamentalform in Koordinaten.
- Sei S eine orientierte Fläche mit Normalenfeld N und φ eine lokale Parametrisierung von S die mit der Orientierung von S verträglich ist, d.h.

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right|} = N$$

Sei $\gamma = (u, v)$ eine Kurve die den Tangentialvektor $\dot{\gamma}(0)$ repräsentiert. Dann gilt

$$dN(\dot{\gamma}(0)) = \frac{\partial N}{\partial v} \dot{v}(0) + \frac{\partial N}{\partial u} \dot{u}(0).$$

Weil $\frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial N}{\partial v} \in T_p S$ gibt es $a_{ij}, i, j \in \{1, 2\}$ so dass

$$(25) \quad \begin{aligned} N_u &= \frac{\partial N}{\partial u} = a_{11} X_u + a_{21} X_v \\ N_v &= \frac{\partial N}{\partial v} = a_{12} X_u + a_{22} X_v. \end{aligned}$$

Dann hat man

$$dN \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix}$$

Wenn X_u, X_v eine Orthonormalbasis ist, so ist die darstellende Matrix von dN symmetrisch. Für die quadratische Form/Bilinearform II_p setzt man

$$\begin{aligned} II_p(\dot{\alpha}) &= -\langle dN(\dot{\gamma}), \dot{\gamma} \rangle \\ &= -\langle N_u \dot{u} + N_v \dot{v}, X_u \dot{u} + X_v \dot{v} \rangle \\ &= \dot{u}^2 \cdot e + \dot{u} \dot{v} \cdot 2f + \dot{v}^2 \cdot g. \end{aligned}$$

Man differenziert $\langle N, X_u \rangle = \langle N, X_v \rangle = 0$ und findet

$$\begin{aligned} (26) \quad e &= -\langle N_u, X_u \rangle = \left\langle N, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 u} \right\rangle \\ f &= -\langle N_v, X_u \rangle = -\langle N_u, X_v \rangle = \left\langle N, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \right\rangle \\ g &= -\langle N_v, X_v \rangle = \left\langle N, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 v} \right\rangle \end{aligned}$$

Um die Koeffizienten a_{ij} zu finden, setzt man die Definition in die erste Darstellung in den letzten Gleichungen ein und verwendet die Koeffizienten E, F, G von der ersten Fundamentalform:

$$\begin{aligned} -e &= \langle a_{11} X_u + a_{21} X_v, X_u \rangle = a_{11} E + a_{21} F \\ -g &= \langle a_{12} X_u + a_{22} X_v, X_v \rangle = a_{12} F + a_{22} G \\ -f &= \langle a_{12} X_u + a_{22} X_v, X_u \rangle = a_{12} E + a_{22} F \\ -f &= \langle a_{11} X_u + a_{21} X_v, X_v \rangle = a_{11} F + a_{21} G. \end{aligned}$$

Das kann man in Matrizen ausdrücken:

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Man invertiert die Matrix mit E, F, G , multipliziert von rechts und findet endlich die Koeffizienten a_{ij} :

$$(27) \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \left(\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \right)$$

(27) sind die *Weingartengleichungen*. Aus ihnen bekommt man sofort

$$(28) \quad K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Nach Definition sind $-k_1, -k_2$ (die Hauptkrümmungen bis auf das Vorzeichen) bei p die Eigenwerte von dN_p . Also sind k_1, k_2 die Lösungen von

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} + k & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} + k \end{pmatrix} = 0$$

und man findet

$$(29) \quad H = \frac{k_1 + k_2}{2} = -\frac{a_{11} + a_{22}}{2} = \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}.$$

Dies zeigt:

- **Proposition:** K, H sind glatte Funktionen auf S (weil sie in jedem Koordinatensystem glatt sind).
- **Bemerkung:** Die Hauptkrümmungen lösen die quadratische Gleichung $k^2 - 2Hk + K = 0$, also $k_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}$. Wählt man $k_1 \geq k_2$ so erhält man stetige Funktionen auf S die überall dort glatt sind, wo $H^2 \neq K$. Die Bedingung $H^2 = K$ entspricht $k_1 = k_2$. Die Funktionen k_1, k_2 sind also glatt auf

$$S \setminus \{p \in S \mid p \text{ ist ein Nabelpunkt}\}.$$

- **Theorema Egregium (Gauß):** K hängt nur von der ersten Fundamentalform ab.
- **Bemerkung:** egregium (lat.) = rühmliche Tat, Ruhm
- **Beweis:** Der Beweis ist eine stromlinienförmige und sehr elegante Rechnung ([Sp], p. 3B-24).

Wir wählen eine lokale Parametrisierung und verwenden (26),(28) (sowie das Spatprodukt). Dann gilt

$$K \cdot (EG - F^2)^2 = \underbrace{\left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}, X_u \times X_v \right\rangle}_{=\det(\varphi_{uu}, X_u, X_v)} \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}, X_u \times X_v \right\rangle - \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}, X_u \times X_v \right\rangle^2.$$

Hier kürzen wir $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} = \varphi_{uu}, \dots$ ab. (Dann sollte man vielleicht auch φ_u statt X_u schreiben, aber die Notation X_u, X_v ist schon Standard.) Wir fassen diese Vektoren als Spalten auf. Dann gilt

$$\begin{aligned} K \cdot (EG - F^2)^2 &= \det \begin{pmatrix} \varphi_{uu}^T \\ X_u^T \\ X_v^T \end{pmatrix} \det(\varphi_{vv}, X_u, X_v) - \det \begin{pmatrix} \varphi_{uv}^T \\ X_u^T \\ X_v^T \end{pmatrix} \det(\varphi_{uv}, X_u, X_v) \\ &= \det \left(\begin{pmatrix} \varphi_{uu}^T \\ X_u^T \\ X_v^T \end{pmatrix} (\varphi_{vv}, X_u, X_v) \right) - \det \left(\begin{pmatrix} \varphi_{uv}^T \\ X_u^T \\ X_v^T \end{pmatrix} (\varphi_{uv}, X_u, X_v) \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} \langle \varphi_{uu}, \varphi_{vv} \rangle & \langle \varphi_{uu}, X_u \rangle & \langle \varphi_{uu}, X_v \rangle \\ \langle X_u, \varphi_{vv} \rangle & E & F \\ \langle X_v, \varphi_{vv} \rangle & F & G \end{pmatrix} \\ &\quad - \det \begin{pmatrix} \langle \varphi_{uv}, \varphi_{uv} \rangle & \langle \varphi_{uv}, X_u \rangle & \langle \varphi_{uv}, X_v \rangle \\ \langle X_u, \varphi_{uv} \rangle & E & F \\ \langle X_v, \varphi_{uv} \rangle & F & G \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir verwenden nun (20) (Definition von E, F, G) und differenzieren diese Gleichungen nach u, v . Man erhält

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u} &= \frac{1}{2} E_u = \langle \varphi_{uu}, X_u \rangle & \frac{1}{2} E_v &= \langle \varphi_{uv}, X_u \rangle \\ \frac{1}{2} G_v &= \langle \varphi_{vv}, X_v \rangle & \frac{1}{2} G_u &= \langle \varphi_{uv}, X_v \rangle \\ F_u - \frac{1}{2} E_v &= \langle \varphi_{uu}, X_v \rangle & F_v - \frac{1}{2} G_u &= \langle \varphi_{vv}, X_u \rangle. \end{aligned}$$

Der einzige Teil des obigen Ausdrucks für $K(EG - F^2)^2$, der nicht offensichtlich nur von E, F, G und Ableitung davon abhängt, ist also

$$(\langle \varphi_{uu}, \varphi_{vv} \rangle - \langle \varphi_{uv}, \varphi_{uv} \rangle)(EG - F^2).$$

Man differenziert $\frac{1}{2}G_u = \langle \varphi_{uv}, X_v \rangle$ nach u und findet

$$\frac{1}{2}G_{uu} = \langle \varphi_{uuv}, X_v \rangle + \langle \varphi_{uv}, \varphi_{uv} \rangle.$$

Man differenziert $F_u - \frac{1}{2}E_v = \langle \varphi_{uu}, X_v \rangle$ nach v und findet

$$F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv} = \langle \varphi_{uuv}, X_v \rangle + \langle \varphi_{vv}, \varphi_{uu} \rangle.$$

Die Differenz beider Gleichungen zeigt, dass auch

$$(30) \quad \langle \varphi_{vv}, \varphi_{uu} \rangle - \langle \varphi_{uv}, \varphi_{uv} \rangle = -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu}$$

nur von E, F, G und Ableitungen davon abhängt.

- **Bemerkung:** Der obige Beweis liefert eine Formel für K in Koordinaten die nur E, F, G und Ableitungen davon enthält. Aus Zeit- und Platzgründen schreibe ich diese Formel jetzt nicht aus.

18. VORLESUNG AM 3.7.

- **Literatur:** Abschnitte 4.2 von [dCa] (nach dem Beispiel)
- **Beispiel (Krümmung von Rotationsflächen):** Sei $\gamma : I \rightarrow \{x > 0, y = 0\}$ nach Bogenlänge parametrisiert so dass die Abbildung γ ein Homöomorphismus auf sein Bild. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times I &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, t) &\mapsto (x(s) \cos(t), x(s) \sin(t), z(s)). \end{aligned}$$

ist eine parametrisierte Fläche, ihr Bild ist eine reguläre Fläche S . Einschränkungen dieser Abbildung auf $J \times I$ mit $J = (a, b), b - a \leq 2\pi$, liefern lokale Parametrisierungen der Fläche. Die erste Fundamentalform hat die Koeffizienten

$$E = \dot{x}^2 + \dot{z}^2 = 1 \qquad F = 0 \qquad G = x^2$$

Die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform sind

$$\begin{aligned} e &= \frac{(\varphi_{ss}, X_s, X_t)}{\sqrt{EG - F^2}} = x \frac{\dot{x}\ddot{z} - \ddot{x}\dot{z}}{x} = \dot{x}\ddot{z} - \ddot{x}\dot{z} \\ f &= \frac{(\varphi_{st}, X_s, X_t)}{\sqrt{EG - F^2}} = 0 \\ g &= \frac{(\varphi_{tt}, X_s, X_t)}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\dot{z}}{x} \end{aligned}$$

Die Gauß-Krümmung ist

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\dot{z}(\ddot{z}\dot{x} - \dot{z}\ddot{x})}{x}.$$

Die parabolischen Punkte von S sind die Punkte wo γ nicht gekrümmt ist und die Punkte, wo die Tangente an γ senkrecht zur Rotationsachse ist. Wenn beides gilt verschwindet II und hat man einen Flachpunkt. Aus $\dot{x}^2 + \dot{z}^2 = 1$ folgt durch Differenzieren, dass $\dot{x}\ddot{x} = -\dot{z}\ddot{z}$. Setzt man dies in K ein, so erhält man

$$K = -\frac{\ddot{x}}{x}$$

- **Definition:** Seien S, S' reguläre Flächen und $f : S \rightarrow S'$ ein Diffeomorphismus. Dann ist f eine *Isometrie*, falls für alle $p \in S$ und $v, w \in T_p S$

$$\langle v, w \rangle = I_p(v, w) = I_{f(p)}(df_p(v), df_p(w)) = \langle df_p(v), df_p(w) \rangle.$$

- **Definition:** Seien S, S' reguläre Flächen und $f : S \rightarrow S'$ eine glatte Abbildung so dass jedes $p \in S$ eine Umgebung V hat, sodass $f|_V$ eine Isometrie auf sein Bild ist. (Insbesondere ist $f|_V$ ein Diffeomorphismus auf sein Bild.) Dann ist f eine *lokale Isometrie*.
- **Bemerkung:** Wenn f ein (globaler) Diffeomorphismus ist und eine lokale Isometrie, so ist f eine Isometrie.
- **Beispiel:** Sei $S = \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ (mit den Koordinaten (u, v, w)) die u, v -Ebene und $S' = \{x^2 + y^2 = 1\}$ der Zylinder. Dann ist die Abbildung

$$f : S \rightarrow S'$$

$$(u, v, 0) \mapsto (\cos(u), \sin(u), v)$$

eine lokale Isometrie: df hat immer Rang 2, also ist f ein lokaler Diffeomorphismus. Weiter gilt

$$df_{(u,v,0)}((1, 0, 0)) = (-\sin(u), \cos(u), 0) \text{ und } df_{(u,v,0)}((0, 1, 0)) = (0, 0, 1)$$

Weil $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ eine Basis von $T_{(u,v,0)}S$ ist, gilt

$$I_{(u,v,0)}(X, Y) = I'_{(\cos(u), \sin(u), 0)}(df_{(u,v,0)}(X), df_{(u,v,0)}(Y))$$

für alle $X, Y \in T_{(u,v,0)}S$, wie man leicht prüft gilt diese Gleichung nämlich auf der Basis.

Offenbar ist f nicht injektiv, also kein Diffeomorphismus, insbesondere auch keine Isometrie.

Übrigens gibt es keinen Diffeomorphismus zwischen \mathbb{R}^2 und dem Zylinder. Der Zylinder zerfällt nach Entfernung des Kreises $\{z = 0\}$ in zwei nicht kompakte Teile. Der Jordansche Kurvensatz sagt, dass dies bei \mathbb{R}^2 für keinen eingebetteten Kreis vorkommt.

- **Definition:** Zwei Flächen S, S' sind *isometrisch*, falls es eine Isometrie zwischen ihnen gibt. Zwei Flächen sind *lokal isometrisch* falls für jeden Punkt in $p \in S$ ein Punkt q in S' existiert so dass Umgebungen dieser Punkte isometrisch sind und umgekehrt.
- **Bemerkung:** Dies definiert zwei Äquivalenzrelationen auf Flächen.
- **Proposition:** Seien

$$\varphi : U \rightarrow (V \cap S)$$

$$\varphi' : U \rightarrow (V' \cap S')$$

lokale Parametrisierungen von S bzw. S' , sodass für die Koeffizienten der ersten Fundamentalformen $E = E', F = F', G = G'$ gilt, so ist $f = \varphi' \circ \varphi^{-1}$ eine Isometrie zwischen $\varphi(U)$ und $\varphi'(U)$.

- **Beweis:** Sei $p \in \varphi(U)$ und $v \in T_p S$. Dann gilt $X = a_1 X_u + a_2 X_v$ und wegen $f = \varphi' \circ \varphi$ und Linearität $df_p(X) = a_1 X'_u + a_2 X'_v$. Insgesamt also

$$\begin{aligned} I'_{f(p)}(df_p(X), df_p(X)) &= a_1^2 I'_{f(p)}(X'_u, X'_u) + a_2^2 I'_{f(p)}(X'_v, X'_v) + 2a_1 a_2 I'_{f(p)}(X'_u, X'_v) \\ &= a_1^2 E'(\varphi'^{-1}(f(p))) + a_2^2 G'(\varphi'^{-1}(f(p))) + 2a_1 a_2 F'(\varphi'^{-1}(f(p))) \\ &= a_1^2 E(\varphi^{-1}(p)) + a_2^2 G(\varphi^{-1}(p)) + 2a_1 a_2 F(\varphi^{-1}(p)) \\ &= I_p(X, X). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun durch Polarisierung.

- **Beispiel:** Die parametrisierte Fläche

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (\cosh(v) \cos(u), \cosh(v) \sin(u), v)\end{aligned}$$

hat als Bild eine reguläre Fläche S (Katenoid, Kettenfläche). Lokale Parametrisierungen erhält man durch Einschränkung von φ . Für die Koeffizienten der ersten Fundamentalform in diesen lokalen Koordinaten gilt

$$E(u, v) = (\cosh(v))^2 \quad F(u, v) = 0 \quad G(u, v) = (\sinh(v))^2 + 1.$$

Eine andere reguläre Fläche, das Helikoid, S' wird durch

$$\begin{aligned}\varphi' : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u', v') &\longmapsto (v' \cos(u'), v' \sin(u'), u')\end{aligned}$$

parametrisiert. Wir transformieren die Koordinaten (u', v') durch

$$\begin{aligned}\psi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\longmapsto (u, \sinh(v)).\end{aligned}$$

Dann ist $\varphi' \circ \psi$ auch eine (lokale) Parametrisierung von S' . Die Koeffizienten der ersten Fundamentalform von S' in den Koordinaten (u, v) sind

$$E'(u, v) = (\cosh(v))^2 \quad F'(u, v) = 0 \quad G'(u, v) = (\cosh(v))^2 = (\sinh(v))^2 + 1.$$

Dies zeigt, dass das Katenoid und das Helikoid lokal isometrisch sind.

- **Bemerkung:** Das Theorema Egregium sagt gerade, dass die Krümmung invariant unter Isometrien ist, d.h. falls $f : S \rightarrow S'$ eine lokale Isometrie ist, so gilt $K'(f(p)) = K(p)$. Insbesondere kann S nur dann lokal isometrisch zu einer Ebene sein, wenn $K \equiv 0$ ist.
- **Bemerkung:** Der folgende Begriff wird von uns nicht wirklich verwendet werden, seine Bedeutung rechtfertigt aber seine Erwähnung.
- **Definition:** Sei $f : S \rightarrow S'$ eine Diffeomorphismus. Dann ist f *konform*, falls

$$I'_{f(p)}(df_p(X), df_p(Y)) = \lambda^2(p)I_p(X, Y)$$

für alle $p \in S$ und $X, Y \in T_p$ und eine differenzierbare Funktion λ ohne Nullstellen gilt, f ist also winkelerhaltend. Zwei Flächen S, S' sind lokal konform äquivalent, falls jeder Punkt von S eine Umgebung hat die zu einer offenen Teilmenge von S' konform ist, und umgekehrt.

- **Bemerkung:** Eine konforme Abbildung ist also ein lokaler Diffeomorphismus weil das Differential injektiv ist (wegen $\lambda \neq 0$). Eine konforme Abbildung erhält also nicht die Längen von Tangentialvektoren, aber wenigstens erhält es die Winkel zwischen ihnen. Das folgende Beispiel zeigt, dass konforme Abbildungen nicht so selten sind wie Isometrien. (Isometrien sind natürlich auch konform.)
- **Beispiel:** Sei $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ eine holomorphe Abbildung, d.h. f ist stetig differenzierbar und erfüllt die Cauchy-Riemann Gleichungen

$$\frac{\partial \Re(f)}{\partial u} = \frac{\partial \Im(f)}{\partial v} \quad \frac{\partial \Re(f)}{\partial v} = -\frac{\partial \Im(f)}{\partial u}$$

Dann gilt für das Euklidische Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf \mathbb{C} , die Jacobi Matrix von f , und für $X = a\partial u + b\partial v$

$$\begin{aligned} \langle df_p(X), df_p(X) \rangle &= \left\langle \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial \Re(f)}{\partial u} & \frac{\partial \Re(f)}{\partial v} \\ \frac{\partial \Im(f)}{\partial u} & \frac{\partial \Im(f)}{\partial v} \end{array} \right) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial \Re(f)}{\partial u} & \frac{\partial \Re(f)}{\partial v} \\ \frac{\partial \Im(f)}{\partial u} & \frac{\partial \Im(f)}{\partial v} \end{array} \right) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left(a \frac{\partial \Re(f)}{\partial u} + b \frac{\partial \Re(f)}{\partial v} \right)^2 + \left(a \frac{\partial \Im(f)}{\partial u} + b \frac{\partial \Im(f)}{\partial v} \right)^2 \\ &= \left(a \frac{\partial \Re(f)}{\partial u} + b \frac{\partial \Re(f)}{\partial v} \right)^2 + \left(-a \frac{\partial \Re(f)}{\partial v} + b \frac{\partial \Re(f)}{\partial u} \right)^2 \\ &= (a^2 + b^2) \left(\left(\frac{\partial \Re(f)}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Re(f)}{\partial v} \right)^2 \right) \\ &= \left(\left(\frac{\partial \Re(f)}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Re(f)}{\partial v} \right)^2 \right) \langle X, X \rangle. \end{aligned}$$

Die allgemeine Gleichung folgt wieder durch Polarisierung. Holomorphe Abbildungen sind also lokal konform dort wo

$$\left(\frac{\partial \Re(f)}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Re(f)}{\partial v} \right)^2 = \left(\frac{\partial \Im(f)}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Im(f)}{\partial v} \right)^2 \neq 0.$$

Wie Sie vielleicht aus einer Vorlesung über Funktionentheorie wissen, ist f nicht nur stetig differenzierbar sondern glatt (und sogar analytisch) sobald f holomorph ist (die Cauchy-Riemann Gleichungen erfüllt). Insbesondere ist λ auch glatt.

- **Satz:** Jede reguläre Fläche ist lokal konform äquivalent zu \mathbb{R}^2 .
- **Bemerkung:** Der Beweis dieses Satzes geht weit über diese Vorlesung hinaus. Man konstruiert im Beweis lokale Koordinatensysteme auf der Fläche, so dass die Koeffizienten der ersten Fundamentalform die Gestalt $E = \lambda^2 = G$ und $F = 0$ haben. Solche Koordinaten heißen *isotherm*.

19. VORLESUNG AM 4.7.

- **Literatur:** [dCa], Abschnitt 4.6, Abschnitt 3.4.
- Wir haben im Beweis des Theorema Egregium gesehen, dass man einen expliziten Ausdruck für die Gaußkrümmung aus den Koeffizienten der ersten Fundamentalform finden kann. Hier ist er:

$$\begin{aligned} 4(EG - F^2)^2 K &= E \left(\frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial G}{\partial v} - 2 \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial v} + \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial u} \right) \\ &+ F \left(\frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial v} - \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial G}{\partial u} - 2 \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial v} + 4 \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial v} - 2 \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial u} \right) \\ &+ G \left(\frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial u} - 2 \frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial E}{\partial v} \right) \\ &- 2(EG - F^2) \left(\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \right) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist unhandlich (17 Summanden) und wir wollen spezielle Koordinaten verwenden in denen er sich stark vereinfacht. Wenn $F \equiv 0$ wäre,

dann (mit nur noch 6 Summanden)

$$(31) \quad 4E^2G^2 \cdot K = E \left(\frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial G}{\partial v} + \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial u} \right) + G \left(\frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial u} + \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial E}{\partial v} \right) - 2EG \left(\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \right).$$

- **Lemma:** In einer orthogonalen Parametrisierung gilt

$$(32) \quad K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial E}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial G}{\partial u} \right) \right).$$

- **Beweis:** Der Beweis ist eine direkte Rechnung die man am besten bei der Behauptung (32) beginnt und umformt bis man bei (31) findet.
- **Bemerkung:** Der Vorteil von (32) gegenüber (31) ist, dass die rechte Seite von (32) (bis auf den Faktor $EG^{-1/2}$) die Divergenz eines Vektorfelds ist.
- Um zu zeigen, dass es um jeden Punkt einer regulären Fläche eine orthogonale Parametrisierung gibt verwendet man Vektorfelder und Lösungen der zugehörigen Differentialgleichung. Ein paar Erinnerungen und Definitionen werden gebraucht.
- **Definition:** Ein *glattes Vektorfeld* X auf einer regulären Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ ist eine C^∞ -Abbildung

$$X : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

sodass $X(p) \in T_p S$. Sei $p \in S$ gegeben. Ein Vektorfeld X definiert ein Anfangswertproblem

$$(33) \quad \begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= X(\gamma(t)) \\ \gamma(0) &= p \end{aligned}$$

wobei $\gamma : I \longrightarrow S$ eine glatte Kurve ist. Eine Lösung $\gamma : I \longrightarrow S$ ist *maximal* falls für jede andere Lösung $\hat{\gamma} : J \longrightarrow S$ mit $I \subset J$ mit $\gamma(t) = \hat{\gamma}(t)$ für alle $t \in I$ auch $J \subset I$ folgt.

- **Bemerkung:** Sätze aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen übertragen sich fast wörtlich auf die betrachtete Situation wenn man eine lokale Parameterisierung $\varphi : U \longrightarrow V(\cap S)$ um p verwendet. Auf $\varphi(U)$ hat X die Form

$$d\varphi \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) = aX_u + bX_v$$

für glatte Funktionen a, b auf U . Lösungen der Differentialgleichung $\dot{f} = (a, b, 0)$ die in der u, v -Ebene beginnen bleiben dort für ihre ganze Lebensdauer. Insbesondere liefert dann eine Lösung des Anfangswertproblems $\dot{f} = (a, b, 0)$ mit $f(0) = \varphi^{-1}(p)$ eine lokale Lösung $\varphi \circ f$ unseres Originalproblems (33) in S . Wir fassen die wesentlichen Fakten zusammen.

- **Erinnerung:** Die folgenden Tatsachen kann man zum Beispiel in [WaD] nachlesen. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf hat jedes solche Anfangswertproblem eine eindeutig bestimmte, maximale Lösung. Die Lösung hängt differenzierbar vom Anfangspunkt ab. Der maximale Definitionsbereich erfüllt folgende Form einer Stetigkeitsbedingung: Sei $p \in S$ und $\gamma : I \longrightarrow S$ eine Lösung des Anfangswertproblems. Dann gibt es für jede kompakte Teilmenge $J \subset I$ mit $0 \in J$ eine Umgebung V_J von p sodass der Definitionsbereich der maximalen Lösung γ_q des Anfangswertproblems $\gamma_q(0) = q$ mit $q \in V_J$ mindestens auf J definiert ist.

Dies ermöglicht es, (lokale) Diffeomorphismen zu konstruieren indem man geeignete Vektorfelder betrachtet. Die Eindeutigkeit von Lösungen erlaubt es verschiedene, lokale Lösungen zu einer globalen Lösung zusammen zu stückeln (die globale Lösung nicht unbedingt im Bild einer gegebenen, lokalen Parametrisierung).

- **Lemma:** Sei X ein Vektorfeld auf S und $p \in S$ sodass $X(p) \neq 0$. Dann gibt es ein lokales Koordinatensystem um p , so dass $X_v(q) = X(q)$.
- **Beweis:** Sei $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ eine glatte Kurve die einen Tangentialvektor $\dot{\sigma}$ repräsentiert der zusammen mit $X(p)$ eine Basis von $T_p S$ bildet. Wenn $\varepsilon > 0$ klein genug ist, gibt es ein $\delta > 0$ sodass die Lösung des Anfangwertproblems $\gamma_s(0) = \sigma(s), \dot{\gamma}_s(t) = X(\gamma_s(t))$ für $(s, t) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\delta, \delta)$ existiert. Man definiert

$$\begin{aligned} \varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\delta, \delta) &\rightarrow S \\ (s, t) &\mapsto \gamma_s(t). \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist glatt und es gilt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(0, 0) = \dot{\sigma}(0) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, 0) = X(\gamma_0(t)) = X(p).$$

Also ist φ ein lokaler Diffeomorphismus und (fast bis auf Angabe einer Umgebung von $p \in \mathbb{R}^3$) liefert die gesuchte Parametrisierung, denn

$$\begin{aligned} X_t &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{d}{dt} \gamma_s(t) \\ &= X(\gamma_s(t)) = X(\varphi(s, t)) \in T_{\varphi(s, t)} S \end{aligned}$$

- **Proposition:** Seien V_1, V_2 Vektorfelder auf S die in $p \in S$ linear unabhängig sind. Dann gibt es eine lokale Parametrisierung von S um p sodass die Koordinatenvektorfelder X_u bzw. X_v und V_1, V_2 kollinear sind.
- **Beweis:** Auf einer Umgebung von p existiert eine glatte Funktion f_1 , die entlang von Flußlinien von V_1 konstant ist und deren Gradient in p gerade V_2 ist. Es gibt auch eine analoge Funktion f_2 . Dann ist

$$\begin{aligned} \psi : \underbrace{V \cap S}_{\text{Umgebung von } p} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ q &\mapsto (f_1(q), f_2(q)) \end{aligned}$$

Nach Annahme ist dies ein lokaler Diffeomorphismus bei p und die lokale Umkehrung liefert die gesuchte lokale Parametrisierung.

- **Korollar:** Sei S eine reguläre Fläche und $p \in S$. Dann gibt es eine lokale Parametrisierung um p sodass X_u und X_v senkrecht auf einander stehen.

Der Koeffizient F der ersten Fundamentalform ist in diesen Koordinaten also $F \equiv 0$.

- **Terminologie:** Eine lokale Parametrisierung von S in der $F \equiv 0$ gilt heißt *orthogonal*.

20. VORLESUNG AM 10.7.

- **Literatur:** [dCa] §4.3 (ohne Verträglichkeitsbedingungen und daher ohne Satz von Bonnet), §4.4,
- **Motivation:** Wir betrachten eine Teilmenge S von \mathbb{R}^3 , die keine reguläre Fläche ist, sondern

1. S ist die Vereinigung von endlich vielen flachen, abgeschlossenen Dreiecken mit geraden Kanten, und
2. jede Kante ist der Schnitt von genau zwei Dreiecken,
3. jeder Punkt liegt im Inneren höchstens eines Dreiecks, oder auf einer gemeinsamen Kante von zwei Dreiecken oder er ist ein Eckpunkt wo mehrere Dreiecke zusammen treffen,
4. jeder Punkt p in S hat eine Umgebung V , so dass $S \cap V$ homöomorph zu einer offenen Teilmenge in \mathbb{R}^2 ist.

Ein solches Objekt ist eine stückweise flache Fläche, Tangentialräume gibt es im Inneren der Dreiecke aber im Allgemeinen nicht an Kanten und Ecken.

Wir wollen nun den Krümmungsbegriff übertragen. Klar ist, dass es die GaußAbbildung nicht stetig ist, sie eignet sich also nicht besonders. Die Krümmung einer Fläche verschwindet dort, wo S lokal isometrisch zu einer Ebene ist (im Sinne, dass Isometrien die Länge von rektifizierbaren Wegen, die ganz in S in der Umgebung eines Punktes verlaufen, erhalten).

Insbesondere sollte die Krümmung bei allen Punkten die im Inneren von Dreiecken liegen verschwinden. Ebenso an allen Punkten die auf Kanten liegen, aber nicht Eckpunkte sind (aufklappen). Sei nun p eine Ecke. Wir definieren die Krümmung bei p als

$$K(p) = 2\pi - \sum_i \alpha_i(p),$$

wobei α_i der Innenwinkel eines der Dreiecke ist, die eine Ecke in p haben (an dieser Ecke). Insbesondere, wenn $K(p) = 0$, so ist die Innenwinkelsumme an der Ecke genau 2π . Dies ist eine notwendige Bedingung dafür, dass S bei p lokal isometrisch zu einer offenen Teilmenge der Ebene ist. (Die Bedingung ist auch hinreichend). Wir bezeichnen die Zahl der Dreiecke mit F , die Zahl der Kanten mit K und die Zahl der Ecken mit E . Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{p \text{ Ecke von } S} K(p) &= 2\pi \cdot E - \sum_{i, \text{ alle Winkel}} \alpha_i \\ &= 2\pi \cdot E - \pi \cdot F \\ &= 2\pi \cdot E + 2\pi \cdot F - 2\pi K \\ &= 2\pi(E - K + F) \\ &= 2\pi\chi(S). \end{aligned}$$

Zu Beginn der Rechnung verwendet man, dass die Innenwinkelsumme im Dreieck genau π ist. Im vorletzten Schritt haben wir $3F = 2K$ benutzt (jedes Dreieck hat drei Kanten, an jede Kante stoßen zwei Dreiecke an einander). Der letzte Schritt enthält die Definition der Eulercharakteristik des endlichen simplizialen Komplexes S . Implizit wird hier behauptet, dass $\chi(S)$ nur von S (bis auf Homöomorphie), nicht aber von der kombinatorischen Struktur abhängt. Dies haben wir (noch) nicht bewiesen, stimmt aber trotzdem.

Der Vorteil der Darstellung $E - K + F = \chi(S)$ ist, dass diese Formel auch dann gilt, wenn nicht alle Flächen Dreiecke sind, sondern man auch Polygone mit $n \geq 3$ Ecken zulässt.

- **Bemerkung:** Wir kehren zurück zum Studium der inneren Geometrie von regulären Flächen. Dazu erinnern wir an das Theoreme Egregium und die

Weingarten-Gleichungen die die Koeffizienten a_{ij} in (25) in Termen der ersten und zweiten Fundamentalform beschreiben.

- **Definition:** Sei $\varphi : U \rightarrow (V \cap S)$ ein lokales Koordinatensystem auf S . Dann definiert man die *Christoffel-Symbole* $\Gamma_{ij}^k, i, j, k \in \{1, 2\}$ durch

$$(34) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 u} &= \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L_1 N \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} &= \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + L_2 N \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial u} &= \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + \bar{L}_2 N \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 v} &= \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + L_3 N. \end{aligned}$$

Die geometrische Bedeutung der Christoffel-Symbole ist nicht klar. Ein Grund dafür ist ihr kompliziertes Transformationsverhalten unter Koordinatenwechseln. Wir werden vielleicht noch folgende Tatsache beweisen (vielleicht auch nicht...): Sei $p \in S$. Dann gibt es ein lokales Koordinatensystem um p , so dass $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$ für alle i, j, k .

- **Eigenschaften:** Nach Skalarmultiplikation mit N erhält man die Relationen $L_1 = e, L_2 = f = \bar{L}_2, L_3 = g$. Offenbar gilt wegen $X_{uv} = X_{vu}$ auch $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Bildet man die inneren Produkte der ersten Gleichung mit X_u, X_v , so folgt

$$(35) \quad \begin{aligned} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F &= \langle \varphi_{uu}, X_u \rangle = \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G &= \langle \varphi_{uu}, X_v \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v. \end{aligned}$$

Die Relationen auf der rechten Seite kennen wir aus dem Beweis des Gaußschen Satzes. Weil $EG - F^2 > 0$ (das ist eine Konsequenz aus der Cauchy-Schwarz Ungleichung) ist dieses lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar. Die Christoffel-Symbole $\Gamma_{11}^1, \Gamma_{11}^2$ hängen also nur von der ersten Fundamentalform ab. Analoges gilt für die anderen Christoffel-Symbole: Aus der zweiten und der vierten Gleichung in (34) folgt nach Skalarmultiplikation mit X_u, X_v :

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F &= \langle \varphi_{uv}, X_u \rangle = \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G &= \langle \varphi_{uv}, X_v \rangle = \frac{1}{2} G_u \\ \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F &= \langle \varphi_{vv}, X_u \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_v \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G &= \langle \varphi_{vv}, X_v \rangle = G_v. \end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungspaare liefern die übrigen Christoffelsymbole.

- **Definition:** Sei S eine reguläre Fläche und X ein Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge V von S und $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ eine Kurve in V . Dann ist

$$\frac{DX}{dt}(0) = \text{pr} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} X(\gamma(t)) \right)$$

die *kovariante Ableitung von X entlang γ* wobei $\text{pr} : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_{\gamma(0)}S$ die orthogonale Projektion ist.

- **Bemerkung:** Offenbar hängt die kovariante Ableitung von X nur von $X(\alpha(t))$ auf einer Umg. von $t = 0$ ab. In einem Koordinatensystem um $\alpha(0)$ gilt mit $\alpha(t) = (u(t), v(t))$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (a(\alpha(t))X_u(\alpha(t)) + b(\alpha(t))X_v(\alpha(t))) &= (a \circ \alpha)'(0)X_u + (b \circ \alpha)'(0)X_v \\ &+ a(\alpha(0)) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \dot{u}(0) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \dot{v}(0) \right) \\ &+ b(\alpha(0)) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \dot{u}(0) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \dot{v}(0) \right) \end{aligned}$$

Es ist klar, dass man diesen Ausdruck mit Hilfe der Definition von Christoffelsymbolen und der Größen L_1, L_2, L_3 in (34) umschreiben kann. Für die Kovariante Ableitung spielen die Terme, die N enthalten keine Rolle (also auch nicht die Koeffizienten L_1, L_2, L_3). Man erhält

$$\begin{aligned} \frac{DX}{dt}(0) &= ((a \circ \alpha)'(0) + \Gamma_{11}^1 a u' + \Gamma_{12}^1 a v' + \Gamma_{21}^1 b u' + \Gamma_{22}^1 b v') X_u \\ &+ ((b \circ \alpha)'(0) + \Gamma_{11}^2 a u' + \Gamma_{12}^2 a v' + \Gamma_{21}^2 b u' + \Gamma_{22}^2 b v') X_v \end{aligned}$$

Insbesondere hängt $\frac{DX}{dt}(0)$ nur von X entlang der Kurve α , der inneren Geometrie von S und $\dot{\alpha}(0)$ ab. Dies macht die kovariante Ableitung interessant. Insbesondere kann man folgende Begriffe definieren:

- **Definition:** Ein Vektorfeld X ist parallel entlang der Kurve α falls $\frac{DX}{dt}(t) \equiv 0$.
- **Definition:** Sei α eine nach Bogenlänge parametrisierte (orientierte) Kurve in S , S sei auch orientiert und N sei das entsprechende Normalenvektorfeld. Dann ist $\text{pr}(\dot{\gamma}(t))$ ein Vielfaches von $N \times \dot{\gamma} \in T_{\gamma(t)}S$. Man definiert die geodätische Krümmung κ_g von γ durch

$$\text{pr}(\alpha''(t)) = \frac{D\dot{\gamma}}{dt} = \kappa_g N \times \dot{\gamma}(t).$$

In der Definition (24) auf S. 39 der Normalenkrümmung κ_n (bis auf das Vorzeichen die Länge der Projektion von $\dot{\gamma}$ auf den Normalenvektor). Insbesondere gilt

$$\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2$$

- **Beispiel:** Die Normalenkrümmung in $\alpha(t)$ einer nach Bogenlänge parametrisierten Kurve α in S hängt nur vom Tangentialvektor $\dot{\alpha}(t)$ und von S ab. Insbesondere ist die Normalenkrümmung einer nach Bogenlänge parametrisierten Kurve in S^2 immer 1, die Krümmung des Breitenkreises mit Breite β ist $\frac{1}{\sin(\beta)}$ (Breite des Nordpols ist 0, am Äquator $\pi/2$). Also gilt

$$\frac{1}{\sin^2(\beta)} = 1 + \kappa_g^2.$$

- **Definition:** Eine Kurve γ in S ist eine Geodäte, falls ihre geodätische Krümmung verschwindet, d.h. $\frac{D\dot{\gamma}}{dt} \equiv 0$.
- **Bemerkung:** Diese Begriffe hängen eng zusammen und sind wichtig. Wir behandeln sie leider etwas minimalistisch.

21. VORLESUNG AM 11.7.

- **Literatur:** [dCa] §4.4 und §4.5
- **Definition:** Sei V ein glattes Einheitsvektorfeld entlang einer Kurve γ in S . Dann ist die durch

$$\frac{DW}{dt} = \lambda(t)(N(\alpha(t)) \times W(\alpha(t)))$$

definierte Funktion der *algebraische Wert der kovarianten Ableitung*. Man schreibt

$$\left[\frac{DW}{dt} \right] = \lambda(t)$$

- **Lemma:** Seien V, W glatte Einheitsvektorfelder entlang einer Kurve γ in S ((lokal) orientiert). Dann gilt

$$\left[\frac{DW}{dt} \right] - \left[\frac{DV}{dt} \right] = \frac{d\varphi}{dt}$$

wobei φ stetig den Winkel zwischen W und V entlang α ist.

- **Beweis:** Man setzt $\bar{V} = N \times V, \bar{W} = N \times W$. Dann gilt

$$\begin{aligned} W &= \cos(\varphi)V + \sin(\varphi)\bar{V} \\ \bar{W} &= N \times W = \cos(\varphi)\bar{V} + \sin(\varphi)N \times (N \times \bar{V}) \\ &= \cos(\varphi)\bar{V} - \sin(\varphi)V. \end{aligned}$$

Man differenziert die erste Gleichung nach t und verwendet $V \perp \bar{V}$ und $V \perp V'$ sowie $\langle \bar{V}, V \rangle = 0$, also $\langle \bar{V}', V \rangle = -\langle \bar{V}, V' \rangle$ (differenziere nach t):

$$\begin{aligned} \left[\frac{DW}{dt} \right] &= \langle W', \bar{W} \rangle \\ &= \left\langle -\sin(\varphi)\varphi'V + \cos(\varphi)V' + \cos(\varphi)\varphi'\bar{V} + \sin(\varphi)\bar{V}', \cos(\varphi)\bar{V} - \sin(\varphi)V \right\rangle \\ &= \varphi' + \cos^2(\varphi)\langle V', \bar{V} \rangle - \sin^2(\varphi)\langle \bar{V}', V \rangle \\ &= \varphi' + \langle V', \bar{V} \rangle \\ &= \varphi' + \left[\frac{DV}{dt} \right] \end{aligned}$$

- **Proposition:** In orthogonalen Koordinaten auf einer orientierten Fläche S gilt für ein glattes Einheitsvektorfeld W entlang einer glatten Kurven $(u(t), v(t))$

$$(36) \quad \left[\frac{DW}{dt} \right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}} (G_u v' - E_v u') + \varphi'$$

wobei φ der Winkel ist, der von W und X_u eingeschlossen wird.

- **Beweis:** Wir setzen $E_1 = X_u/\sqrt{E}, E_2 = X_v/\sqrt{G}$. Nach dem Lemma gilt

$$\begin{aligned} \left[\frac{DW}{dt} \right] &= \frac{d\varphi}{dt} + \left[\frac{DE_1}{dt} \right] \\ &= \frac{d\varphi}{dt} + \left\langle \frac{dE_1}{dt}, N \times E_1 \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{dE_1}{dt}, E_2 \right\rangle \\ &= \langle (E_1)_u u' + (E_1)_v v', E_2 \rangle. \end{aligned}$$

Weil $F \equiv 0$ gilt nach der zweiten Gleichung in (35) auf S. 52 $\langle \varphi_{uu}, X_v \rangle = -E_v/2$. Also

$$\begin{aligned} \langle (E_1)_u, E_2 \rangle &= \left\langle \left(\frac{X_u}{\sqrt{E}} \right)_u, \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{EG}} \langle \varphi_{uu}, X_v \rangle + \frac{1}{\sqrt{G}} \langle X_u, X_v \rangle \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{\sqrt{E}} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{E_v}{\sqrt{EG}}. \end{aligned}$$

Analog erhält man

$$\langle (E_1)_v, E_2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{G_u}{\sqrt{EG}}.$$

- **Definition:** Sei $R \subset S$ eine abgeschlossene Teilmenge einer regulären Fläche. R ist *einfach*, falls R zu einer abgeschlossenen Scheibe homöomorph ist und der Rand von R in S ist die Vereinigung endlich vieler glatter Kurvenstücke.
- **Definition (Randorientierung):** Sei S orientiert und $R \subset S$ eine einfache Teilmenge. Dann ist die Randorientierung von R der folgende Umlaufsinn von ∂R . Eine glatte Kurve $\alpha : I \rightarrow \partial R$ mit $\alpha(0) = p$ ist positiv orientiert falls für einen Tangentialvektor $X \in T_p S \setminus T_p \partial R$, der aus R hinauszeigt $X, \dot{\alpha}(0)$ eine positive Basis von $T_p S$ ist. Hier bezeichnet $T_p \partial R$ die Menge der Tangentialvektoren in $T_p S$, die tangential an ∂R sind. Dies macht nur Sinn für glatte Punkte in ∂R .
- **Definition:** Sei S orientiert und $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ glatt. Sei $R \subset S$ ein kompaktes Gebiet das ganz von einem lokalen Koordinatensystem φ überdeckt wird, d.h. $\varphi(U) \supset R$. Wir fordern, dass φ mit der Orientierung von S verträglich ist. Dann ist

$$\int_R f dA := \int_{\varphi^{-1}(R)} f(u, v) \sqrt{EG - F^2} du dv$$

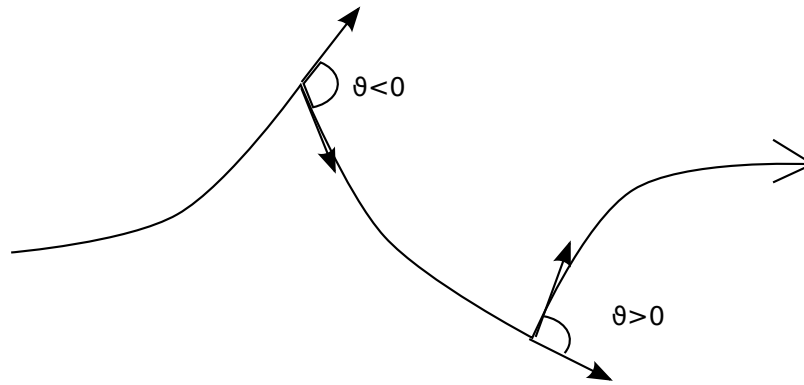
Wie im Fall des Flächeninhalts zeigt man, dass $\int_R f dA$ wohldefiniert, d.h. von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig ist.

- **Definition:** Sei $\gamma : [0, l] \rightarrow S$ eine stetige Kurve. γ ist eine *einfache, geschlossene, stückweise reguläre, parametrisierte Kurve*, falls
 1. $\gamma(0) = \gamma(l)$, ansonsten ist γ injektiv, und
 2. es gibt eine Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_k < t_{k+1} = l$, sodass $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ glatt ist.

Die Punkte $\gamma(t_i)$ sind *Ecken*. An jeder Ecke gibt es zwei glatte Kurven die aufeinandertreffen und der Winkel zwischen den ihren Tangentialvektoren an der Ecke ist der *Außenwinkel* $\vartheta \in (-\pi, \pi)$.

- **Satz von Gauß-Bonnet (lokale Version):** Sei $\varphi : U \rightarrow (V \cap S)$ ein orthogonales Koordinatensystem auf S und $R \subset (V \cap S)$ eine einfache, abgeschlossene Teilmenge sodass der Rand von R (als Teilmenge von S) das Bild einer einfachen, geschlossenen, stückweise regulären Kurve γ ist. Wir orientieren γ nach der obigen Konvention (outward normal first) und parametrisieren $\gamma : [0, l] \rightarrow S$ nach Bogenlänge. Dann gilt

$$(37) \quad \sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} \kappa_g(s) ds + \int_R K dA + \sum_{i=0}^k \vartheta_i = 2\pi.$$



22. VORLESUNG AM 17.7.

- **Literatur:** [dCa], §4.5
- **Einfache Erweiterung vom Umlaufsatz:** Sei γ eine einfache, geschlossene, stückweise reguläre, parametrisierte Kurve. Die totale Variation der Richtung des Tangentialvektors an γ ist $\pm 2\pi$ (inklusive Sprünge ϑ_i). Wie früher, ist die Richtung der Winkel φ den $\dot{\gamma}$ mit $e_1 = (1, 0)$ einschließt. Entlang differenzierbarer Stücke von γ ist klar wie man φ so definiert dass die φ glatt ist. An Sprungstellen addiert man den Winkel ϑ_i wie er eben definiert wurde und setzt die Konstruktion von φ fort.
- **Beweis:** Wir beginnen mit dem ersten Summanden und (36)

$$\sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \kappa_g(s) ds = \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\frac{1}{2\sqrt{EG}} (G_u v' - E_v u') \right) ds + \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi' ds$$

Nach dem erweiterten Umlaufsatz gilt

$$\sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi' ds = +2\pi - \sum_{i=0}^k \vartheta_i$$

Das Vorzeichen + ist Konsequenz von der Orientierung und wurde im Beweis des Umlaufsatzes (unter einer Annahme an die Orientierung der Kurve) bestimmt. Der Tangentialvektor $\dot{\gamma}$ hat in Koordinaten die Form (u', v') . Nach dem Satz von Gauß-Green (S. 180 in [Fo3], angewandt auf $J(P, Q)^T$) gilt

$$(38) \quad \int_B (Q_u - P_v) du dv = \int_{\partial B} (P, Q) \cdot \dot{\gamma} ds$$

Angewandt auf $B = \varphi^{-1}(R)$ erhält man aus dem ersten Summanden auf der rechten Seite im Beweis oben

$$\begin{aligned} \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\frac{1}{2\sqrt{EG}} (-E_v u' + G_u v') \right) ds &= \int_B -\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{-E_v}{2\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right) du dv \\ &= - \int_B K \sqrt{EG} du dv \\ &= - \int_R K dA \end{aligned}$$

wobei man (32) verwendet. Insgesamt folgt die Behauptung.

- **Bemerkung:** Keine der Größen in (37) nimmt Bezug auf Koordinaten. Im Beweis haben wir aber die Annahme gemacht, dass R im Bild eines Orthogonalen Koordinatensystems liegt. Die macht die lokale Form des Satzes wie wir sie bis jetzt formuliert haben zu einer wenig schlagkräftigen Aussage. Bevor wir uns an die globale Form des Satzes wagen (die sich von der lokalen Form eben darum unterscheidet, dass die Annahme dass R in einem orthogonalen Koordinatensystem liegt, fallen gelassen wird) trotzdem noch eine Anwendung:
- **Anwendung:** Auf S^2 betrachten wir ein Polygon P dessen Seiten Segmente von Großkreisen (also Geodäten) sind. Dann gilt

$$A(P) = 2\pi - \sum_i \vartheta_i.$$

weil P ganz im Inneren eines orthogonalen Koordinatensystems liegt (stereographische Projektion) Die Fläche des Polygons ist also durch die Summe der Innenwinkel festgelegt.

- **Definition:** Eine abgeschlossene Teilmenge R einer regulären Fläche S ist *regulär* falls der Rand ∂R von R in S eine endliche, paarweise disjunkte Vereinigung von einfachen, geschlossenen, stückweise regulären Kurven ist. Insbesondere ist S selbst regulär wenn S eine reguläre Fläche ist (dann $\partial R = \emptyset$).
- **Definition:** Sei $R \subset S$ regulär. Eine *Triangulierung* \mathfrak{T} von R ist eine Familie $(T_i)_{i \in I}$ (I ist die Indexmenge) von Teilmengen von S , so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:
 1. $\bigcup_{i \in I} T_i = R$.
 2. Für alle $i \in I$ ist T_i einfach (s. Definition auf S. 55).
 3. Der Rand ∂T_i von T_i in S ist das Bild einer stückweise glatten Kurve. Diese Kurve hat genau drei Punkte an denen sie nicht differenzierbar ist. Diese Punkte sind die *Ecken* von T_i , der Abschluss der glatten Stücke sind die *Kanten*. Die Mengen T_i sind *Dreiecke*.
 4. Falls $i \neq j$, so ist $T_i \cap T_j$ entweder leer, eine gemeinsame Kante oder eine gemeinsame Ecke.
 5. Die Zerlegung $(T_i)_{i \in I}$ ist *lokal endlich*, d.h. jeder Punkt von S hat eine Umgebung, die nur endlich viele der T_i schneidet.

Wir werden in der Regel nur kompakte, reguläre Gebiete betrachten. Dann besteht eine Triangulierung immer aus endlich vielen Dreiecken.

- **Beispiel:** Aus jedem kompakten, konvexen Polyeder mit endlich vielen Ecken kann man (nachdem man die Seitenflächen in Dreiecke zerlegt) eine Triangulierung von S^2 konstruieren, so dass alle Kanten Stücke von Großkreisen sind.
- **Satz:** Sei $(V_j)_{j \in J}$ eine offene Überdeckung einer Fläche S und C_1, \dots, C_k eine Menge paarweise disjunkter, geschlossener, glatter Kurven in S . Dann gibt es eine Triangulierung $(T_i)_{i \in I}$ von S , so dass
 - für alle $i \in I$ gibt es ein $j(i)$ so dass $T_i \subset V_{j(i)}$ und
 - jede der Kurven C_i ist eine Vereinigung von Kanten von Dreiecken der Triangulierung.

Wir haben den Beweis nicht diskutiert, er steht (in allgemeinerem Kontext) in [AhS], Chapter 1, §8.

- **Definition:** Sei $R \subset S$ regulär und kompakt sowie \mathfrak{T} eine Triangulierung. Wir bezeichnen die Zahl der Dreiecke mit F , die Zahl der Kanten in S mit K und die Zahl der Ecken mit E . Dann ist

$$(39) \quad \chi(R) = E - K + F$$

die *Euler-Charakteristik* von \mathfrak{T} . Wie die Notation suggeriert hängt $\chi(R)$ auch wirklich nur von R ab!

- **Bemerkung:** Ist eine Kante der Schnitt $T_i \cap T_j$, so wird diese Kante nur einmal gezählt obwohl sie die Kante zweier Dreiecke ist. Aus der lokalen Endlichkeit der Triangulierung und der Kompaktheit von R folgt, dass nur endlich viele Dreiecke R schneiden. Insbesondere sind E, F, K endlich.
- **Definition:** Sei $R \subset S$ eine reguläre, kompakte Teilmenge von S und $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ glatt. Wir fixieren eine Triangulierung \mathfrak{T} von R , sodass jedes T_i ganz im Bild einer lokalen Parametrisierung φ_i von S liegt. Dann ist

$$\int_R f dA := \sum_i \int_{T_i} f dA = \sum_i \int_{\varphi_i^{-1}(T_i)} f(\varphi(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Parametrisierung φ_i sowie der Triangulierung \mathfrak{T} (Standardaussage aus der Integrationstheorie, s. S. 325 in [Wa2]).

- **Satz von Gauß-Bonnet (globale Version):** Sei $R \subset S$ eine kompakte, reguläre Teilmenge einer orientierten Fläche S , deren Rand eine endliche Vereinigung von stückweise glatten Kurven C_i ist und deren Inneres (in S) eine reguläre Fläche ist. Die Randkurven sind orientiert als Rand von R (d.h. ein Tangentialvektor der an einer glatten Stelle von $C_i(t)$ aus R hinaus zeigt gefolgt von $\dot{C}_i(t)$ ist eine orientierte Basis von $T_{C_i(t)}S$). An einem nicht glatten Punkt von ∂R bezeichnet $\hat{\vartheta}_l$ den Winkel (im Bogenmaß) zwischen den Geschwindigkeitsvektoren der anliegenden Kanten. Dann gilt

$$(40) \quad \sum_i \int_{C_i} k_g(t) dt + \int_R K dA + \sum_l \vartheta_l = 2\pi\chi(R).$$

- **Beweis:** Jeder Punkt in R hat eine Umgebung die Bild eines orientierten, *orthogonalen* Koordinatensystems ist. Daher gibt es eine Triangulierung $\mathfrak{T} = (T_i)_{i=1, \dots, m}$ von R , sodass T_i ganz im Bild einer orientierten, orthogonalen Parametrisierung liegt. Nach der lokalen Form des Satzes von Gauß-Bonnet gilt für $R = T_i$

$$\sum_{j=0}^2 \int_{t_j^{(i)}}^{t_{j+1}^{(i)}} \kappa_g(s) ds + \int_{T_i} K dA + \sum_{j=0}^2 \vartheta_j^{(i)} = 2\pi$$

für das Dreieck T_i . Addiert man diese Gleichungen für alle Dreiecke und beachtet, dass jede innere Kante (nicht Teil von ∂R) genau zweimal mit verschiedenen Orientierung auftritt, so folgt:

$$\sum_i \int_{C_i} \kappa_g(s) ds + \int_R K dA + \sum_i \sum_{j=0}^2 \vartheta_j^{(i)} = 2\pi F.$$

Sei nun p eine Ecke im Inneren von R , und $\alpha_i(p)$ die anliegenden Innenwinkel, also $\sum \alpha_i(p) = 2\pi$. Es gilt auch $\pi - \vartheta_j^{(i)} = \alpha_{k(i,j)}(p)$ für eine zu p hin orientierte Kante und den Außenwinkel $\vartheta_j^{(i)}$ des entsprechenden Dreiecks $T_{k(i,j)}$ (Orientierung!) und den Innenwinkel $\alpha_{k(i,j)}(p)$. Dann gilt

$$\sum_i \sum_{j=0}^2 \vartheta_j^{(i)} = 3F\pi - \sum_i \sum_{j=0}^2 \underbrace{\alpha_j^{(i)}}_{\text{Innenwinkel von } T_i \text{ bei } t_j^{(i)}}.$$

Sei K_i die Zahl der innenliegenden Kanten (Kante zweier Dreiecke) und K_a die Zahl der Außenkanten. Dann gilt $3F = 2K_i + K_a$. Die Menge der Ecken zerfällt auch zwei Klassen, E_i innenliegende Ecken und die Ecken am Rand E_a . Nicht alle auf dem Rand liegenden Ecken sind Knicke von ∂R , der entsprechende Knickwinkel $\widehat{\vartheta}$ ist dann 0. Man beachte $K_a = E_a$. Also

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_{j=0}^2 \vartheta_j^{(i)} &= (2K_i + K_a)\pi - \left(2\pi E_i + \pi E_a - \sum_l \widehat{\vartheta}_l \right) \\ &= 2\pi K - 2\pi E + \sum_l \widehat{\vartheta}_l \end{aligned}$$

Insgesamt folgt die Behauptung

$$\sum_i \int_{C_i} \kappa_g(s) ds + \int_R K dA + \sum_l \widehat{\vartheta}_l + 2\pi E - 2\pi K = 2\pi F.$$

- **Folgerung:** Die lokale Form des Satzes von Gauß-Bonnet gilt ohne Annahme an die Existenz orthogonaler Koordinatensysteme.

23. VORLESUNG AM 18.7.

- **Anwendungen auf die Topologie von Flächen**

1. **Folgerung:** Die Eulercharakteristik $\chi(R)$ hängt nicht von der Wahl der Triangulierung ab, denn der Ausdruck auf der linken Seite von (40) ist unabhängig von der Triangulierung. (Aus jeder Triangulierung von R erhält man durch Verfeinerung eine, die im vorangehenden Satz vorkam ohne die Eulercharakteristik zu ändern. Zum Beispiel durch kristalline Zerlegung.)
2. **Folgerung:** Sei S eine geschlossene, orientierte, reguläre Fläche mit nirgends negativer Krümmung. Dann gilt $\chi(S) \geq 0$.
3. **Bemerkung:** Die Eulercharakteristik einer regulären Fläche ist eine Invariante unter Diffeomorphismen (sogar Homöomorphismen) denn diffeomorphe Bilder von Triangulierung sind Triangulierungen. Insbesondere sind Flächen mit unterschiedlichen Eulercharakteristiken nicht diffeomorph.
4. **Folgerung:** Für die Sphäre gilt $\chi(S^2) = 2$ (man betrachte die runde Metrik, $R = S^2$, $\partial S^2 = \emptyset$, mit $K \equiv 1$). Das ist der Eulersche Polyedersatz.
5. **Bemerkung:** Man zeigt leicht (durch Verwendung passender Triangulierungen) die Additionsformel für die Eulercharakteristik unter zusammenhängender Summe: Seien S_1, S_2 disjunkte geschlossene Flächen in \mathbb{R}^3 so dass beide Flächen durch die nach außen zeigenden Normalenvektoren orientiert sind. Dann ist $S_1 \# S_2$ eine orientierte Fläche mit

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.$$

Insbesondere gilt $\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1)$, falls S_2 diffeomorph zu einer 2-Sphäre ist. Man sieht auch leicht ein, dass dann S_1 zu $S_1 \# S_2$ homöomorph ist. Ausgehend von T^2 konstruiert man zusammenhängende Flächen $\Sigma_g = \#_g T^2$ mit Eulercharakteristik $2 - 2g$ für $g \geq 1$.

6. **Bemerkung:** Tatsächlich gilt: Zwei orientierbare, geschlossene Flächen sind genau dann diffeomorph (ebenso homöomorph) falls sie die gleiche

Eulercharakteristik haben. Für jede solche Fläche gilt $\chi(S) = 2 - 2g$ für ein $g \geq 0$.

• **Anwendungen auf die Differentialgeometrie von Flächen**

1. **Lemma:** Sei S eine Fläche mit $K \leq 0$ überall. Dann gibt es keine Geodäte, die ein einfaches Gebiet R berandet.

Beweis: Angenommen doch. Die Eulercharakteristik von R ist $\chi(R) = 1$. Nach dem Satz von Gauß-Bonnet gilt

$$\int_R K dA = 2\pi.$$

Die linke Seite ist aber ≤ 0 während die rechte positiv ist.

2. **Lemma:** Sei S eine Fläche mit $K \leq 0$ überall. Gibt es kein einfaches Gebiet in S welches von genau zwei Geodätenstücken berandet wird.

Beweis: Angenommen doch. Seien ϑ_1, ϑ_2 die Knickwinkel. Dann gilt $|\vartheta_i| < \pi$ sonst stimmen die Geodäten überein und R kann nicht homöomorph zu einer Scheibe sein (sondern zu einem Intervall). Also hat man den Widerspruch

$$\underbrace{\int_R K dA}_{\leq 0} + \underbrace{\vartheta_1 + \vartheta_2}_{< 2\pi} = 2\pi.$$

3. **Lemma:** Sei S homöomorph zu einem Zylinder und $K < 0$. Dann gibt es höchstens eine einfache geschlossene Geodäte.

Beweisskizze: Angenommen es gibt zwei verschiedene γ_1, γ_2 (nicht Umparametrisierungen voneinander). Nach Annahme gibt es einen Homöomorphismus $f : S \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Dann beranden die Bilder von $f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2$ Scheiben in \mathbb{R}^2 die 0 enthalten (nach Lemma 1 oben, Jordan-Schoenflies). Wenn sich γ_1, γ_2 schneiden, so sind sie an den Schnittpunkten nicht tangential zueinander (ein sogenannter transversaler Schnitt) und der Abschluß einer Zusammenhangskomponente des Komplements von $\text{Bild}(f \circ \gamma_1) \cup \text{Bild}(f \circ \gamma_2)$ in \mathbb{R}^2 erfüllt die Bedingungen von Lemma 2. Also führt die Annahme, dass sich die Geodäten γ_1, γ_2 schneiden zu einem Widerspruch.

Also berandet $\text{Bild}(\gamma_1) \cup \text{Bild}(\gamma_2)$ einen Kreisring R (mit $\chi(R) = 0$). Dies führt zum Widerspruch

$$0 > \int_R K dA = 2\pi\chi(R) = 0.$$

Also gibt es höchstens eine einfache geschlossene Geodäte.

4. **Lemma:** Sei S eine orientierbare Fläche mit $K > 0$ überall und γ_1, γ_2 zwei einfache geschlossene Geodätische. Dann ist $\gamma_1 \cap \gamma_2 \neq \emptyset$.

Beweis: Wir wissen aus den Übungen (und beweisen es hoffentlich nochmal) dass S zu S^2 homöomorph ist. Wenn γ_1 und γ_2 disjunkte Bilder haben, so ist eine Komponente von $S^2 \setminus (\gamma_1 \cup \gamma_2)$ homöomorph zu einem Kreisring R mit $\chi(R) = 0$. Dies führt zum Widerspruch

$$0 < \int_R K dA = 2\pi\chi(R) = 0.$$

- **Literatur:** [dCa] §4.5, wir folgen aber eher [Ho], S. 11 ff.
- Für die Eulercharakteristik einer Fläche haben wir zwei Zugänge: Kombinatorisch durch Betrachtung von Triangulierungen und differenzialgeometrisch

durch Krümmungsintegrale (der Satz von Gauß-Bonnet sagt dann, dass beide Zugänge das gleiche Ergebnis liefern.) Es folgt ein dritter.

- Im folgenden sind alle Flächen orientierbar (bis etwas anderes gesagt wird).
- **Definition:** Sei X ein (stetiges) Vektorfeld auf S . Dann ist $p \in S$ eine *Singularität* von X falls $X(p) = 0$. Eine Singularität p ist *isoliert* falls es eine Umgebung V von p gibt, sodass p die einzige Nullstelle von X ist.
- **Erinnerung:** s. Lemma auf S. 50.
- Sei $p \in S$ eine isolierte Singularität eines Vektorfelds, V eine Umgebung von p in S sodass p die einzige Singularität von X in V ist. Sei $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow V$ eine T -periodische, einfache, geschlossene, glatte Kurve die eine Scheibe in V welche p enthält positiv berandet, d.h. der Umlaufsinn von γ stimmt mit der Orientierung als Rand der Scheibe überein. Wir nehmen an, dass V ganz im Bild einer orientierten lokalen Parametrisierung von S um p liegt. Dann gibt es eine stetige Funktion $\vartheta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sodass

$$\frac{X(\gamma(t))}{|X(\gamma(t))|} = \cos(\vartheta(t)) \frac{X_u}{\sqrt{E}} + \sin(\vartheta(t)) B$$

wobei $B(q)$ der eindeutig bestimmte Tangentialvektor von S ist, sodass $\frac{X_u}{\sqrt{E}}(q), B(q)$ eine orientierte Orthonormalbasis von $T_q S$ ist.

- **Definition:** Der *Index* von X bei der Singularität p ist

$$\text{ind}(X, p) = \frac{\vartheta(T) - \vartheta(0)}{2\pi}.$$

- **Bemerkung:** Zu zeigen ist, dass $\text{ind}(X, p)$ wohldefiniert ist. Die Unabhängigkeit von der Wahl der Parametrisierung von γ zeugt man wie im Fall der Windungszahl. Die Unabhängigkeit von der Wahl des Koordinatensystems erhält man wie folgt: Sei (\bar{u}, \bar{v}) ein weiteres Koordinatensystem welches V überdeckt. Dann gibt es eine Funktion α auf der Scheibe V (die Aussage das V eine Scheibe ist, meint, dass eine Umgebung von \bar{V} diffeomorph zur Umgebung der Scheibe in \mathbb{R}^2 ist und zwar so, dass der Diffeomorphismus die Kurve γ auf den Einheitskreis abbildet, und weil *die* Scheibe in \mathbb{R}^2 konvex ist, erhält man die Existenz von α wie in der Diskussion im Zusammenhang mit dem Umlaufsatz (Hebungslemma auf S. 11) sodass

$$\frac{X_u}{\sqrt{E}} = \cos(\alpha) \frac{X_{\bar{u}}}{\sqrt{E}} + \sin(\alpha(x)) \bar{B}.$$

Die impliziert $B = -\sin(\alpha(\gamma(t))) \frac{X_{\bar{u}}}{\sqrt{E}} + \cos(\alpha(\gamma(t))) \bar{B}$. Also gilt

$$\begin{aligned} \frac{X(\gamma(t))}{|X(\gamma(t))|} &= (\cos(\vartheta(t)) \cos(\alpha(\gamma(t))) - \sin(\vartheta(t)) \sin(\alpha(\gamma(t))) \frac{X_{\bar{u}}}{\sqrt{E}} \\ &\quad + (\cos(\vartheta(t)) \sin(\alpha(\gamma(t))) + \sin(\vartheta(t)) \cos(\alpha(\gamma(t)))) \bar{B}. \end{aligned}$$

Also gilt $\bar{\vartheta}(t) = \vartheta(t) + \alpha(\gamma(t))$ und es folgt $\bar{\vartheta}(T) - \bar{\vartheta}(0) = \vartheta(T) - \vartheta(0)$. Es ist noch zu zeigen dass $\text{ind}(X, p)$ nicht von der Wahl des Weges abhängt. Dies folgt aus einer topologischen Tatsache: Je zwei geschlossene Kurven in $D^2 \setminus \{0\}$ die den Mittelpunkt einmal umlaufen sind homotop durch einfach geschlossene Kurven. Dies ist eine Konsequenz aus dem Satz von Schoenflies.

Genauer: Seien $\gamma_0 : I_0 \rightarrow D^2 \setminus \{0\}$ und $\gamma_1 : I_1 \rightarrow D^2 \setminus \{0\}$ zwei einfach geschlossene, stetige Kurven die 0 einmal umlaufen. Dann gibt es eine stetige Abbildung $H : I_0 \times [0, 1] \rightarrow D^2 \setminus \{0\}$, so dass $H(t, 0) = \gamma_0(t)$ und $H(\cdot, 1)$ ist

eine Umparametrisierung von γ_1 . Seien nun γ_0 eine Kurve wie oben in einer Scheibe V_0 und $\gamma_1 \subset V_1$. Dann homotopiert man γ_0, γ_1 zu einer Kurve γ' die in $V_0 \cap V_1$ liegt und die homotop zu beiden ist. Während der Homotopie ändert sich der Index nicht. Also ist der Index unabhängig von der Wahl der Kurve.

- **Bemerkung:** Es ist tatsächlich irrelevant dass γ eine einfache, periodische Kurve ist. Wichtig ist nur, dass γ p genau einmal positive umläuft. Wenn man mit solchen γ startet, ist es ein bisschen einfacher weil man nicht sicherstellen muss, dass alle Kurven die zwischen γ_0 und γ_1 interpolieren selber *einfach* sind. Aber man muss dann eben definieren was es heißt, dass eine einfache, geschlossene Kurve p genau einmal positiv umläuft. Man verwendet dazu die Umlaufzahl, die manche von ihnen aus einer Vorlesung über Funktionentheorie kennen (s. zum Beispiel Abschnitt 6.2. in [Jä]) und kann dann die Anwendung vom Satz von Schoenflies umgehen. Im Prinzip ist das einfacher, aber es erfordert die Einführung eines neuen Begriffs.
- **Satz (Poincaré -Hopf Indexsatz):** Sei S eine kompakte, orientierte Fläche und X ein stetiges Vektorfeld auf S mit isolierten Singularitäten. Dann gilt

$$(41) \quad \sum_{p \text{ Singularität von } X} \text{ind}(X, p) = \chi(S).$$

- **Bemerkung:** Die Summe auf der linken Seite ist endlich weil die S kompakt ist, und die Singularitäten isoliert sind.
- **Beweis:** Der Beweis hat zwei Schritte. Zuerst zeigt man, dass für zwei Vektorfelder X, \bar{X} wie in der Annahme die Indexsumme gleich ist, d.h.

$$\sum_{p \text{ Singularität von } X} \text{ind}(X, p) = \sum_{\bar{p} \text{ Singularität von } \bar{X}} \text{ind}(\bar{X}, \bar{p}).$$

Im zweiten Schritt konstruiert man ausgehend von einer Triangulierung ein Vektorfeld X dessen Indexsumme genau die Eulercharakteristik von S ist.

1. Wir wählen eine Triangulierung \mathfrak{T} , sodass keine Singularität von X oder \bar{X} auf einer Kante oder eine Ecke liegt und so, dass \bar{T}_i im Bild eines orientierten Kartengebiets liegt. Falls eine Singularität p von X im Inneren von T_i liegt, so erhält man $\text{ind}(X, p)$ durch Vergleich von X mit X_u entlang von ∂T_i . Falls T_i auch eine Singularität \bar{p} von \bar{X} enthält so ist

$$\text{ind}(X, p) - \text{ind}(\bar{X}, \bar{p})$$

die Zahl der Rotationen die X im Vergleich zu \bar{X} entlang von γ macht:
Falls

$$\begin{aligned} \frac{X(\gamma(t))}{|X(\gamma(t))|} &= \cos(\vartheta) \frac{X_u}{\sqrt{E}} + \sin(\vartheta) B(\gamma(t)) \\ \frac{\bar{X}(\gamma(t))}{|\bar{X}(\gamma(t))|} &= \cos(\bar{\vartheta}) \frac{X_u}{\sqrt{E}} + \sin(\bar{\vartheta}) B(\gamma(t)) \end{aligned}$$

so gilt, wenn $\frac{\bar{X}}{|\bar{X}|}, \bar{Y}$ eine positive Orthonormalbasis ist (definiert überall da wo $\bar{X} \neq 0$),

$$\begin{aligned} \frac{X(\gamma(t))}{|X(\gamma(t))|} &= \cos(\vartheta) \left(\cos(\bar{\vartheta}) \frac{\bar{X}(\gamma(t))}{|\bar{X}(\gamma(t))|} - \sin(\bar{\vartheta}) \bar{Y}(\gamma(t)) \right) \\ &\quad + \sin(\vartheta) \left(\sin(\bar{\vartheta}) \frac{\bar{X}(\gamma(t))}{|\bar{X}(\gamma(t))|} + \cos(\bar{\vartheta}) \bar{Y}(\gamma(t)) \right) \\ &= \cos(\vartheta - \bar{\vartheta}) \frac{\bar{X}(\gamma(t))}{|\bar{X}(\gamma(t))|} + \sin(\vartheta - \bar{\vartheta}) \bar{Y} \end{aligned}$$

Um die Indexdifferenz $\text{ind}(X, p) - \text{ind}(\bar{X}, \bar{p})$ zu bestimmen, reicht es also, den Winkel zwischen X und \bar{X} zu kennen. Wenn T_i keine Singularität von X enthält, so kann man trotzdem den Index definieren, er ist dann einerseits Null und andererseits kann man dann die Rotation von verschiedenen Vektorfeldern entlang Rändern von Dreiecken in \mathfrak{T} betrachten.

Für die Differenz der Indexsummen gilt dann

$$\begin{aligned} \sum_p \text{ind}(X, p) - \sum_{\bar{p}} \text{ind}(\bar{X}, \bar{p}) &= \sum_i \frac{1}{2\pi} (\text{totale Variation des Winkels zwischen } X, \bar{X}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\text{Kanten, mit beiden Or.}} \text{totale Variation des Winkels zwischen } X, \bar{X} \\ &\quad \text{entlang der orientierten Kante} \\ &= 0 \end{aligned}$$

weil jede Kante zweimal als Rand eines Dreiecks von \mathfrak{T} , also mit verschiedenen Orientierungen, auftritt.

2. Sei T eine Triangulierung so dass jedes Dreieck ganz in ein Kartengebiet passt. Man wählt ein Vektorfeld so dass
 - jede Ecke eine Quelle von X ist, (mit Index 1)
 - das Innere jedes Dreiecks enthält genau eine Singularität, und diese Singularität ist eine Senke (mit Index 1),
 - im Inneren jeder Kante gibt es genau eine Singularität (hyperbolisch, die Vereinigung der stabilen Flußlinien ist die Kante) mit Index -1 .

Nach Konstruktion ist die Indexsumme des Vektorfeldes gerade $E - K + F = \chi(S)$.

LITERATUR

- [AhS] L. Ahlfors, L. Sario, *Riemann surfaces*, Princeton University Press, 4th printing, 1971.
- [BJ] T. Bröcker, K. Jänich, *Einführung in die Differentialtopologie*, Springer 1990.
- [Bä] C. Bär, *Elementare Differentialgeometrie*, 2. Auflage 2010, deGruyter.
- [dCa] M. do Carmo, *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*, 3. Auflage 1993, vieweg.
- [Fi] G. Fischer, *Lineare Algebra*, 15. Aufl., Vieweg.
- [Fo3] O. Forster, *Analysis 3*, 3. Auflage, Vieweg 1984.
- [Ha] Hales, T., *Jordans Proof of the Jordan Curve Theorem*, Studies in logic, grammar and rhetoric, 10 (23) 2007.
- [Ho] H. Hopf, *Differential geometry in the Large*, Lecture Notes in Math. 1000, 2. ed., Springer 1989.
- [Jä] K. Jänich, *Funktionentheorie*, 3. Aufl. 1992, Springer.
- [Kü] W. Kühnel, *Differentialgeometrie*, 5. Auflage 2010, vieweg+teubner.

- [Re] R. Remmert, *Funktionentheorie 1*, 3. Auflage, Springer 1992.
- [Sp] M. Spivak, *Differential geometry Vol. 2*, Publish or Perish.
- [Wa1] W. Walter, *Analysis 1*, 3. Auflage 1992, Springer.
- [Wa2] W. Walter, *Analysis 2*, 3. Auflage 1992, Springer.
- [WaD] W. Walter, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, 7. Auflage, Springer.