Prof. Dr. Thomas Vogel
Dr. Jonas Stelzig

Sommersemester 2019
29.07.2019

Geometrie und Topologie von Flächen

Klausur

Nachname: __________ Vorname: __________

Matrikelnr.: __________ Fachsemester: __________

Abschluss: Bachelor, PO ❏ 2010 ❏ 2011 ❏ 2015 Master, PO ❏ 2010 ❏ 2011

Lehramt Gymnasium: ❏ modularisiert ❏ nicht modularisiert

❏ Diplom ❏ Anderes: __________

Hauptfach: ❏ Mathematik ❏ Wirtschaftsm. ❏ Inf. ❏ Phys. ❏ Stat. ❏ ______

Nebenfach: ❏ Mathematik ❏ Wirtschaftsm. ❏ Inf. ❏ Phys. ❏ Stat. ❏ ______

Anrechnung der Credit Points für das ❏ Hauptfach ❏ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte verstauen Sie Ihr Mobiltelefon ausgeschaltet in Ihrer Tasche; legen Sie bitte Ihren Lichtbild- und Studentenausweis sichtbar auf den Tisch.
Bitte überprüfen Sie, ob Sie **7 Aufgaben** erhalten haben.
Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**.
Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf den dafür vorgesehenen Blättern. Falls der Platz nicht ausreicht, teilen wir zusätzliches Papier aus. Bitte tackern Sie dieses vor der Abgabe an der entsprechenden Stelle in Ihre Klausur.
Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
Sie haben **120 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.

Viel Erfolg!

	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
	/6	/4	/5	/4	/6	/5	/3	/33

Name: ____________________

Aufgabe 1. [2+2+2 Punkte]

Sei S die durch folgende Parametrisierung gegebene Fläche:

$$\begin{aligned}\varphi : (0,2\pi) \times (0,2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\longmapsto ((\cos(u)+2)\cos(v), (\cos(u)+2)\sin(v), 2\sin(u)).\end{aligned}$$

Berechnen Sie die erste und die zweite Fundamentalform von S. Bestimmen Sie alle Punkte auf S, in welchem die Gauß-Krümmung K positiv ist.

Es gilt:

$$\begin{aligned}\varphi_u &= (-\sin(u)\cos(v), -\sin(u)\sin(v), 2\cos(u)) \\ \varphi_v &= (-\sin(v)(\cos(u)+2), \cos(v)(\cos(u)+2), 0)\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}E &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle \\ &= \sin^2(u)\cos^2(v) + \sin^2(u)\sin^2(v) + 4\cos^2(u) \\ &= 1 + 3\cos^2(u) \\ F &= \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle \\ &= \sin(u)\sin(v)\cos(v)(\cos(u)+2) - \sin(u)\cos(v)\sin(v)(\cos(u)+2) \\ &= 0 \\ G &= \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle \\ &= \sin^2(v)(\cos(u)+2)^2 + \cos^2(v)(\cos(u)+2)^2 \\ &= (\cos(u)+2)^2\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\varphi_u \times \varphi_v &= \begin{pmatrix} -2\cos(u)\cos(v)(\cos(u)+2) \\ -2\cos(u)\sin(v)(\cos(u)+2) \\ -\sin(u)\cos^2(v)(\cos(u)+2) - \sin(u)\sin^2(v)(\cos(u)+2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2\cos(u)\cos(v)(\cos(u)+2) \\ -2\cos(u)\sin(v)(\cos(u)+2) \\ -\sin(u)(\cos(u)+2) \end{pmatrix} \\ \|\varphi_u \times \varphi_v\|^2 &= (\cos(u)+2)^2(4\cos^2(u)\cos^2(v) + 4\cos^2(u)\sin^2(v) + \sin^2(u)) \\ &= (\cos(u)+2)^2(4\cos^2(u) + \sin^2(u)) \\ &= (\cos(u)+2)^2(3\cos^2(u)+1) \\ N &= \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} \\ &= \frac{1}{(\cos(u)+2)\sqrt{(3\cos^2(u)+1)}} \begin{pmatrix} -2\cos(u)\cos(v) \\ -2\cos(u)\sin(v) \\ -\sin(u) \end{pmatrix} \\ \varphi_{uu} &= (-\cos(u)\cos(v), -\cos(u)\sin(v), -2\sin(u)) \\ \varphi_{uv} &= (\sin(u)\sin(v), -\sin(u)\cos(v), 0) \\ \varphi_{vv} &= (-\cos(v)(\cos(u)+2), -\sin(v)(\cos(u)+2), 0)\end{aligned}$$

und so, mit $C = \frac{1}{(\cos(u)+2)\sqrt{(3\cos^2(u)+1)}}$:

$$\begin{aligned}
e &= \langle N, \varphi_{uu} \rangle \\
&= C \cdot (2\cos^2(u)\cos^2(v) + 2\cos^2(u)\sin^2(v) + 2\sin^2(u)) \\
&= C \cdot (2\cos^2(u) + 2\sin^2(u)) \\
&= 2C \\
f &= \langle N, \varphi_{uv} \rangle \\
&= 0 \\
g &= \langle N, \varphi_{vv} \rangle \\
&= C \cdot (\cos(u) + 2) \cdot (2\cos(u)\cos^2(v) + 2\cos(u)\sin^2(v)) \\
&= C \cdot (\cos(u) + 2) \cdot (2\cos(u)) \\
K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\
&= \frac{4C^2 \cdot (\cos(u) + 2) \cdot \cos(u)}{(1 + 3\cos^2(u))(\cos(u) + 2)^2}
\end{aligned}$$

Da $4C^2$, $\cos(u) + 2$ und der Nenner immer größer null sind ist also $K > 0$ gdw $\cos(u) > 0$ d.h. für $u \in (0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)$, $v \in (0, 2\pi)$.

Name: ____________________

Aufgabe 2. [2+2 Punkte]

Entscheiden Sie in den folgenden Fällen für welche $a \in \mathbb{R}$ die Menge

$$f^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = a\}$$

eine reguläre Fläche ist.

1. $f(x, y, z) = xy$
2. $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)z$

Zu 1.: Es gilt $\nabla f(x, y, z) = (y, x, 0)$ und damit $\nabla f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$. Also ist jeder Wert $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ regulär und damit $f^{-1}(a)$ eine reguläre Fläche nach dem Satz vom regulären Wert. Für $a = 0$ ist das Urbild gegeben als $L_0 := f^{-1}(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}$. In einer Umgebung von $(0, 0, 0)$ ist diese Menge kein Graph über einer der Koordinatenebenen, da für die Projektionen $\mathrm{pr} : L_0 \longrightarrow E$, für E die xy, xz oder yz-Ebene, auf einer beliebig kleinen Umgebung von $(0, 0, 0)$ nicht injektiv sind (z.B. enthält L_0 alle drei Koordinatenachsen). Also kann L_0 keine reguläre Fläche sein.

Zu 2.: Es gilt $\nabla f(x, y, z) = (2xz, 2yz, x^2 + y^2 + 3z^2)$. Also $\nabla f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0$. Damit sind alle $a \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ reguläre Werte und damit $f^{-1}(a)$ reguläre Flächen nach dem Satz vom regulären Wert. Für $a = 0$ ist $f^{-1}(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ eine Ebene und damit eine reguläre Fläche. (z.B. globale Karte $(u, v) \longmapsto (u, v, 0)$).

Name: ____________________

Aufgabe 3. [1+2+2 Punkte]

1. Formulieren Sie das *theorema egregium* von Gauß.
2. Wir betrachten die Rotationsflächen

$$S_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2=1\}$$
$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2=1+z^2\}.$$

Geben Sie einen Diffeomorphismus $\psi_0 : S_0 \longrightarrow S_1$ an.

3. Warum gibt es keine Isometrie $\widehat{\psi} : S_0 \longrightarrow S_1$?

Zu 1.: Für eine reguläre Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$ hängt die Gaußkrümmung K nur von der ersten Fundamentalform ab. Varianten: K kann aus E, F, G (und deren Ableitungen) berechnet werden. Oder: Für zwei Parametrisierungen φ, φ' von regulären Flächen S, S', die $E = E', F = F', G = G'$ erfüllen gilt auch $K = K'$. Skript: K hängt nur von der ersten Fundamentalform ab.

Zu 2.: Sei
$$\psi_0(x,y,z) := (\sqrt{1+z^2}x, \sqrt{1+z^2}y, z)$$
mit Umkehrabbildung
$$\psi_1(x,y,z) := \left(\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}x, \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}y, z\right).$$
Diese sind wohldefiniert (d.h. $\operatorname{im}\psi_0 \subseteq S_1$ und $\operatorname{im}\psi_1 \subseteq S_0$): z.B. gilt für $(x,y,z) \in S_0$ dass $(\sqrt{1+z^2}x)^2 + (\sqrt{1+z^2}y)^2 = (1+z^2)(x^2+y^2) = 1+z^2$ und analog für ψ_1. Da ψ_0, ψ_1 auf ganz $\mathbb{R}^3$ differenzierbare Abbildungen sind, ist insbesondere ihre Verknüpfung mit einer beliebigen Parametrisierung (die ja eine glatte Abbildung von einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^3$ ist) differenzierbar auf dem Definitionsbereich U und damit sind ψ_0, ψ_1 differenzierbare Abbildungen auf S_0, S_1. (Alternative: Gib konkrete Parametrisierungen φ_0, φ_1 an und stelle dann fest dass die Verknüpfung $\psi_i \circ \varphi_i$ differenzierbar ist).

Zu 3.: Wenn es eine Isometrie $\widehat{\psi}$ gäbe, würden für je zwei Punkte $p, \widehat{\psi}(p)$ die ersten Fundamentalformen und damit, nach dem Theorema Egregium, die Krümmungen übereinstimmen.

Aber: Der Zylinder S_0 ist lokal isometrisch zur Ebene, hat also insbesondere $K = 0$ überall. Für das Hyperboloid S_1 haben bspw die Punkte mit $z = 0$ negative Gaußkrümmung, was man sehen kann indem man das Vorzeichen der Normalenkrümmung entlang des horizontalen Kreises $x^2 + y^2 = 1$ mit dem der in Richtung $(0,0,1)$ vergleicht. (Entweder Bilder oder explizite Rechnung).

Fortsetzung Aufgabe 3

Name: ____

Aufgabe 4. [4 Punkte]

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ glatt und p so dass $df_p \neq 0$. Zeige, dass es eine lokale Parametrisierung $\varphi : U \longrightarrow (V \cap S)$ um p gibt, so dass $f(\varphi(u, v)) = u$.

Wähle eine beliebige Parametrisierung $\psi : \tilde{U} \longrightarrow (\tilde{V} \cap S)$ um $p = \psi(q)$ mit $q = (u_q, v_q)$. Da $df_p \neq 0$ ist $d(f \circ \psi)_q = ((f \circ \psi)_u, (f \circ \psi)_v) \neq 0$. Nehmen wir zunächst an dass $(f \circ \psi)_u \neq 0$. Dann definiere $F : \tilde{U} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ als $F(u, v) = (f \circ \psi, v)$. Nach Konstruktion hat dF_q Rang zwei. Damit gibt es nach dem Umkehrsatz Umgebungen $U' \subseteq \tilde{U}$ von q bzw. $V' \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(f(p), v_q)$ und eine Abbildung $G : V' \longrightarrow U'$ mit $F \circ G(u, v) = (u, v)$. Setzt man also $(\varphi, U) := (\psi \circ G, V')$, so gilt die Behauptung (mit $V := \tilde{V} \backslash \varphi(U \backslash U')$).

Falls zuvor $(f \circ \psi)_u = 0$ galt, ersetze $\psi(u, v)$ durch $\tilde{\psi} := \psi \circ h$ mit $h(u, v) = (v, u)$.

Name: ____________________

Aufgabe 5. [1+1+2+2 Punkte]

1. Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Was heißt es, dass S orientierbar ist.
2. Skizzieren Sie ein Beispiel einer nicht-orientierbaren regulären Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ (ohne Begründung).
3. Beweisen Sie, dass der Zylinder $Z = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ orientierbar ist.
4. Geben Sie einen orientierungsumkehrenden Diffeomorphismus von Z nach Z an.

Zu 1.: S is orientierbar wenn es eine Familie $\{(\varphi_i, U_i)\}_{i\in I}$ gibt, sodass $S = \bigcup_{i\in I} = \varphi_i(U_i)$ und fr alle $i, j \in I$ giltdet $D(\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j) > 0$ überall.

Äquivalent: S heißt orientierbar falls es ein stetiges Normalenvektorfeld gibt. D.h. eine **stetige** Abbildung $N : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $N(p) \perp T_pS$ und $\|N(p)\| = 1$ für alle $p \in S$.

Zu 2.: Bild vom Möbiusband.

Zu 3.: Option 1: Urbild vom regulären Wert 1 der Funktion $(x, y, z) \longmapsto x^2 + y^2$ und Urbilder von regulären Werten sind wie in VL gesehen immer orientierbar.
Option 2: Parametrisierung. $Z = \varphi(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ für $\varphi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$. φ_1 und φ_2 seien Einschränkungen auf $(0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ und $(\pi, 3\pi)$. Dann ist $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 = \mathrm{Id}$ und hat damit positive Jakobi-determinante. Option 3: Nutze Parametrisierung(en) um Normalenvektor zu berechnen (dann muss man Stetigkeit prüfen)

Zu 4.: Sei $\psi(x, y, z) = (-x, y, z)$. Dies ist eine differenzierbare Abbildung $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die $\psi^2 = \mathrm{Id}$ erfüllt, insbesondere ist sie ein Diffeomorphismus von $\mathbb{R}^3$ auf sich selbst. Außerdem ist $\psi(Z) \subseteq Z$ und damit schränkt sich ψ zu einem Diffeomorphismus von Z ein. (Alternativ kann man hier auch $\psi \circ \varphi$ hinschreiben und feststellen dass das diffbar ist.)

Außerdem ist für ein beliebigen Definitionsbereich wo das Sinn ergibt $\varphi^{-1} \circ \psi \circ \varphi(u, v) = \varphi^{-1}(-\cos(u), \sin(u), v) = \varphi^{-1}(\cos(\pi - u), \sin(\pi - u), v) = (\pi - u, v)$ und dies hat negative Jakobideterminante.

Fortsetzung Aufgabe 5

Name: ____________________

Aufgabe 6. [3+2 Punkte]

Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und Γ_f der Graph von f.

1. Wir nehmen an, dass f kompakten Träger hat, d.h. $f \equiv 0$ außerhalb eines Balles $B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$. Zeige mit Hilfe des Satzes von Gauß-Bonnet, dass es auf Γ_f Punkte mit negativer Krümmung gibt genau dann, wenn es auch Punkte mit positiver Krümmung gibt.

2. Begründe, dass Γ_f für $f(u,v) = u^2 + v^2$ keine Punkte negativer Krümmung hat. Dies erfordert keine explizite Berechnung der Gauß-Krümmung!

Betrachte $\mathbb{R}^2$ als xy-Ebene in $\mathbb{R}^3$ mit Normalenvektor $N = (1,0,0)$. Sei $\gamma(t) = (r\cos\frac{t}{r}, r\sin\frac{t}{r}, 0)$ ein nach Bogenlänge parametrisierter Kreis in der Ebene mit Radius $r > R$ und sei D die Kreisscheibe die von γ berandet wird. Nach Voraussetzung liegt γ auf Γ_f und in allen Punkten von $\mathbb{R}^2 \backslash \mathring{D}$ stimmt Γ_f mit der xy-Ebene überein und es gilt daher $K = 0$. Interessant sind also die Punkte in $\Gamma_D := \Gamma_{f|_{\mathring{D}}}$.

Die zweite Ableitung von γ ist $\ddot{\gamma}(t) = (-1/r\cos(t/r), -1/r\sin(t/r), 0)$ und steht senkrecht auf N. Die geodätische Krümmung ist daher bestimmt durch $\ddot{\gamma}(t) = \kappa_g(t) N \times \dot{\gamma}(t)$. Da $N \times \dot{\gamma} = (-\cos(t/r), -\sin(t/r), 0)$, ist $k_g(t) = 1/r$.

Schlielich ist D diffeomorph zu Γ_D und es gilt daher $\chi(\Gamma_D) = \chi(D) = 1$. Damit gilt nach Gauß-Bonnet

$$2\pi = 2\pi\chi(D) = \int_0^{2\pi r} k_g(t)dt + \int_{\Gamma_D} K dA = 2\pi + \int_{\Gamma_D} K dA$$

Also muss $\int_{\Gamma_D} K dA = 0$ sein und damit entweder $K = 0$ oder, wegen der Stetigkeit von K, muss es sowohl Punkte mit positivem K als auch solche mit negativem K geben.

(Alternativ könnte man statt einem Kreis auch ein sehr großes Viereck nehmen. In diesem Fall sind die Kanten Geodäten. Beim Satz von GB verschwindet also der Term mit der geodätischen Krümmung, dafür bekommt man die Innenwinkelsumme 2π.)

Bei einem Punkt mit negativer Gaußkrümmung liegt die Fläche in einer kleinen Umgebung auf beiden Seiten des Tangentialraums. Dies ist hier nicht der Fall, sie liegt immer auf einer Seite des Tangentialraums. Explizit nachgerechnet: Parametrisierung $\varphi(u,v) = (u, v, f(u,v))$

$$\begin{aligned}
\varphi_u &= (1,0,2u) \\
\varphi_v &= (0,1,2v) \\
N(u,v) &= \frac{1}{1+4u^2+4v^2}(-2u,-2v,1) \\
\langle (u-u_0, v-v_0, v, u^2+v^2-u_0^2-v_0^2), (-2u_0,-2v_0,1) \rangle &= -2uu_0 + 2u_0^2 - 2vv_0 + 2v_0^2 + u^2 + v^2 - u_0^2 - v_0^2 \\
&= -2uu_0 - 2vv_0 + u_0^2 + v_0^2 + u^2 + v^2 \\
&= (u-u_0)^2 + (v-v_0)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

d.h. Die Fläche liegt ganz auf einer Seite der Tangentialebene.

Fortsetzung Aufgabe 6

Name: ______________________________

Aufgabe 7. [1+2 Punkte]

Sei $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ eine glatte, nach Bogenlänge parametrisierte Kurve von Periode $T > 0$.

1. Man gebe die Definition der Windungszahl n_γ an.
2. Sei

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ -\gamma_2(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

   Man beweise oder widerlege: $n_\gamma = n_{\tilde{\gamma}}$

Zu 1.: Sei $\theta(t)$ eine stetige Funktion von $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sodass $\dot{\gamma}(t) = (\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t)))$. Dann ist die Windungszahl $n_\gamma = \frac{\theta(T)-\theta(0)}{2\pi}$.

Zu 2.: Sei $\theta(t)$ Funktion wie bei 1 für γ. Es gilt $\dot{\tilde{\gamma}}(t) = (\dot{\gamma}_1(t), -\dot{\gamma}_2(t)) = (\cos(\theta(t)), -\sin(\theta(t)) = (\cos(-\theta(t)), \sin(-\theta(t)))$ Also ist $\tilde{\theta}(t) := -\theta(t)$ eine Funktion wie unter 1 für $\tilde{\gamma}$. Damit ist $n_{\tilde{\gamma}} = \frac{-\theta(T)+\theta(0)}{2\pi} = -n_\gamma$. Die Aussage $n_\gamma = n_{\tilde{\gamma}}$ ist also im Allgemeinen falsch. (sie stimmt nur falls die Umlaufzahl =0 ist, das muss aber nicht extra erwähnt werden.)
Alternativ kann man auch eine konkrete Kurve als Gegenbeispiel angeben.