SoSe 2019

Prof. Dr. Thomas Vogel
Dr. Jonas Stelzig

Geometrie und Topologie von Flächen

Aufgabenblatt 13

Aufgabe 1. Sei S eine kompakte reguläre Fläche deren Punkte alle elliptisch sind. Zeigen Sie

$$4\pi \int_S K dA_S = \int_{N(S)} dA_{S^2}$$

Sie dürfen dabei Aufg. 2, Blatt 11 verwenden.

Aufgabe 2. Sei S eine reguläre Fläche wie in Aufg. 1. Seien A und B geschlossene Gebiete in S, sodass $S = A \cup B$ und $C := A \cap B = \partial A = \partial B$ eine geschlossene Geodäte ist. Sei $N : S \longrightarrow S^2$ die Gaußabbildung. Zeigen Sie dass $N(A)$ und $N(B)$ den gleichen Flächeninhalt haben.

Aufgabe 3. Zeigen Sie für die folgenden Vektorfelder in der Ebene, dass $(0,0)$ ein isolierter singulärer Punkt ist und berechnen Sie den Index in $(0,0)$:

1. $X(u,v) = (u,v)$
2. $X(u,v) = (-u,v)$
3. $X(u,v) = (u,-v)$
4. $X(u,v) = (x^2 - y^2, -2xy)$
5. $X(u,v) = (x^3 - 3xy^2, y^3 - 3x^2y)$

Kann es vorkommen dass der Index eines singulären Punktes 0 ist? Falls ja, zeichnen Sie ein Beispiel.

Aufgabe 4. Sei $T = \varphi(\mathbb{R}^2)$ der Torus, wobei

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\longmapsto ((2+\cos(v))\cos(u), (2+\cos(v))\sin(u), \sin(v)) \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} f : T &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi(u,v) &\longmapsto \sin\left(\frac{u}{2}\right)\sin\left(\frac{v}{2}\right)\sin\left(\frac{u+v}{2}\right) \end{aligned}$$

eine wohldefinierte glatte Funktion auf T ist, die genau drei kritische Punkte hat.