SoSe 2019

Prof. Dr. Thomas Vogel
Dr. Jonas Stelzig

Geometrie und Topologie von Flächen

Aufgabenblatt 9

Aufgabe 1. Sei S eine orientierbare Fläche und $\sigma_1 = \{\varphi_i\}_{i\in I}$ und $\sigma_2 = \{\psi_i\}_{i\in J}$ zwei Orientierungen von S. Man sagt σ_1 und σ_2 bestimmen dieselbe Orientierung, falls die Jakobimatrizen der Kartenwechsel der Vereinigung $\sigma_1 \cup \sigma_2$ wieder positive Determinante haben. Zeigen Sie dass dies eine Äquivalenrelation mit zwei Äquivalenzklassen bildet.

Aufgabe 2. Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und S ihr Graph. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^2$ eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge. Stellen Sie Formeln für die erste Fundamentalform und für den Flächeninhalt von $f(K)$ auf.

Aufgabe 3. Wähle eine Orientierung auf den folgenden Flächen und beschreibe das Bild der Gaußabbildung:

1. Paraboloid: $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}$
2. Hyperboloid: $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$
3. Catenoid: $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = \cosh^2 z\}$

Aufgabe 4. Sei S die Fläche die entsteht indem man die Kurve $z = y^4$ um die z-Achse rotieren lässt. Malen Sie diese Fläche und zeigen Sie, dass für $p = (0, 0, 0)$ das Differential der Gaußabbildung verschwindet: $dN_p = 0$.