SoSe 2019

Prof. Dr. Thomas Vogel
Dr. Jonas Stelzig

Geometrie und Topologie von Flächen

Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1. Seien $a, b, c \neq 0$. Zeigen Sie dass jede der Gleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 = ax$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = by$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = cz$$

eine reguläre Fläche definiert und dass diese Flächen sich paarweise orthogonal schneiden.

Aufgabe 2. Zeigen Sie: eine glatte Abbildung regulärer Flächen $f : S_1 \longrightarrow S_2$ ist ein lokaler Diffeomorphismus bei p genau dann, wenn $\operatorname{rang} df_p = 2$.

Aufgabe 3. Sei $H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$. Zeichnen Sie H. Berechnen Sie die Tangentialebenen an Punkten der Form $(x, y, 0)$ und zeigen Sie, dass sie alle parallel zur z-Achse sind. Berechnen sie auch die von $f : S \to S, (x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$ induzierte Abbildung auf diesen Tangentialräumen und ihre Eigenwerte.

Aufgabe 4. Sei S eine zusammenhängende reguläre Fläche.

1. Zeigen Sie, dass es für $p, q \in (0, 1)^2$ einen Diffeomorphismus f von $(0, 1)^2$ gibt, sodass $f(p) = q$.
2. Zeigen Sie, dass es für $p, q \in S$, $p \neq q$ und einen glatten, eingebetteten Weg γ zwischen p und q in S einen Diffeomorphismus f von S gibt mit $f(p) = q$ und einer kompakten Umgebung im $\gamma \subseteq K$ sodass $S \setminus K$ zusammenhängend ist und $f|_{S\setminus K} = \mathrm{id}$.
3. Folgeren Sie, dass die Gruppe $\operatorname{Diff}(S)$ der Diffeomorphismen von S auf S n-fach transitiv operiert. Sie können ohne Beweis annehmen, dass es zwischen zwei Punkten $p, q \in S$ einen Weg wie unter 2) gibt.