LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Helmut Schwichtenberg
Nils Köpp

WS 23/24
January 10, 2024

Mathematische Logik

Blatt 11

Aufgabe 41 (4 Punkte). Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ *elementar aufzählbar*, d.h. es existiert $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *elementar* mit

$$n \in A \Leftrightarrow \big[\text{existiert } m : \; fm = \langle n \rangle\big].$$

Ferner sei A *unendlich* d.h., für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_0, \dots, x_{n-1} \in A$ existiert $y \in A \setminus \{x_i \,|\, i < n\}$. Zeigen sie, dass eine *elementare* und *injektive* Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $A = \{g\,n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ existiert.

Aufgabe 42 (4 Punkte). Wir betrachten die Sprache $\mathcal{L} = \{\mathbf{Fun}, \mathbf{Rel}\}$ mit $\mathbf{Fun} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Fun}^{(n)}$ und $\mathbf{Rel} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Rel}^{(n)}$, wobei $\mathrm{Fun}^{(n)}$, $\mathrm{Rel}^{(n)}$ die n-stelligen Funktions- bzw. Relationssymbole sind. Sei $\equiv \in \mathbf{Rel}^{(2)}$. Wir betrachten die Theorie $Eq_\equiv$, bestehend aus den Axiomen

$$\begin{aligned}
\mathbf{Refl} &: \forall_x (x \equiv x), \\
\mathbf{Sym} &: \forall_{x,y} (x \equiv y \to y \equiv x), \\
\mathbf{Trans} &: \forall_{x,y,z} (x \equiv y \to y \equiv z \to x \equiv z), \\
\Big[\mathbf{Compat}_f &: \forall_{\vec{x},\vec{y}} \big(\vec{x} \equiv \vec{y} \to f\vec{x} \equiv f\vec{y}\big)\Big]_{n\in\mathbb{N}, f\in\mathrm{Fun}^{(n)}}, \\
\Big[\mathbf{Compat}_R &: \forall_{\vec{x},\vec{y}} \big(\vec{x} \equiv \vec{y} \to (R\vec{x} \leftrightarrow R\vec{y})\big)\Big]_{n\in\mathbb{N}, R\in\mathrm{Rel}^{(n)}}.
\end{aligned}$$

(a) Die *Axiome* lassen sich auch durch (Listen von) Regeln realisieren e.g.,

$$\left[\frac{}{t \equiv t} \, (\mathrm{Refl})_\equiv \right]_{t\in\mathbf{Term}}.$$

Geben sie für die restlichen Axiome entsprechende Regeln an.
(b) Zeigen sie, dass für alle Terme $t, s, r \in \mathbf{Term}$, Variablen x und Formeln $A \in \mathbf{Form}$ gilt

$$\begin{aligned}
Eq_\equiv &\vdash t \equiv s \to r[x/t] \equiv r[x/s], \\
Eq_\equiv &\vdash t \equiv s \to \big(A[x/t] \leftrightarrow A[x/s]\big).
\end{aligned}$$

Hinweis Verwenden sie *entweder nur* die Axiome, *oder nur* die entsprechenden Regeln.

Aufgabe 43 (8 Punkte). Wir definieren die *Ackermann-funktion* $A : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mittels

$$\begin{aligned}
A(0, y) &:= y + 1 \\
A(x + 1, 0) &:= A(x, 1) \\
A(x + 1, y + 1) &:= A(x, A(x + 1, y))
\end{aligned}$$

Wir zeigen im folgenden, dass A *nicht elementar* ist. Dabei gehen wir wie folgt vor:

(i) Für elementare Funktionen $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definiere die Funktion $\overline{f} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$\overline{f}\, n := \max\Big\{ f\, \vec{n} \,\Big|\, \sum_{i=1}^{k} n_i \leq n \Big\}.$$

Zeigen sie, dass $\overline{f}$ elementar ist.

(ii) Nun definiere $f \prec G$, G *majorisiert* f, für $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}, G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$f \prec G :\Leftrightarrow \big[\text{alle } n \in \mathbb{N} :\ \overline{f}\, n \leq G\, n\big],$$

Ferner definiere die Menge

$$\mathcal{C} := \Big\{ f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \,\Big|\, k \in \mathbb{N}, \exists_{m \in \mathbb{N}} \big(f \prec A(m, \cdot)\big) \Big\}.$$

Zeigen sie, dass für alle elementaren funktionen f gilt $f \in \mathcal{C}$.

(iii) Zeigen sie, dass A nicht elementar ist.

Abgabe. Mittwoch, 17. Januar 2024, 8:15 (Uni2Work oder in der VL).

Besprechung. Freitag, 19. Januar 2024, 8:30, A027.