Prof. Dr. Helmut Schwichtenberg
Nils Köpp

WS 23/24
December 20, 2023

Mathematische Logik

Blatt 10

Aufgabe 37 (4 Punkte). Die Mengen der *elementaren* und *geometrischen Formeln* **Elem** bzw. **Geom** sind induktiv definiert mittels

$$\begin{aligned} E, F \in \mathbf{Elem} &::= P\vec{t} \mid E \wedge F, \\ G, H \in \mathbf{Geom} &::= P\vec{t} \mid G \wedge H \mid G \vee H \mid \exists_x G \end{aligned}$$

Für $G, H \in \mathbf{Geom}$ mit $\vec{x} = \mathrm{Fv}(G) \cup \mathrm{Fv}(H)$ nennen wir

$$\forall_{\vec{x}}(G \to H)$$

eine *geometrische Implikation.*

(a) Zeigen sie dass für jede geometrische Formel $G \in \mathbf{Geom}$ elementare Formeln $E_0, \dots, E_n$ existieren mit

$$\vdash G \leftrightarrow \exists_{\vec{x}}\big(E_0 \vee \dots \vee E_n\big).$$

(b) Zeigen sie, dass für alle $G, H \in \mathbf{Geom}$ eine Menge elementarer Formeln

$$\{E_i \mid i \le n\} \cup \{F_{im} \mid i \le n, m \le n_i\} \subseteq \mathbf{Elem}$$

existiert mit der Eigenschaft

$$\vdash \forall_{\vec{x}}(G \to H) \leftrightarrow \bigwedge_{i \le n} \Big[\forall_{\vec{x}_i}\Big(E_i \to \exists_{\vec{y}_i}\big[\bigvee_{m \le n_i} F_{im}\big]\Big)\Big].$$

Hierbei sind

$$\bigwedge_{i \le k} A_i := A_0 \wedge \dots \wedge A_k, \qquad \bigvee_{j \le l} B_j := B_0 \vee \dots \vee B_l.$$

Aufgabe 38 (4 Punkte). Zeigen sie, dass die Klasse ε abgeschlossen ist unter *beschränkter Wertverlaufsrekursion*, d.h. für $(H : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}), (k : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}) \in \varepsilon$ und $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} &f(\vec{m}, n) = H\big(n, \langle f(\vec{m}, 0), \dots, f(\vec{m}, n \dot{-} 1)\rangle, \vec{m}\big), \\ &f(\vec{m}, n) < k(\vec{m}, n) \end{aligned}$$

gilt $f \in \varepsilon$.

Aufgabe 39 (4 Punkte). Wir betrachten die Längen- und i-te Projektionsfunktion aus der Vorlesung

$$\mathtt{lh}(n) = \mu_{k \le n}(\mathtt{tl}^{(k)}(a) = 0), \qquad (n)_i = \mathtt{hd}(\mathtt{tl}^{(\mathtt{lh}(n) \dot{-} (i+1))}(n)).$$

Zeigen sie, dass für alle $m = \langle n_0, \ldots n_{k-1} \rangle$ gilt

(a) $\mathtt{lh}(m) = k$,

(b) $(m)_i = n_i$ (alle $i < k$).

Aufgabe 40 (4 Punkte). Wir definieren die elementare Funktion $sub_{\mathcal{T}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mittels beschränkter Wertverlaufsrekursion und Fallunterscheidung:

$$sub_{\mathcal{T}}(k, n) = \begin{cases} n & , \ (n)_0 = \mathrm{sn}(Var) \ \& \ (n)_1 = j + 1 \\ \ulcorner \underline{k} \urcorner & , \ (n)_0 = \mathrm{sn}(Var) \ \& \ (n)_1 = 0 \\ \big\langle \mathrm{sn}(f), sub_{\mathcal{T}}((n)_1, k), \ldots, sub_{\mathcal{T}}((n)_m, k) \big\rangle & , \ (n)_0 = \mathrm{sn}(f) \ \& \ f \in \mathrm{Fun}^{(m)} \\ 0 & , \ \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Zeigen sie, dass für alle Terme $t \in \mathcal{T}$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$sub_{\mathcal{T}}(\ulcorner t \urcorner, k) = \ulcorner t[{}^{x_0}/_{\underline{k}}] \urcorner$$

(b) Beweisen sie, dass eine elementare Funktion $sub_{\mathcal{F}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle Formeln $A \in \mathcal{F}$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$sub_{\mathcal{F}}(\ulcorner A \urcorner, k) = \ulcorner A[{}^{x_0}/_{\underline{k}}] \urcorner.$$

Abgabe. Mittwoch, 10. Januar 2024, 8:15 (Uni2Work oder in der VL).

Besprechung. Freitag, 12. Januar 2024, 8:30, A027.