



Prof. Dr. Helmut Schwichtenberg
Nils Köpp

WS 23/24
November 29, 2023

Mathematische Logik

Blatt 7

Aufgabe 25 (4 Punkte). Sei \mathcal{T} ein intuitionistisches Baummodell. Zeigen sie, dass für alle Formeln A und Variablenbelegungen η in $|\mathcal{T}|$ gilt

- (i) $k \Vdash (\neg A)[\eta] \Leftrightarrow \forall_{k' \succeq k} (k' \nVdash A[\eta])$,
- (ii) $k \Vdash (\neg\neg A)[\eta] \Leftrightarrow \forall_{k' \succeq k} \neg \forall_{k'' \succeq k'} (k'' \nVdash A[\eta])$.

Aufgabe 26 (4 Punkte). Beweisen sie

- (i) $\nVdash \perp \rightarrow P$,
- (ii) $\nVdash_i \neg(P \rightarrow Q) \rightarrow P$.

Aufgabe 27 (4 Punkte). Seien $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}$ Mengen von Formeln. Wir definieren

$$\bar{\Gamma} := \{A \in \mathbf{Form} \mid \Gamma \Vdash A\},$$

wobei $\Gamma \Vdash A \Leftrightarrow$ für alle Baummodelle \mathcal{T} , Knoten k und Variablenbelegungen η

$$\forall_{B \in \Gamma} (\mathcal{T}, k \Vdash B[\eta]) \Rightarrow \mathcal{T}, k \Vdash A[\eta].$$

Zeigen sie

- (i) $\Gamma \subseteq \bar{\Gamma}$,
- (ii) $\Gamma \subseteq \Delta \Rightarrow \bar{\Gamma} \subseteq \bar{\Delta}$,
- (iii) $\bar{\Gamma} = \overline{\bar{\Gamma}}$.
- (iv) Zeigen oder widerlegen sie

$$\overline{\bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta}} = \bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta}.$$

Aufgabe 28 (4 Punkte). Angenommen $\Delta \cup \{\phi\} \subseteq \mathcal{F}$ mit $\Delta \Vdash \phi$. Zeigen sie, dass eine endliche Menge $\Gamma \subseteq \Delta$ existiert mit $\Gamma \Vdash \phi$.

Abgabe. Mittwoch, 6. Dezember 2023, 8:15 (Uni2Work oder in der VL).

Besprechung. Freitag, 8. Dezember 2023, 8:30, A027.