Prof. Dr. Helmut Schwichtenberg
Nils Köpp

WS 23/24
November 22, 2023

Mathematische Logik

Blatt 6

Aufgabe 21 (4 Punkte). Im Kontext von Aufgabe 13 führen wir ein zweistelliges Funktionssymbol $+$ ein, wobei wir $x+y$ anstatt $+\,x\,y$ schreiben. Ferner erweitern wir die zulässigen Regeln um

$$\frac{}{t+\mathbf{0}\equiv t}\,(+)_\mathbf{0} \qquad \frac{}{t+(\mathbf{S}\,s)\equiv \mathbf{S}(t+s)}\,(+)_\mathbf{S}$$

Hierbei sind t, s jeweils beliebige Terme. Zeigen sie mittels Angabe einer Herleitung, entweder *auf Papier* oder in *Minlog* (siehe `ueb06.scm`), jeweils

$$\vdash \forall_x(\mathbf{0}+x\equiv x), \qquad \vdash \forall_x((\mathbf{S}\,x)+y\equiv \mathbf{S}(x+y)),$$
$$\vdash \forall_{x,y}(x+y\equiv y+x).$$

Aufgabe 22 (4 Punkte). Sei $\mathcal{T}=(D, I_0, I_1)$ ein *Baummodell* über T und η eine beliebige *Variablenbelegung* in D. Wir schreiben, abkürzend, $k\Vdash A\eta$ für $\mathcal{T}, k\Vdash A[\eta]$. Zeigen sie die folgenden Aussagen mittels *Induktion* über *Terme* bzw. *Formeln.*
(a) Für alle Terme r, t gilt $\eta(r[x/t]) = \eta_x^{\eta(t)}(r)$.
(b) Für alle Formeln A gilt

$$\Big(k\Vdash A[x/t]\eta\Big) \;\Leftrightarrow\; \Big(k\Vdash A\eta_x^{\eta(t)}\Big)$$

Aufgabe 23 (4 Punkte). Seien R, S zwei nullstellige Relationssymbole. Sei

$$T := \Big\{\langle a_0,\dots,a_{n-1},b_0,\dots,b_{m-1}\rangle \;\Big|\; n,m\in\mathbb{N}\ \&\ \text{alle } i\ (a_i=0, b_i=1)\Big\}.$$

Wir betrachten ein Baummodell $\mathcal{T}=(D, I_0, I_1)$ über T mit

$$\begin{aligned} I_1(S,k) &:= \varnothing \quad (\text{alle } k\in T),\\ I_1(R,\langle 0,\dots 0\rangle) &:= \varnothing,\\ I_1(R,\langle 0,\dots 0,1\dots,1\rangle) &:= \{\varnothing\}. \end{aligned}$$

Man beachte, $I_1(R,k), I_1(S,k)\subseteq\{\varnothing\}$ und nach Definition der Erzwingungsrelations ist e.g.,

$$k\Vdash R \;\Leftrightarrow\; \Big[\text{existiert } n\in\mathbb{N},\ \text{sodass für alle } k'\in T\ \big(k\preceq_n k'\Rightarrow \varnothing\in I_1(R,k')\big)\Big].$$

Zeigen sie, dass für alle $k\in T$ gilt
(a) $k\Vdash (S\to R)$,
(b) $k\Vdash (R\to S)\to R$.

Aufgabe 24 (4 Punkte). Wir definieren die Menge der *negativen Formeln* induktiv durch

$$G, H \in \mathcal{F}^- ::= \bot \mid \neg R\vec{t} \mid \forall_x G \mid A \to G \mid G \wedge H.$$

Dabei ist zu beachten, dass in der vierten Klausel $A \in \mathcal{F}$ eine beliebe Formel ist.

(a) Beweisen sie, dass für alle $G \in \mathcal{F}^-$ gilt

- **(i)** $\vdash \neg\neg G \to G$,
- **(ii)** $\forall_{\vec{x}}(\neg\neg R\vec{x} \to R\vec{x}) \vdash G \Rightarrow \forall_{\vec{x}}(\bot \to R\vec{x}) \vdash G$.

(b) Sei nun $(\cdot)^g$ die *Gentzen-Übersetzung.* Zeigen sie, dass für alle Formeln $A \in \mathcal{F}$ gilt

- **(i)** $A^g \in \mathcal{F}^-$,
- **(ii)** $\vdash_i A \to A^g$.

Abgabe. Mittwoch, 29. November 2023, 8:15 (Uni2Work oder in der VL).

Besprechung. Freitag, 1. Dezember 2023, 8:30, A027.