Prof. Dr. Helmut Schwichtenberg
Nils Köpp

WS 23/24
November 8, 2023

Mathematische Logik

Blatt 4

Aufgabe 13 (4 Punkte). Sei $\equiv$ ein zweistelliges Relations-symbol und $\mathbf{0}, \mathbf{S}$ null- bzw. einstellige Funktionssymbole. Wir schreiben $x \equiv y$ anstatt $\equiv x\, y$. Wir erlauben in Herleitungen die Verwendung folgender Regeln.

$$\dfrac{}{x \equiv x}\,(\mathrm{Refl}_\equiv) \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots M\\ x \equiv y\end{matrix}}{y \equiv x}\,(\mathrm{Sym}_\equiv) \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots M\\ x \equiv y\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots N\\ y \equiv z\end{matrix}}{x \equiv z}\,(\mathrm{Trans}_\equiv)$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots M\\ x \equiv y\end{matrix}}{(\mathbf{S}\,x) \equiv (\mathbf{S}\,y)}\,(\mathrm{Suc}_\equiv) \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots M\\ P\,\mathbf{0}\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[u : P\,x]\\ \vdots N\\ P\,(\mathbf{S}\,x)\end{matrix}}{\forall_x P\,x}\,(\mathrm{Ind})u; x\,(*)$$

wobei in der letzten Regel (Ind) zusätzlich verlangt ist, dass die Variable x in keiner offenen Annahme von N, ausser u, frei vorkommt. Zeigen sie, dass die Formel

$$\mathbf{0} \equiv (\mathbf{S}\,\mathbf{0}) \to \forall_{x,y}\, x \equiv y$$

herleitbar ist.

Aufgabe 14 (4 Punkte). Nach der *Curry-Howard* Korrespondenz können wir Herleitungen (im $\to$-Fragment) wie folgt als als λ-Terme darstellen.

$$\begin{aligned}
(u : A) &\mapsto \mathsf{u}^A,\\
\left[\dfrac{M}{A \to B}\,(\to)^+ u\right] &\mapsto \left(\lambda_{\mathsf{u}} \mathsf{M}^B\right)^{A\to B},\\
\left[\dfrac{M \qquad N}{B}\,(\to)^-\right] &\mapsto \left(\mathsf{M}^{A\to B}\mathsf{N}^A\right)^B,
\end{aligned}$$

Geben sie für die beiden folgenden Formeln jeweils eine Herleitung und den entsprechenden *Herleitungsterm* an.

$$\begin{gathered}
(\neg\neg A \to A) \to (\bot \to B) \to ((A \to B) \to A) \to A,\\
(\neg\neg C \to C) \to (A \to C) \mathbin{\tilde{\vee}} (B \to C) \to A \to B \to C.
\end{gathered}$$

Hinweis. Es genügt, die Formeln der Annahmevariablen anzugeben e.g.,

$$\left[\dfrac{\dfrac{[u_1 : \neg\neg A] \qquad \dfrac{\dfrac{[u_2 : \neg B] \qquad \dfrac{[u_0 : A \to B]\ [v : A]}{B}\,(\to)^-}{\bot}\,(\to)^-}{\neg A}\,(\to)^+ v}{\bot}\,(\to)^-}{(A \to B) \to \neg A \mathbin{\tilde{\vee}} B}\,(\to)^+ u_0, u_1, u_2\right] \mapsto \dfrac{\begin{matrix}\mathsf{u}_0 : A \to B,\\ \mathsf{u}_1 : \neg\neg A,\\ \mathsf{u}_2 : \neg B,\\ \mathsf{v} : A.\end{matrix}}{\lambda_{\mathsf{u}_0}\lambda_{\mathsf{u}_1}\lambda_{\mathsf{u}_2}\Big(\mathsf{u}_1\lambda_{\mathsf{v}}\big(\mathsf{u}_2(\mathsf{u}_0\mathsf{v})\big)\Big)}$$

Aufgabe 15 (4 Punkte). Wir betrachten das $\to, \forall$-Fragment von *Formeln*

$$A, B \in \mathcal{F} ::= Q\vec{t} \;\big|\; A \to B \;\big|\; \forall_x A,$$

und *Herleitungen* $M \in \mathcal{D}_U(A)$, zu lesen als '*M ist eine Herleitung von A mit offenen Annahmen U*', induktiv definiert durch die folgenden Regeln.

$$\begin{aligned}
&& (u : A) \in \mathcal{D}_{\{(u:A)\}}(A),\\
M \in \mathcal{D}_V(B) &\;\Rightarrow\; & \left[\frac{M}{A \to B}\,(\to)^+u\right] \in \mathcal{D}_{V\setminus\{(u:A)\}}(A \to B),\\
\left.\begin{aligned} M \in \mathcal{D}_U(A \to B)\\ N \in \mathcal{D}_V(A)\end{aligned}\right\} &\;\Rightarrow\; & \left[\frac{M \quad N}{B}\,(\to)^-\right] \in \mathcal{D}_{U\cup V}(B),\\
\left.\begin{aligned} M \in \mathcal{D}_{\{(u_i:B_i)|i<n\}}(A)\\ \text{alle } i<n : x \notin \mathrm{FV}(B_i)\end{aligned}\right\} &\;\Rightarrow\; & \left[\frac{M}{\forall_x A}\,(\forall)^+x\right] \in \mathcal{D}_{\{(u_i:B_i)|i<n\}}(\forall_x A),\\
\left.\begin{aligned} M \in \mathcal{D}_U(\forall_x A)\\ t \in \mathcal{T}\end{aligned}\right\} &\;\Rightarrow\; & \left[\frac{M \quad t}{A[x/t]}\,(\forall)^-\right] \in \mathcal{D}_U(A[x/t]).
\end{aligned}$$

Sei P ein n-stelliges Relationssymbol und $C \in \mathcal{F}$ eine Formel, mit freien Variablen $\mathrm{FV}(C) \subseteq \{y_0, \ldots, y_{n-1}\}$, ohne Vorkommen von P in C. Wir definieren $A[{}^P\!/_C]$, die Substitution von P durch C in $A \in \mathcal{F}$, rekursiv mittels

$$\begin{aligned}
P\vec{t}\,[{}^P\!/_C] &:= C[{}^{\vec{y}}\!/_{\vec{t}}],\\
Q\vec{s}\,[{}^P\!/_C] &:= Q\vec{s}, \quad (P \neq Q)\\
(A \to B)[{}^P\!/_C] &:= A[{}^P\!/_C] \to B[{}^P\!/_C],\\
(\forall_x A)[{}^P\!/_C] &:= \forall_x\big(A[{}^P\!/_C]\big).
\end{aligned}$$

Seien nun $A, B_i \in \mathcal{F}$ $(i < m)$ einige Formeln. Beweisen sie

$$B_0, \ldots, B_{m-1} \vdash A \;\Rightarrow\; B_0[{}^P\!/_C], \ldots, B_{m-1}[{}^P\!/_C] \vdash A[{}^P\!/_C].$$

Hinweis. Mit Induktion über Herleitungen.

Aufgabe 16 (4 Punkte). Formalisieren sie die Herleiteitungen aus den Aufgaben 13 & 14 (siehe `ueb04.scm`).

Abgabe. Mittwoch, 15. November 2023, 8:15 (Uni2Work oder in der VL).

Besprechung. Freitag, 17. November 2023, 8:30, A027.