MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Helmut Schwichtenberg
Nils Köpp

WS 23/24
October 18, 2023

Mathematische Logik

Blatt 1

Aufgabe 1 (4 Punkte). Die Mengen der *Terme* $\mathcal{T}$ und *Formeln* $\mathcal{F}$ sind induktiv definiert als

$$\begin{aligned}\mathcal{T} &::= x \mid c \mid f^{(n)}\vec{t},\\ \mathcal{F} &::= P^{(n)}\vec{t} \mid A \to B \mid A \wedge B \mid A \vee B \mid \forall_x A \mid \exists_x A,\end{aligned}$$

wobei f ein n-stelliges Funktionssymbol und P ein Relationssymbol der Stelligkeit $n = |\vec{t}|$ ist. Definieren sie *rekuriv* die Menge der *freien Variablen* $\mathrm{fv}(A)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Die *Höhe* $|\cdot| : \mathcal{F} \to \mathbb{N}$ und *Länge* $\|\cdot\| : \mathcal{F} \to \mathbb{N}$ von Formeln sind rekursiv definiert durch

$$\begin{cases}|P| := 0\\ |A \circ B| := \max(|A|, |B|) + 1\\ |\Box_x A| := |A| + 1\end{cases} \qquad \begin{cases}\|P\| = 1\\ \|A \circ B\| = \|A\| + \|B\|\\ \|\Box_x A\| = \|A\| + 1\end{cases}$$

für P atomar und $\circ \in \{\to, \wedge, \vee\}$ bzw. $\Box \in \{\forall, \exists\}$. Zeigen Sie mit Induktion über Formeln, dass für alle Formeln A gilt

$$\|A\| + 1 \leq 2^{|A|+1}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte). Bestimmen sie jeweils alle *negativen, positiven* und *strikt positiven* Teilformeln von

$$((A \to B) \to A) \to B,$$
$$\exists_x (P\,x \wedge (Q\,x \to \forall_y (P\,y \to Q\,y))).$$

Aufgabe 4 (4 Punkte). Seien $R, \neq$ ein- bzw. zwei-stellige Relationssymbole. Formalisieren sie die folgenden Aussagen

R ist *nicht−leer*,
es gibt *mindestens zwei* Elemente in R,
es gibt *höchstens zwei* Elemente in R,
es gibt *genau zwei* Elemente in R.

Abgabe. Mittwoch, 25. Oktober 2023, 8:15 (Uni2Work oder in der VL).

Besprechung. Freitag, 27. Oktober 2023, 8:30, A027.