Version 23.10.2007 Martin Schottenloher
WS 07/08

Programm zum Seminar

Darstellungstheorie von Matrixgruppen und Lie-Gruppen

Termin und Ort: Dienstag, 14 bis 16 Uhr, B 045.

Ziel, Inhalt, Stil

Das Ziel des Seminars ist es, an wichtige Aspekte der Symmetriegruppen und -algebren in Mathematik und Physik heranzuführen. Dabei wird weniger eine Vollständigkeit der behandelten Themen angestrebt als eine Herausstellung der wichtigsten Tatsachen und Methoden.

Dazu gehören als Ausgangsmaterial:

1. Bekannte Symmetriegruppen in Geometrie und Physik
2. Matrixgruppen: Die klassischen Gruppen
3. Wie kommt es zu (unitären) Darstellungen von Matrixgruppen in der Physik?
4. Irreduzible Darstellungen, die 'Atome' einer Darstellung einer Gruppe
5. Problem: Aufzählung aller irreduziblen Darstellungen
6. Das Beispiel der Permutationsgruppen S_n
7. Das Beispiel SU(2) bzw. SO(3)
8. Die Exponentialabbildung
9. Die infinitesimale Version einer Matrixgruppe: Ihre Lie–Algebra
10. Beziehung zwischen der Darstellungstheorie einer Matrixgruppe und der Darstellungstheorie der zugehörigen Lie–Algebra

Und weiterhin allgemeine Methoden und Resultate wie:

11. Lemma von Schur
12. Maximaler Torus
13. Komplexifizierung von Lie-Gruppen und Lie-Algebren
14. Satz von Peter-Weyl
15. Induzierte Darstellungen und Darstellungstheorie de Lorentzgruppe
16. Universelle Einhüllende
17. Wurzelsysteme und Gewichte
18. Dynkin-Diagramme
19. Weyls Charakterformel
20. Satz von Borel-Weil

Inhalt:

Grundtatsachen zur Darstellungstheorie von Gruppen und Algebren, Matrixgruppen als topologische Gruppen, Exponentialabbildung und Lie–Algebren. Auch: Einfach zusammenhängende Matrixgruppen und universelle Überlagerung, Darstellungstheorie von Lie–Algebren.

Beschreibung der ausgesprochen effizienten Methode, ein vorgegebenes Problem einer Matrixgruppe mittels ihrer zugehörigen Lie–Algebra erfolgreich zu behandeln. Das entspricht dem Vorgehen, infinitesimal an die jeweiligen Probleme heranzugehen und ist in der Physik wie auch in der Geometrie in vielen Bereichen wohlbekannt und erfolgreich.

Klassifikationssätze und komplette Beschreibung aller Darstellungen von einigen Klassen von Matrixgruppen bzw. Matrixalgebren.

Weiterführende Resultate und Konzepte wie Satz von Peter und Weyl, Satz von Borel und Weil, Wurzelsysteme, Universelle Einhüllende, wenn das Interesse daran und die Kapazität dafür besteht.

Durchführung und Stil:

Es soll im Seminar von Beispielen ausgegangen werden, die Theorie lässt sich in den verschiedenen Büchern nachlesen, soll aber exemplarisch sehr sorgfältig im Seminar dargestellt werden. Jeder Teilnehmer hat zwei Vorträge: Einen Kurzvortrag (15 – 20 Minuten) mit einem beispielhaften Charakter und meist ohne Beweise und den eigentlichen Vortrag (60 – 90 Minuten). Die Kurzvorträge werden in der Regel zu Beginn des Semesters gehalten. Sie haben den Sinn, erst einmal ein reichhaltiges Material zusammenzustellen, und das gemeinsame Ausgangswissen der Teilnehmer zu beschreiben. Die Kurzvorträge gehören gewissermaßen zu dem Teil „Matrixgruppen“ im Titel, während die längeren Vorträge dem Teil „Lie-Gruppen“ zuzuordnen sind.

Das Gesamtprogramm ist recht anspruchsvoll oder zumindestens umfangreich. Die Angaben zu den Vorträgen (siehe unten) sind als Leitlinien zu verstehen. Jeder Vortragende ist selbst verantwortlich, was er nun tatsächlich in welcher Ausführlichkeit darstellt. Oft ist es besser weniger und das gründlich zu präsentieren. Gelegentlich ist es sinnvoll, einen durchaus schwierigen Sachverhalt gut zu beschreiben und mit Beispielen zu belegen ohne ihn zu beweisen. Natürlich sollten Sie im Zweifelsfalle mit mir über die genaue Abgrenzung sprechen. In jedem Falle ist eine Inhaltsangabe 14 Tage vor dem Termin des Vortrags bei mir abzugeben.

Die Vorträge werden frei gehalten, ohne Aufzeichnungen in der Hand. Folien oder Powerpoint-Präsentationen können zur Unterstützung hinzugenommen werden. Diskussionen sind ausdrücklich erwünscht.

Es werden erst einmal die ersten 12 (!) Vorträge verteilt. Wer noch nicht berücksichtigt worden ist, kann einen der weiteren Vorträge übernehmen, es besteht aber auch die Möglichkeit, einen mit * gekennzeichneten Vortrag in zwei Sitzungen ausführlicher abzuhandeln, damit nicht zu viel an Stoff dargelegt werden muss. Hier haben Sie die Wahl! Die Einteilung der Vorträge kann auf Wunsch geändert werden, aber bitte sehr bald äußern. In den ersten Septembertagen werden die entsprechenden Ergänzungen und Anpassungen an alle Teilnehmer versandt.

Vorkenntnisse:

Zusätzlich zum Stoff der Grundvorlesungen benötigen wir noch das Tensorprodukt von Vektorräumen, das äußere Produkt und das symmetrische Produkt. Jeder Teilnehmer ist angehalten, sich ein Basiswissen darüber anzueignen, wenigstens im Umfang der Beschreibung in [HE, S. 151-153] oder [FH, Appendix B].

Aus MIII benötigt man den Begriff der (Unter-)Mannigfaltigkeit.

Die Kurzvorträge:

Die meisten Informationen zu den Kurzvorträgen findet man in [He]. Aber auch Vieles in [BD], [Si], [FH], [Sc].

A. Wirkung von Gruppen [Carolin Bernhofer]

Gruppe und topologische Gruppe. Wirkung (= „action“ in [Si, 2-5]), vor allem der Fall einer endlichen Gruppe und viele Beispiele. Beziehung zum Begriff der Darstellung eine Gruppe. Gruppenwirkung unter Beachtung von weiteren Strukturen wie Topologie, Längenmessung, Winkel, Geometrie, Differenzierbarkeit, etc. [Sc]: Symmetrie!

B. Produkte [Darij Grinberg]

Direkte und semidirekte Produkte [Si, 5 ff.] und der Zusammenhang zu Gruppenwirkungen. Allerlei zu Permutationsgruppen S_n und ihre Untergruppen A_n. Speziell S_3, S_4, A_4 (z.B. [FH, Si]).

C. Platonische Gruppen [Maria Landskron]

Endliche Rotationsgruppen und S_n, platonische Gruppen [Si, 11 ff.], Symmetrie!

D. Topologische Gruppen und Komponente der Eins [Nicolaus Schmidt]

Der Begriff der topologischen Gruppe, soweit nicht schon in Vortrag A gebracht, Zusammenhang und Wegzusammenhang. Die (Zusammenhangs-) Komponente der Eins ist wieder eine topologische Gruppe. Das Beispiel $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ ($\mathbb{K}$ ist $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ oder auch der Schiefkörper $\mathbb{H}$ der Quaternionen). Matrixgruppen (das sind bei uns **per definitionem** die abgeschlossenen Untergruppen von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, oder etwas allgemeiner, die abgeschlossenen Untergruppen von $\mathrm{GL}(E)$ mit einem Banachraum E !) sind topologische Gruppen. Als Beispiele die Gruppen $\mathrm{O}(p, q)$, $\mathrm{U}(p, q)$, $\mathrm{O}(n, \mathbb{K})$ und dasselbe mit 'S' davor.

E. Der Fall $\mathrm{SO}(2)$ [.]

Vergleich mit $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und $\mathbb{S}^1$ ($\mathbb{S}^n$ ist die n–Sphäre). Die Darstellungen z^n von $\mathbb{S}^1$, $z^n(\zeta)w = \zeta^n w$, $\zeta \in \mathbb{S}^1$, $w \in \mathbb{C}$. $\mathrm{SO}(2)$ ist die Komponente der Eins von $\mathrm{O}(2)$. Der Torus in beliebiger Dimension: $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$: Kompakt, zusammenhängend und abelsch.

F. Der Fall $\mathrm{SO}(1,1)$ [.]

$\mathrm{SO}^+(1,1)$ als Einskomponente von $\mathrm{SO}(1,1)$. Vergleich mit $\mathrm{O}(1,1)$. Blick auf die Definition der Lorentzgruppe.

G. $\mathrm{SU}(2)$ und $\mathrm{SO}(3)$ I [.]

$\mathrm{SO}(3)$ ist Komponente der Eins von $\mathrm{O}(3)$. $\mathrm{SU}(2)$ und $\mathrm{U}(2)$? $\mathrm{SU}(2)$ und $\mathbb{H}$! $\mathrm{SU}(2)$ ist einfach zusammenhängend. $\mathrm{SU}(2)$ und $\mathbb{S}^3$.

H. $\mathrm{SU}(2)$ und $\mathrm{SO}(3)$ II [Nicolaus Treib]

$\mathrm{SU}(2)$ ist 2-1-Überlagerung von $\mathrm{SO}(3)$. Und ist die universelle Überlagerung, weil einfach zusammenhängend. Zum Beispiel in [BD] oder [Sc].

I. $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ und Lorentzgruppe L [..]

Definition der Lorentzgruppe L (vgl. Vorträge F, G und H). 'Boosts'. SL$(2,\mathbb{C})$ als (universelle) 2-1-Überlagerung von L ([BD, Sc, Sim]).

J. Euklidische Gruppe, Galileigruppe und Poincarégruppe [Pascal Reisert]

Beschreibung als semidirekte Produkte (vgl. Vortrag B) von Gruppen und damit als Matrixgruppen. Steht in elementaren Geometriebüchern und z.B. in [Sc].

K. Darstellungen von Matrixgruppen in Geometrie, KM und QM [Johannes Flake]

Hier soll zusammenfassend (noch einmal) erklärt werden, weshalb Symmetrien durch Darstellungen oder Wirkungen gegeben sind. Beispiel $\mathrm{SO}(3)$: Wenn $SO(3)$ Bewegung ist oder eine Symmetrie in KM bezüglich eines Phasenraumes P, dann wird automatisch eine (rechtsreguläre wie auch eine linksreguläre) Darstellung auf $\mathcal{E}(P) = \{f : P \to \mathbb{K} : f \text{ glatt}\}$ induziert. Analog in QM. Weitere Beispiele aus der Geometrie (euklidische Signatur und Lorentzsignatur und allgemeiner). Physikalische Beispiele! (z.B. in [BR, Sc]

L. Der Fall SU(3): Quarks [Alex Seeholzer, Victor Saase]

The eightfold way [LF, S. 323]: Nur einen Eindruck vermitteln!

M. Der Fall SO(4) [Josef Schröttle]

SU(2) $\times$ SU(2) ist eine 2-1-Überlagerung von SO(4). Weitere 2-1-Überlagerungen [LF, S. 278]: SU$(1,1)$, SU$(1,1)$ $\times$ SU$(1,1)$, SU(4), SL$(4,\mathbb{R})$, SU$(2,2)$. „Oben“ stets einfach zusammenhängende Gruppen.

N. Die symplektischen Gruppen [Ludwig Straub]

Zur Vervollständigung: Sp$(2n, \mathbb{K})$, Sp$(2n)$ wie in [He], vgl. [FH]. Lokale Isomorphismen für kleine n zu bereits bekannten Matrixgruppen [LF, S. 278].

O. Lie-Algebren der Dimension ≤ 3 [Michael Tuttas]

Alle diese Lie-Algebren bis auf Isomorphie und ihr Auftreten als Matrixalgebren, wie in [FH, 133 ff.].

P. Differenzierbarkeit der Komposition []

Beweis, dass die Komposition und die Inversenbildung bei einer Matrixgruppe differenzierbar und sogar analytische sind. Der unendlichdimensionale Fall? Vgl. Vortrag 5.

Die Vorträge:

Die ersten beiden Vorträge bereiten die Basisdefinitionen und -Resultate auf. Vor allem der Stoff von Vortrag 1 kommt im folgenden ständig vor. Die Einzelheiten zu den ersten zwei Vorträgen kann man aus [He, S. 139-183], [BD, S. 66-84], [Su, verstreut auf S. 1-50] und anderswo finden. Wir teilen den Stoff auf entsprechend der Darstellung in [He].

Vortrag 1: Darstellungen, unitäre Darstellungen, irreduzible Darstellungen [Hier wird Ersatz benötigt!]

Nach [He, S. 140-155]: Äquivalenz von Darstellungen in endlicher und in unendlicher Dimension.

Unitäre Darstellungen von topologischen Gruppen (Achtung, die Definition in [He] ist nur für endlichdimensionale Darstellungen gültig, für den unendlichdimensionalen Fall vgl. [Su].)

Beispiele: S_3, natürliche Darstellungen der Matrixgruppen, Rechtsdarstellung, z^n als Darstellungen von $\mathbb{S}^1$.

Reduzibilität, vollständige Reduzibilität. Morphismen, Lemma von Schur.

Diverse neue Darstellungen aus alten: Direkte Summe, Tensorprodukt, symmetrisches Produkt, alternierendes (äußeres) Produkt, kontragrediente (duale) und konjugierte Darstellung.

Gegebenenfalls: Die irreduziblen Darstellungen von $\mathbb{S}^1$ und S_3. Gegebenenfalls mehr Beispiele, vgl. [FH].

Vortrag 2: Invariante Integration, Charaktere, Orthogonalitätsrelationen. [Johannes Flake]

Haar-Maß, speziell für SU(2) explizit. Satz von Peter-Weyl (das Resultat wie in [Su] oder [Si] nur zitieren!).

Die irreduziblen Darstellungen von $\mathbb{S}^1$ und S_3 (soweit nicht in Vortrag 1 bereits behandelt).

Clebsch-Gordan-Koeffizienten. Und dann das eigentliche Thema:

Nach [He, S. 171-179], [Su] und [BD]: Orthogonalitätsrelationen und Charaktere von Darstellungen. Weiteres aus [He, S. 156-169].

Vortrag 3: Die irreduziblen Darstellungen von S_n [Nicolaus Schmidt]

Beispiele S_3, S_4, S_5 [FH und Vortrag 1]. Young-Rahmen, Young-Tableaus, und dann der Satz [FH, S. 44 ff], [He, S.184-188], [Si, S. 95-108], [Ki, S. 262-264].

Vortrag 4: Die Liste aller irreduziblen Darstellungen von SU(2) [Josef Schröttle]

Nach [Su, S. 47-58] mit vollständigen Beweisen. Vgl. auch [BD, S. 84-92].

Vortrag 5*: Exponentialabbildung und Lie-Algebren [Carolin Bernhofer]

Lie-Algebra und Lie-Gruppe. Exponentialabbildung zum Beispiel nach [He, S. 95-120] oder allgemeiner in Banachalgebren. Diese Darstellung allerdings ist zu umfangreich, kürzer ist [Su, S. 59-75]. Vgl. auch [HN], [Bu], [DK] und [BD]. Komposition und Inversenbildung in Matrixgruppen sind stetig differenzierbar und analytisch (auch im unendlichdimensionalen Fall).

Campbell-Hausdorff-Formel (gegebenenfalls ohne Beweis).

Vortrag 6: Die irreduziblen Darstellungen von SO(3) und wie eine Darstellung eine infinitesimale Darstellung induziert. [.]

Etwa nach [Su, S. 82] für SO(3). Allgemein z.B. nach [He, S. 210 ff]. Außerdem evtl. [He, S. 121 ff]. Ist Thema in fast allen genannten Büchern.

Vortrag 7: Young-Tableaus und Brauer-Weyl-Ansatz zur Ermittlung der irreduziblen Darstellungen klassischer Gruppen [Darij Grinberg]

Z.B. in [He, S. 189 ff], siehe auch [We3].

Vortrag 8: Lie-Algebren und Wurzelsysteme [Pascal Reisert]

Zum Beispiel nach [He, S. 220-234]. Auch: [BD S. 183 ff], [Si, S. 177 ff], [Hu] und anderswo.

Vortrag 9: Darstellungen von Lie-Algebren mittels Wurzelsystemen und Gewichte. Der Unitäre Trick [Maria Landskron]

Wie in [He, S. 235 ff]. Der unitäre Trick auch in [Kn, S. 28], [FH, S. 129] und anderswo. Der unitäre Trick nicht in diesem Vortrag, wenn Vortrag 15 gehalten werden sollte.

Vortrag 10*: Der Satz von Peter und Weyl [Nicolaus Treib, Ludwig Straub]

Die Beschreibung aller irreduzibler Darstellungen einer kompakten Gruppe in der rechtsregulären Darstellung. Nach [Su], siehe auch [BD] und [Bu] und andere.

Vortrag 11*: Darstellungstheorie der Lorentzgruppe [Alex Seeholzer]

Ausgehend von Vortrag 10 gilt es, herauszuarbeiten, inwiefern der Fall einer nicht kompakten Gruppe so anders ist. Ziel: Orbits und kleine Gruppen der Poincaré-Gruppe nach [Sim]. Dazu vorher: Induzierte Darstellungen ganz allgemein und Darstellungen von semidirekten Produkten. Die Lorentzgruppe und $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ (vgl. I). Evtl. Spingruppen ([BD, 278 ff.]).

Vortrag 12: Maximaler Torus [Michael Tuttas]

Kompakte zusammenhängende komplexe Lie-Gruppen sind abelsch ([DK, 151]). Maximaler Torus nach [BD, chapt. IV], siehe auch [DK].

Vortrag 13*: Die universelle Einhüllende

Nach [Kn2] und [Hu].

Vortrag 14: Komplexifizierung [Victor Saase]

Nach [Bu]. Evtl. auch unendlichdimensionale Lie-Gruppen und -Algebren und die dort neu auftauchenden Probleme.

Vortrag 15*: Weyls Charakterformel

Nach [Kn2] mit unitärem Trick ([FH, S. 129]). Siehe auch [DK].

Vortrag 16*: Satz von Borel-Weil

Nach [DK] und [Kn].

Literaturhinweise:

Die Literaturliste habe ich in Gruppen aufgeteilt. Zu jedem Buch könnte man eine Menge an Erläuterungen verfassen. Hier in Kürze:

Wünschenswert wäre es gewesen, nur nach einem Buch vorzugehen. Ich habe leider keines gefunden, dass alle Anforderungen erfüllt, wie sie etwa in „Ziel, Inhalt, Stil“ formuliert worden sind.

Beginnen wir mit den Büchern, die einen starken physikalischen Bezug haben:
Am nächsten im Inhalt und in der Darstellung kommt dem Anspruch des Seminarthemas das Buch von Ludwig und Falter [LF]. Es bringt viele interessante Beispiele aus der Physik und es ist auch aus mathematischer Sicht sehr gut geschrieben. Die Physik allerdings erscheint

mir zu schwer, wir können die jeweiligen Theorien nicht voraussetzen. Eine Behandlung des Themas nach [LF] im Seminar müsste sich mehr mit der Physik als mit der Darstellungstheorie auseinander setzen. Dasselbe gilt für das Buch von Simms [Sim], das sich im wesentlichen auf die Darstellungstheorie von SL$(2, \mathbb{C})$ und Anwendungen in der Quantenphysik konzentriert. Teilweise gilt das auch für [BR].

Die anderen beiden unten genannten Bücher mit direktem physikalischen Bezug, [Tu] und [Wa], sind nicht tiefgehend genug oder nicht ausreichend präzise und systematisch aus mathematischer Sicht. In [Sc] findet man elementare Sachverhalte zur Geometrie und zur Physik, die anderswo zu kurz kommen.

Schließlich sind die Bücher [We2], [Wae], [Wi] bahnbrechend und interessant, allerdings etwas veraltet in der Sprechweise und in den Notationen. Auch im Hinblick auf die einfachen und wichtigen Resultate sind diese Werke nicht mehr ganz optimal.

Die moderneren Lehrbücher der Mathematik:
Als Hauptquellen zum Seminar sollen die drei Bücher von Hein [He], Sugiura [Su] und Fulton/Harris [FH] dienen in der Einschätzung, dass die ersten beiden Bücher elementar und ausführlich und doch genügend allgemein und systematisch sind, während das dritte Buch ein wenig abstrakter und schwieriger zu sein scheint. [FH] ist aber sehr stark auf Beispiele ausgerichtet. Wenn nach Meinung der Teilnehmer dieses dritte Buch als gar nicht schwieriger empfunden wird, dann können wir gerne das ganze Seminar nach [FH] ausrichten. Im Übrigen ist [He] eine Spur algebraischer mit Blick auf die klassischen Gruppen und [Su] ist analytischer mit Blick auf die Harmonische Analysis.

Die anderen mathematischen Bücher, die ich aufgezählt habe, sind als (wichtige Ergänzung) gedacht, vor allem im Hinblick auf Beispiele. Im einzelnen:

◦ [BD] ist ein sehr schönes Buch, aber eine Spur allgemeiner als unser Thema, und es geht eine Spur abstrakter und zügiger an die für uns wesentlichen Dinge.

◦ [Bu] gefällt mir gut, es handelt sich um eine neuere Darstellung des Gegenstandes.

◦ [DK] ganz genauso.

◦ [Hu] ist ein Klassiker, das Buch ist sehr algebraisch ausgerichtet, und einige analytische Aspekte fehlen ganz. Das Buch behandelt nur Lie-Algebren, also den infinitesimalen Fall aus unserer Sicht.

◦ [Kn] orientiert sich ebenfalls an Beispielen, ist aber mit Sicherheit zu sehr auf große Resultate ausgerichtet, die wir nicht erreichen wollen und können.

◦ [Kn2] ist eine Weiterführung von [Kn]. Beide Bücher sehr sorgfältig und ausführlich.

◦ [Si] ähnlich zu beurteilen wie [BD], wenn auch mit anderer Ausrichtung. Sowohl [Si] als auch [BD] könnten als Text für das Seminar hergenommen werden.

◦ [Ki] ist in vieles Hinsicht viel allgemeiner und stellt die Darstellungstheorie der Matrixgruppen in einen Rahmen von allgemeiner Darstellungstheorie.

◦ [HN] handelt gar nicht von Darstellungen, ist eine ausführliche und gründliche Beschreibung der Matrixgruppen (und allgemeinerer Lie–Gruppen).

Die „historischen“ Bücher und die „philosophischen“ sind in der untenstehenden Literaturliste aufgelistet, um zu zeigen, dass die Anwendung der Darstellungstheorie eine längere und erfolgreiche Geschichte hat und dass das Thema Symmetrie von übergeordnetes Interesse ist.

Literatur:

Das Wesentliche zum Seminar (allerdings nicht die physikalische Ausprägung) findet man in:

He Hein, W.: Struktur- und Darstellungstheorie der klassische Gruppen. Springer-Verlag, Berlin 1990.

Su Sugiura, M.: Unitary Representations and Harmonic Analysis. Wiley, New York 1975.

FH Fulton, W. - Harris, J.: Representation Theory. Springer-Verlag, New York 1991.

Mathematisch ergänzend:

BD Bröcker, T. - tom Dieck, T.: Representations of Compact Lie Groups. Springer-Verlag, New York 1985.

Bu Bump, D.: Lie Groups. Graduate Texts 225. Springer-Verlag 2004.

DK Duistermaat, J.J. - Kolk, J.A.C.: Lie Groups. Universitext. Springer-Verlag 2000.

HN Hilgert, J. - Neeb, K.-H.: Lie–Gruppen und Lie–Algebren. Vieweg, Braunschweig 1991.

Hu Humphreys: Introduction to Lie algebras and representation theory. Springer, 1978.

Ki Kirillov, A.A.: Elements of the Theory of Representations. Springer-Verlag, Berlin 1976.

Kn Knapp, A.W.: Representation Theory of Semisimple Groups. Princeton, Princeton University Press 1986.

Kn2 Knapp, A.W.: Lie groups beyond an introduction. Birkhäuser, 2002.

Si Simon, B.: Representations of Finite and Compact Groups. AMS, Providence 1996.

Eher physikalisch orientiert:

BR Barut, A.O. - Raczka, R.: Theory of Group Representations and Applications. Polish Scientific Publishers, Warsaw 1977.

LF Ludwig, W. - Falter, C.: Symmetries in Physics. Springer-Verlag, Berlin 1988.

Sim Simms, D.: Lie Groups and Quantum Mechanics. Springer Lecture Notes in Maths 52, New York 1968.

Sc Schottenloher, M.: Geometrie und Symmetrie in der Physik. Vieweg, 1995.

Tu Tung, W.K.: Group Theory in Physics. World Scientific, Singapore 1985.

Wa Wagner, M.: Gruppentheoretische Methoden in der Physik. Vieweg 1998.

Wae v.d. Waerden, B.L.: Group Theory and Quantum Mechanics. 1928.

We2 Weyl, H.: Gruppentheorie und Quantenmechanik. Hirzel-Verlag, Leipzig 1928.

Wi Wigner, E.: Gruppentheorie. Vieweg, Braunschweig 1931.

Historisch, d.h. klassische Werke:

Wae v.d. Waerden, B.L.: Group Theory and Quantum Mechanics. 1928

We2 Weyl, H.: Gruppentheorie und Quantenmechanik. Hirzel-Verlag, Leipzig 1928.

We3 Weyl, H.: The Classical Groups. Princeton, Princeton University Press, 1946.

Wi Wigner, E.: Gruppentheorie. Vieweg, Braunschweig 1931.

Zum Begriff der Symmetrie:

GD Ganz, H. - Decker, R.: Symmetrie und Symmetriebrechung in der Physik. Braunschweig, Vieweg 1991

We1 Weyl, H.: Symmetrie. Birkhäuser, Basel 1955.

Ze Zee, A: Fearful Symmetry. Search for Beauty in Modern Physics. New York. Macmillan 1986.