Martin Schottenloher, Zi. 437 1. September 2002

Programm für das Proseminar

Matrixgruppen und ihre Darstellungen

im Wintersemester 2002/2003

Ziel, Inhalt, Stil

Es ist das Ziel des Proseminars, an wichtige Aspekte der Symmetriegruppen der Physik heranzuführen. Dabei wird weniger eine Vollständigkeit der behandelten Themen angestrebt als eine Herausstellung der wichtigsten Tatsachen und Methoden.

Das sind:

1. Bekannte Symmetriegruppen in der Physik
2. Matrixgruppen - wovon sprechen wir? Die klassischen Gruppen
3. Wie kommt es zu (unitären) Darstellungen von Matrixgruppen in der Physik?
4. Irreduzible Darstellungen, die 'Atome' einer Darstellung einer Gruppe
5. Problem: Aufzählung aller irreduziblen Darstellungen
6. Das Beispiel der Permutationsgruppen S_n
7. Das Beispiel SU(2) bzw. SO(3)
8. Die Exponentialabbildung
9. Die infinitesimale Version einer Matrixgruppe: Ihre Lie–Algebra
10. Beziehung zwischen der Darstellungstheorie einer Matrixgruppe und der Darstellungstheorie der zugehörigen Lie–Algebra

Inhalt:

Der Inhalt ist demzufolge: Grundtatsachen zur Darstellungstheorie von Gruppen, Matrixgruppen als topologische Gruppen, Exponentialabbildung und Lie–Algebren. Soweit möglich auch: Einfach zusammenhängende Matrixgruppen und universelle Überlagerung, Darstellungstheorie von Lie–Algebren.

Minimalziel ist die Beschreibung der ausgesprochen effizienten Methode, ein vorgegebenes Problem einer Matrixgruppe mittels ihrer zugehörigen Lie–Algebra erfolgreich zu behandeln. Das entspricht dem Vorgehen, infinitesimal an die jeweiligen Probleme heranzugehen und ist in der Physik in vielen Bereichen wohlbekannt und erfolgreich.

Stil:

Es soll im Proseminar von Beispielen ausgegangen werden, die Theorie lässt sich in den verschiedenen Büchern nachlesen. Jeder Teilnehmer hat zwei Vorträge: Einen

Kurzvortrag (20 Minuten) mit einem beispielhaften Charakter und den eigentlichen Vortrag (60 – 90 Minuten). Die Kurzvorträge werden in der Regel zu Beginn des Semesters gehalten, und es soll hier viel Zeit zu Diskussionen gelassen werden.

Nicht alle Vorträge müssen gehalten werden, es handelt sich um Vorschläge. In einem minimalen Durchlauf allerdings sind die mit ** gekennzeichneten Vorträge aus meiner Sicht notwendig, die mit * gekennzeichneten sind dann die nächste Wahl. Es geht nicht darum, durch dieses Proseminar mit einem recht anspruchsvollen Stoff eine weitere Bürde im Physikstudium zu schaffen. Daher ist ausnahmsweise ein Mut zur Lücke erlaubt. Das heißt im einzelnen, dass der Vortragende ganze Beweisschritte auslassen kann und dass er auch den Stoff verkürzen kann. Lieber wenig sehr gut verstanden als vieles nur halb.

Die Zuordnung der Vorträge kann auf Wunsch geändert werden, aber bitte diesen Wunsch sehr bald äußern.

Vorkenntnisse:

Zusätzlich zum Stoff der Grundvorlesungen benötigen wir noch das Tensorprodukt von Vektorräumen, das äußere Produkt und das symmetrische Produkt. Dazu bin ich nicht gekommen im Laufe der Vorlesung *Lineare Algebra II*. Jeder Teilnehmer ist angehalten, sich ein Basiswissen darüber anzueignen, wenigstens im Umfang der Beschreibung in [HE, S. 151-153]. Ich habe im übrigen einen entsprechenden Paragrafen in Ergänzung zur Vorlesung für das Internet geschrieben.

Termin:

Termin für das Seminar: Vorschlag meinerseits ist Montag nachmittag, 16 bis 18 Uhr.

Die Kurzvorträge:

Die meisten Informationen zu den Kurzvorträgen findet man in [He].

A.** Topologische Gruppen und Komponente der Eins

Der Begriff der topologischen Gruppe, Zusammenhang und Wegzusammenhang. Die Komponente der Eins ist wieder eine topologische Gruppe. Das Beispiel $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ ($\mathbb{K}$ ist $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ oder auch der Schiefkörper $\mathbb{H}$ der Quaternionen). Matrixgruppen (das sind bei uns **per definitionem** die abgeschlossenen Untergruppen von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$!) sind topologische Gruppen. Die Gruppen $\mathrm{O}(p, q)$, $\mathrm{U}(p, q)$, $\mathrm{O}(n, \mathbb{K})$ und dasselbe mit 'S' davor.

B.** Der Fall SO(2)

Vergleich mit $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und $\mathbb{S}^1$ ($\mathbb{S}^n$ ist die n–Sphäre). Die Darstellungen z^n von $\mathbb{S}^1$, $z^n(\zeta)w = \zeta^n w$, $\zeta \in \mathbb{S}^1$, $w \in \mathbb{C}$. $\mathrm{SO}(2)$ ist die Komponente der Eins von $\mathrm{O}(2)$.

Der Torus in beliebiger Dimension: $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

C.* Der Fall $\mathbf{SO}(1,1)$

$\mathrm{SO}^+(1,1)$ als Einskomponente von $\mathrm{SO}(1,1)$. Vergleich mit $\mathrm{O}(1,1)$. Blick auf die Definition der Lorentzgruppe.

D.** $\mathbf{SU}(2)$ und $\mathbf{SO}(3)$

$\mathrm{SO}(3)$ ist Komponente der Eins von $\mathrm{O}(3)$. $\mathrm{SU}(2)$ und $\mathrm{U}(2)$? $\mathrm{SU}(2)$ und $\mathbb{H}$! $\mathrm{SU}(2)$ ist einfach zusammenhängend. $\mathrm{SU}(2)$ und $\mathbb{S}^3$. $\mathrm{SU}(2)$ ist 2-1-Überlagerung von $\mathrm{SO}(3)$.

E.** $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ und Lorentzgruppe L

Definition der Lorentzgruppe L (vgl. Vorträge C und D). 'Boosts'. $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ als 2-1-Überlagerung von L.

F.* Euklidische Gruppe, Galileigruppe und Lorentzgruppe

Beschreibung als semidirekte Produkte von Gruppen und damit als Matrixgruppen

G.* Darstellungen von Matrixgruppen in KM und QM

Durch Symmetrien induziert. Beispiel $\mathrm{SO}(3)$: Wenn $\mathrm{SO}(3)$ eine Symmetrie in KM bezüglich eines Phasenraumes P ist, dann wird automatisch eine (rechtsreguläre wie auch eine linksreguläre) Darstellung auf $\mathcal{E}(P)$ induziert. Analog in QM. Physikalische Beispiele!

H. Der Fall $\mathbf{SU}(3)$: Quarks

The eightfold way [LF, S. 323]: Nur einen Eindruck vermitteln!

I. Der Fall $\mathbf{SO}(4)$

$\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ ist eine 2-1-Überlagerung von $\mathrm{SO}(4)$. Weitere 2-1-Überlagerungen [LF, S. 278]: $\mathrm{SU}(1,1), \mathrm{SU}(1,1)\times\mathrm{SU}(1,1), \mathrm{SU}(4), \mathrm{SL}(4,\mathbb{R}), \mathrm{SU}(2,2)$. „Oben“ stets einfach zusammenhängende Gruppen.

J. Die symplektischen Gruppen

Zur Vervollständigung: $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{K})$, $\mathrm{Sp}(2n)$ wie in [He], vgl. [FH]. Lokale Isomorphismen für kleine n zu bereits bekannten Matrixgruppen [LF, S. 278].

Die Vorträge:

Die ersten beiden Vorträge bereiten die Basisdefinitionen und -Resultate auf. Vor allem der Stoff von Vortrag 1 kommt im folgenden ständig vor. Die Einzelheiten zu den ersten zwei Vorträgen kann man aus [He, S. 139-183], [BD, S. 66-84], [Su, verstreut auf S. 1-50] und anderswo finden. Wir teilen den Stoff auf entsprechend der Darstellung in [He].

Vortrag 1: Darstellungen, unitäre Darstellungen, irreduzible Darstellungen**

Nach [He, S. 140-155]: Äquivalenz von Darstellungen in endlicher und in unendlicher Dimension.

Unitäre Darstellungen von topologischen Gruppen (Achtung, die Definition in [He] ist nur für endlichdimensionale Darstellungen gültig, für den unendlichdimensionalen Fall vgl. [Su].)

Beispiele: S_3, natürliche Darstellungen der Matrixgruppen, Rechtsdarstellung, z^n als Darstellungen von $\mathbb{S}^1$.

Reduzibilität, vollständige Reduzibilität. Morphismen, Lemma von Schur.

Diverse neue Darstellungen aus alten: Direkte Summe, Tensorprodukt, symmetrisches Produkt, alternierendes (äußeres) Produkt, kontragrediente (duale) und konjugierte Darstellung.

Gegebenenfalls: Die irreduziblen Darstellungen von $\mathbb{S}^1$ und S_3. Gegebenenfalls mehr Beispiele, vgl. [FH].

Vortrag 2: Invariante Integration, Charaktere, Orthogonalitätsrelationen.**

Haar-Maß, speziell für SU(2) explizit. Satz von Peter-Weyl (das Resultat wie in [Su] oder [Si] nur zitieren!).

Die irreduziblen Darstellungen von S^1 und S_3 (soweit nicht in Vortrag 1 bereits behandelt).

Clebsch-Gordan-Koeffizienten.

Nach [He, S. 171-179], [Su] und [BD]: Orthogonalitätsrelationen und Charaktere von Darstellungen. Weiteres aus [He, S. 156-169].

Vortrag 3*: Die irreduziblen Darstellungen von S_n

Beispiele S_3, S_4, S_5 [FH und Vortrag 1]. Young-Rahmen, Young-Tableaus, und dann der Satz [FH, S. 44 ff], [He, S.184-188], [Si, S. 95-108], [Ki, S. 262-264].

Vortrag 4: Die Liste aller irreduziblen Darstellungen von SU(2)**

Nach [Su, S. 47-58]. Vgl. auch [BD, S. 84-92].

Vortrag 5: Exponentialabbildung und Lie-Algebren**

Zum Beispiel nach [He, S. 95-120]. Diese Darstellung allerdings ist zu umfangreich, kürzer ist [Su, S. 59-75]. Vgl. auch [HN] und [BD].

Campbell-Hausdorff-Formel ohne Beweis.

Vortrag 6*: Die irreduziblen Darstellungen von SO(3) und wie eine Darstellung eine infinitesimale Darstellung induziert

Etwa nach [Su, S. 82] für SO(3). Allgemein z.B. nach [He, S. 210 ff]. Außerdem evtl. [He, S. 121 ff]. Ist Thema in fast allen genannten Büchern.

Vortrag 7*: Young-Tableaus und Brauer-Weyl-Ansatz zur Ermittlung der irreduziblen Darstellungen klassischer Gruppen

Z.B. in [He, S. 189 ff], siehe auch [We3].

Vortrag 8: Lie-Algebren und Wurzelsysteme

Zum Beispiel nach [He, S. 220-234]. Auch: [BD S. 183 ff], [Si, S. 177 ff].

Vortrag 9: Darstellungen von Lie-Algebren mittels Wurzelsystemen und der Unitäre Trick

Wie in [He, S. 235 ff]. Der unitäre Trick auch in [Kn, S. 28], [FH, S. 129] und anderswo.

Literaturhinweise:

Die Literaturliste habe ich in Gruppen aufgeteilt. Zu jedem Buch kann man eine Menge erklären. Hier in Kürze:

Wünschenswert wäre es gewesen, nur nach einem Buch vorzugehen. Ich habe leider keines gefunden, dass alle Anforderungen erfüllt, wie sie etwa in „Ziel, Inhalt, Stil“ formuliert worden sind.

Am nächsten im Inhalt und in der Darstellung kommt dem Anspruch des Proseminarthemas das Buch von Ludwig und Falter [LF]. Es bringt viele interessante Beispiele aus der Physik und es ist auch aus mathematischer Sicht sehr gut geschrieben. Die Physik allerdings erscheint mir zu schwer, wir können die jeweiligen Theorien nicht voraussetzen. Eine Behandlung des Themas nach [LF] im Proseminar müsste sich mehr mit der Physik als mit der Darstellungstheorie von Matrixgruppen auseinandersetzen.

Dasselbe gilt für das Buch von Simms [Sim], das sich im wesentlichen auf die Darstellungstheorie von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ und Anwendungen in der Quantenphysik konzentriert.

Teilweise gilt das auch für [BR].

Die anderen beiden Bücher mit direktem physikalischen Bezug, [Tu] und [Wa], sind mir nicht tiefgehend genug oder nicht ausreichend präzise und systematisch aus mathematischer Sicht.

Schließlich sind die Bücher [We2], [Wae], [Wi] bahnbrechend und interessant, allerdings etwas veraltet in der Sprechweise und in den Notationen. Auch im Hinblick auf die einfachen und wichtigen Resultate sind diese Werke nicht mehr ganz optimal.

Daher habe ich mich nach längerem Suchen auf die beiden Bücher von Hein [He] und Sugiura [Su] als Hauptquellen festgelegt in der Einschätzung, dass diese beiden Bücher elementar und ausführlich und doch genügend allgemein und systematisch sind. Dabei ist [He] eine Spur algebraischer mit Blick auf die klassischen Gruppen und [Su] ist analytischer mit Blick auf die Harmonische Analysis.

Die anderen mathematischen Bücher, die ich aufgezählt habe, sind als (wichtige Ergänzung) gedacht, vor allem im Hinblick auf Beispiele. Im einzelnen:

[FH] gefällt mir sehr gut, es passt auch insofern zu unserem Anliegen, als es sich sehr stark an vielen Beispielen orientiert. Ich halte das Buch bzw. den Teil, der unser Proseminar betrifft, aber ein wenig zu abstrakt und zu schwierig. Wenn dieses Urteil nach Meinung der Teilnehmer gar nicht zutrifft, bin ich gerne bereit, das ganze Proseminar auf [FH] auszurichten.

[Kn] orientiert sich ebenfalls an Beispielen, ist aber mit Sicherheit zu sehr auf große Resultate ausgerichtet, die wir nicht erreichen wollen und können.

[BD] ist ein sehr schönes Buch, aber eine Spur allgemeiner als unser Thema, und es geht eine Spur abstrakter und zügiger an die für uns wesentlichen Dinge.

[Si] ähnlich zu beurteilen wie [BD], wenn auch mit anderer Ausrichtung.

[Ki] ist in vieles Hinsicht viel allgemeiner und stellt die Darstellungstheorie der Matrixgruppen in einen Rahmen von allgemeiner Darstellungstheorie.

[HN] handelt gar nicht von Darstellungen, ist eine ausführliche und gründliche Beschreibung der Matrixgruppen (und allgemeinerer Lie–Gruppen).

Die „historischen“ Bücher und die „philosophischen“ sind in der untenstehenden Literaturliste aufgelistet, um zu zeigen, dass die Anwendung der Darstellungstheorie eine längere und erfolgreiche Geschichte hat und dass das Thema Symmetrie von übergeordnetes Interesse ist.

Literatur:

Das Wesentliche zum Proseminar (allerdings nicht die physikalische Ausprägung) findet man in:

He Hein, W.: Struktur- und Darstellungstheorie der klassische Gruppen. Springer-Verlag, Berlin 1990.

Su Sugiura, M.: Unitary Representations and Harmonic Analysis. Wiley, New York 1975.

Mathematisch ergänzend:

BD Bröcker, T. - tom Dieck, T.: Representations of Compact Lie Groups. Springer-Verlag, New York 1985.

FH Fulton, W. - Harris, J.: Representation Theory. Springer-Verlag, New York 1991.

HN Hilgert, J. - Neeb, K.-H.: Lie–Gruppen und Lie–Algebren. Vieweg, Braunschweig 1991.

Ki Kirillov, A.A.: Elements of the Theory of Representations. Springer-Verlag, Berlin 1976.

Kn Knapp, A.W.: Representation Theory of Semisimple Groups. Princeton, Princeton University Press 1986.

Si Simon, B.: Representations of Finite and Compact Groups. AMS, Providence 1996.

Stark physikalisch:

BR Barut, A.O. - Raczka, R.: Theory of Group Representations and Applications. Polish Scientific Publishers, Warsaw 1977.

LF Ludwig, W. - Falter, C.: Symmetries in Physics. Springer-Verlag, Berlin 1988.

Sim Simms, D.: Lie Groups and Quantum Mechanics. Springer Lecture Notes in Maths 52, New York 1968.

Tu Tung, W.K.: Group Theory in Physics. World Scientific, Singapore 1985.

Wa Wagner, M.: Gruppentheoretische Methoden in der Physik. Vieweg 1998.

Wae v.d. Waerden, B.L.: Group Theory and Quantum Mechanics. 1928.

We2 Weyl, H.: Gruppentheorie und Quantenmechanik. Hirzel-Verlag, Leipzig 1928.

Wi Wigner, E.: Gruppentheorie. Vieweg, Braunschweig 1931.

Historisch, d.h. klassische Werke:

Wae v.d. Waerden, B.L.: Group Theory and Quantum Mechanics. 1928

We2 Weyl, H.: Gruppentheorie und Quantenmechanik. Hirzel-Verlag, Leipzig 1928.

We3 Weyl, H.: The Classical Groups. Princeton, Princeton University Press, 1946.

Wi Wigner, E.: Gruppentheorie. Vieweg, Braunschweig 1931.

Zum Begriff der Symmetrie:

GD Ganz, H. - Decker, R.: Symmetrie und Symmetriebrechung in der Physik. Braunschweig, Vieweg 1991

We1 Weyl, H.: Symmetrie. Birkhäuser, Basel 1955.

Ze Zee, A: Fearful Symmetry. Search for Beauty in Modern Physics. New York. Macmillan 1986.