MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. M. Schottenloher
Dr. S. Tappe

SS 2007
Blatt 3

Übungen zur MIIA: Analysis II für Mathematiker

1. Es sei (X, d) ein metrischer Raum, und es sei A eine Teilmenge von X, die der Bedingung $d(x, A) := \sup\{d(x, a) : a \in A\} < \infty$ genügt.
   a) Zeigen Sie, daß für jedes $x \in X$ die Abbildung $d(x, \cdot) : X \to \mathbb{R}_+$ stetig ist.
   b) Zeigen Sie $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$ für alle $x, y \in X$, und folgern Sie, daß $x \mapsto d(x, A)$ stetig ist.
   c) Zeigen Sie: Es ist $d(x, A) > 0$ genau dann, wenn es einen Radius $\varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$ gibt.
   d) Man beweise oder widerlege: Für alle $x \in X$ ist $d(x, A) = d(x, \overline{A})$.

2. Man bestimme $\overline{Z}, \partial Z, \mathring{Z}$ in X für
   a) $X = \mathbb{R}$ und $Z = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n 3^{-n} \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \{0, 2\}\}$, $Z = \mathbb{N}$, $Z = \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$, $Z = [0, 1[\cup]1, 2]$,
   b) $X = \mathbb{C}$ und $Z = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, $Z = \mathbb{S} \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$, $Z = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists k \in \mathbb{N} : |z| = 2^{-k}\}$, $Z = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$, $Z = \{t + it^m \mid t \in]0, 1[\, , m \in \mathbb{R}, m > 0\}$.

3. Es sei $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$d(x, y) := |\arctan x - \arctan y|.$$
   a) Zeigen Sie, daß d eine Metrik auf $\mathbb{R}$ ist.
   b) Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}$ mit dieser Arcustan-Metrik nicht vollständig ist.
   c) Zeigen Sie, daß $\mathcal{T}(d)$ mit der natürlichen Topologie übereinstimmt.

4. Es sei $\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ mit der von $\mathbb{C}$ induzierten Topologie. Der Quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ mit der Projektion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ werde mit der Quotiententopologie (vgl. auch Skript 22.23) versehen, das heißt, eine Teilmenge $W \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ist genau dann offen, wenn $q^{-1}(W)$ offen ist.
   a) Zeigen Sie ausführlich, dass es zu jedem $z \in \mathbb{S}$ eine offene Umgebung W in $\mathbb{S}$ und ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $p^{-1}(W) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} n + I$ gibt, und dass sämtliche Restriktionen $p|_{n+I} : n + I \to W$ Homöomorphismen sind.

b) Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und $\mathbb{S}$ homöomorph sind.
c) Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ und $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ homöomorph sind.

5. Sei $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ die Menge aller reellen Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, für die es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n = 0$ für alle $n \geq n_0$ gibt, und c_0 die Menge aller reellen Nullfolgen.
a) Zeigen Sie, daß die Teilmengen $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, c_0 und ℓ_p für jedes $1 \leq p \leq \infty$ jeweils Untervektorräume des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ aller Folgen sind.
b) Entscheiden Sie, ob für $1 < p < q < \infty$ die folgenden Inklusionen

$$\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \subset \ell_1 \subset \ell_p \subset \ell_q \subset c_0 \subset \ell_\infty \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

gelten und welche dieser Inklusionen strikt sind (mit Beweis!).
c) Zeigen Sie, daß $c_0(\mathbb{R})$ mit der Norm $\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ ein normierter Raum ist.
d) Zeigen Sie $\overline{\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}} = \overline{\ell_1(\mathbb{R})} = c_0(\mathbb{R})$.
Was ändert sich, wenn $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$ ersetzt wird?

6. Seien (X, d) und (Y, d') metrische Räume mit Teilmengen $A \subset X, B \subset Y$. Wir wissen, dass durch $\tilde{d}((x, y), (x', y')) = \max\{d(x, x'), d(y, y')\}$ auf dem Produkt $X \times Y$ eine Metrik $\tilde{d}$ definiert wird, welche die Produkttopologie erzeugt.
a) Zeigen Sie, daß eine Folge $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann in $(X \times Y, \tilde{d})$ gegen $(x_0, y_0) \in X \times Y$ konvergiert, wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (X, d) gegen x_0 und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (Y, d') gegen y_0 konvergieren.
b) Zeigen Sie, daß $(X \times Y, \tilde{d})$ genau dann vollständig ist, wenn (X, d) und (Y, d') es sind.
c) Beweisen oder widerlegen Sie $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.
d) Beweisen oder widerlegen Sie $\partial(A \times B) = \partial A \times \partial B$.
e) Beweisen oder widerlegen Sie $\partial(A \times B) = (\partial A \times B) \cup (A \times \partial B)$.

Bitte Name, Vorname, Matrikel-Nummer und Tutorgruppe angeben.

Es sind nur Einzelabgaben gestattet.

Abgabe: Dienstag, 15.5.2007, 9:00 Uhr, Übungskasten vor der Bibliothek.