Musterlösung zu Blatt 6, Aufgabe 5

I Aufgabenstellung

Es sei E ein Banachraum. Beweisen Sie gründlich, dass für eine rektifizierbare Kurve $\gamma : [a,b] \to E$ die Weglängenfunktion $t \mapsto L(\gamma|_{[a,t]}), t \in [a,b]$ stetig ist.

II Beweisidee

„Worum geht's?": Das Verständnis der Aufgabe, der Gegebenheiten und der Fragestellung ist hier wohl nicht das größte Problem. Gegeben ist in einem Banachraum eine Kurve, also eine stetige Abbildung von einem kompakten Intervall $[a,b]$ ausgehend, die zudem rektifizierbar sein soll, was nichts anderes bedeutet, als dass die in der Vorlesung definierte Länge der Kurve

$$L(\gamma) = L_a^b(\gamma) := \sup_{Z \in \mathcal{Z}([a,b])} \sum_{k=1}^{n} \|\gamma(t_{k-1}) - \gamma(t_k)\|$$

endlich ist, das Supremum also in $\mathbb{R}$ existiert. Da im Laufe des Beweises stets von nur einer Kurve die Rede sein wird, soll das „γ" weggelassen und nur von der Länge $L_x^y := L_x^y(\gamma) = L_x^y(\gamma|_{[x,y]}) = L(\gamma|_{[x,y]})$ $x, y \in [a,b]$ gesprochen werden.
Dabei ist die Menge $\mathcal{Z}([a,b])$ die Menge der Zerlegungen des Intervalls $[a,b]$, wobei eine Zerlegung Z von $[a,b]$ wiederum eine Menge $\{t_0, t_1, ..., t_n\}$ ist mit den Eigenschaften:

$$t_0 = a, t_n = b \text{ und } \forall 0 \le i < j \le n : t_i < t_j \quad .$$

Zu beweisen ist dann, dass die Weglängenfunktion $t \mapsto L_a^t, t \in [a,b]$ (wobei die eben definierte Länge einer Kurve auf einen Teil der gesamten Kurve angewendet wird), stetig in jedem Punkt t ist, dass also in einer ersten Schreibweise

$$\forall (x_n) \in [a,b] : x_n \to t \Rightarrow L_a^{x_n} \to L_a^t$$

oder äquivalent

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in [a,b] : |a - x| < \delta \Rightarrow |L_a^x - L_a^t| < \varepsilon$$

richtig ist (jeweils $\forall t$).

„Wie mach' ich das?": Anschaulich gesprochen und von der zugänglicheren Folgendefinition für Stetigkeit ausgehend, ist zu beweisen, dass für eine gegen t konvergente Folge (x_n) die Weglängen (auf der Kurve) vom Startpunkt a (eigentlich $\gamma(a)$) zu x_n ($\gamma(x_n)$) gegen die Weglänge von a bis t konvergiert. Aus den Permanenzeigenschaften der Weglängenfunktion, die wir anwenden können, wenn die Kurve rektifizierbar ist, wissen wir, dass sich die Weg zwischen zwei Punkten m und n durch einen dritten p, auf der Kurve zwischen beiden liegenden, aufteilen lässt, und dass dann $L_m^n = L_m^p + L_p^n$ gilt. Die eben erwähnte Konvergenz der Weglängen lässt sich dann auch umschreiben zu

$$\forall (x_n) \in [a,b] : \big(x_n \to t \Rightarrow L_a^{x_n} \to L_a^t\big) \Leftrightarrow \big(\, |x_n - t| \to 0 \Rightarrow |L_a^{x_n} - L_a^t| = L_{x_n}^t \to 0\big) \quad .$$

Die letzte nun sogar noch harmloser anmutende Implikation $|x_n - t| \to 0 \Rightarrow L_{x_n}^t \to 0$ ist also zu beweisen. Oder noch einmal anders ausgedrückt: die Weglänge zwischen zwei infinitesimal eng beieinander liegenden Stellen einer Kurve wird infinitesimal klein.
Wenn wir bedenken, dass aus der Stetigkeit der Kurve schon $|x_n - t| \to 0 \Rightarrow |\gamma(x_n) - \gamma(t)| \to 0$ folgt, scheint diese Herausforderung schon so gut wie gelöst, aber...

„Wie komm' ich drauf?“: ... es braucht in diesem Fall zuerst die vielleicht nicht gerade naheliegende Einsicht, dass der Supremumsbegriff in der Weglängenfunktion die zentrale Rolle spielt. Zu dieser Erkenntnis kommt unter Umständen erst, wem ein Beweis allein mit den Begriffen „Stetigkeit von γ“ und abgeleiteten Schlussfolgerungen aus der „Rektifizierbarkeit von γ“ (wie den Permanenzeigenschaften; denn die eigentliche Aussage ist genau der Supremumsbegriff und seine Existenz!) nicht gelingen will. Dann lohnt sich aber die Analyse der eingesetzten Begriffe und es tritt zutage, dass entscheidende Aussagen Konsequenz genau der Existenz eines Supremums sind.

III Lösung

Wir beginnen also bei der **Rektifizierbarkeit** der Kurve, die ja die Existenz eines Supremums formuliert. Der Begriff „Supremum“ hat dabei zwei wesentliche (und für den Beweis unabdingbare) Aspekte: es handelt sich um eine „kleinste obere Schranke“. In einen ε-Formalismus gebracht, bedeutet dies, dass jede um eine beliebig kleines ε kleinere Schranke ungültig ist, also von Werten der Menge übertroffen wird.
Auf das Supremum der Weglänge angewandt folgt damit:

$$L_a^b = \sup_{Z \in \mathcal{Z}([a,b])} \sum_{k=1}^{n} \|\gamma(t_{k-1}) - \gamma(t_k)\|$$
$$\Rightarrow \forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \; \exists Z \in \mathcal{Z}([a,b]) : L_a^b - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{k=1}^{n} \|\gamma(t_{k-1}) - \gamma(t_k)\| \le L_a^b$$

Nun setzt sich aber die Gesamtbogenlänge einer rektifizierbaren Kurve zusammen aus den Einzelbogenlängen auf der Kurve für eine beliebigen Zerlegung. (Der Begriff „Bogenlänge“ wird im Folgenden favorisiert und dem Synonym „Weglänge“ vorgezogen, um eine Unterscheidung

zwischen Geradenstücken und zugehörigen Abschnitten der Kurve deutlich zu machen.) Für eine Zerlegung wird die Gesamtbogenlänge dann angenähert durch einen Geradenzug über die Punkte $\gamma(t_k)$ der Stellen t_k der Zerlegung, jede Einzelbogenlänge also durch die Länge eines Geradenzugs zwischen zwei Punkten der Zerlegung $\gamma(t_{k-1})$ und $\gamma(t_k)$. Über die Qualität der Abschätzung lässt sich zunächst aussagen, dass die Abschätzung nie über der tatsächlichen Bogenlänge liegt, weil die gerade Strecke, die der Abschätzung zugrunde liegt, stets die minimale Bogen-/Weglänge zwischen den Endpunkten liefert (auch einsehbar über die Dreiecksungleichung: beim Einfügen zusätzlicher Punkte kann die Summe der Beträge (der Streckenlängen) nur größer werden oder konstant bleiben, wie gleich noch explizit gezeigt wird).
So ensteht beim Abschätzen für jeden Abschnitt zwischen zwei Punkten der Zerlegung ein „Fehler“ ausschließlich nach unten; da sich die Fehler in der Abschätzung der gesamten Länge also nicht gegenseitig verringern können und aufsummieren, kann aber keiner dieser „Fehler“ größer als $\frac{\varepsilon}{2}$ sein:

$$\Rightarrow \forall 1 \leq k \leq n : L_{t_{k-1}}^{t_k} - \frac{\varepsilon}{2} < \|\gamma(t_{k-1}) - \gamma(t_k)\| \leq L_{t_{k-1}}^{t_k} \quad . \tag{1}$$

für die t_k der Zerlegung Z.
Diese Aussage wird sich nun als Kern zum kompletten Beweis ausbauen lassen, weshalb es sich lohnt kurz zu verharren und sich den genauen Sachverhalt zu vergegenwärtigen. Wir haben festgestellt, dass aus jeder Zerlegung eine Annäherung der Kurvenlänge gewonnen wird, die sich als Summe mehrerer einzelner Annäherungen der Kurve durch Geradenstücke ergibt. Jetzt ist aber jedes Geradenstück kleiner als das zugehörige Kurvenstück oder gleich groß (wenn die Kurve entlang einer Geraden verläuft), die genäherte Gesamtlänge wird also genau um die Summe aller einzelnen Fehler unterhalb der tatsächlichen Kurvenlänge liegen. Weil alle einzelnen Näherungen im Vergleich zu den tatsächlichen Kurvenbogenlängen zu klein sind, können sich die Fehler nicht gegenseitig ausgleichen. Wäre aber nun ein einzelner Fehler, also die Differenz zwischen tatsächlicher Bogenlänge der Kurve und Geradenstück größer als das gesetzte $\frac{\varepsilon}{2}$, so gälte dies damit automatisch auch für die Summe, also die gesamte Näherung.

Wir wollen zu den Stellen der Zerlegung nun noch t hinzufügen (falls es nicht bereits enthalten ist), wodurch die Zerlegung „verfeinert“ wird. Die Dreiecksungleichung ergibt nämlich sofort, dass die zwei neuen Strecken der Annäherung keine kleiner Länge als die ersetzte Strecke haben, der beschriebene „Fehler“ nach unten $\frac{\varepsilon}{2}$ ist also weder insgesamt, noch (wie oben erklärt) für eine Teilstrecke größer geworden

$$\|\gamma(t_{k-1}) - \gamma(t)\| + \|\gamma(t) - \gamma(t_k)\| \geq \|\gamma(t_{k-1}) - \gamma(t_k)\| \quad ,$$

wenn t_{k-1} und t_k die zu t benachbarten Stellen der Zerlegung sind).
Wenn also schon die alte Näherung im Bereich $]L_a^b - \frac{\varepsilon}{2}, L_a^b]$ lag, so muss das auch für die neue

gelten, die ja nicht kleiner wurde, andererseits L_a^b als Supremum aber auch nicht überschreiten konnte.

Von dieser bereits sehr starken Aussage wollen wir jetzt übergehen zu einer gegen t **konvergenten Folge** (x_n), deren Glieder in $[a, b]$ liegen.
Die Konvergenz der Folge erlaubt uns den Schluss, dass es einen Index n_0 gibt, ab dem alle Folgenglieder näher an t liegen als alle festen t_k, also

$$\text{Für } d := \min\{|t - t_k| \;|\forall 1 \leq k \leq n\} > 0 \;\exists n_0 \;\forall n \geq n_0 : |x_n - t| < d \quad ,$$

wobei d für die Zerlegung eine Konstante ist (nämlich der kleinste Abstand einer Stelle t_k der Zerlegung zu t) und womit für alle x_n ab dem Index n_0 gilt:

$$|t - x_n| < d \leq |t - t_k| \;\forall 1 \leq k \leq n \quad .$$

Wir benutzen nun die Eigenschaft der **Stetigkeit** von γ; sie besagt, dass für eine Folge wie die unsere $x_n \to t$ die Funktionswerte $\gamma(x_n) \to \gamma(t)$ konvergieren. Wenn wir aber diese Konvergenz kennen, so muss es Folgenglieder (derer gar unendlich viele und ab einem bestimmten Index n_0' alle) geben, deren Funktionswerte (die zugehörigen Punkte der Kurve) in einer gewählten $\frac{\varepsilon}{2}$-Umgebung zu $\gamma(t)$ liegen, also:

$$\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \;\exists n_0' \;\forall n \geq n_0' : \|\gamma(x_n) - \gamma(t)\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad .$$

Wir wählen schließlich $m := \max\{n_0, n_0'\}$. Für x_m (und die nachfolgenden Folgenglieder) gilt damit (als Ergebnis der beiden letzten Absätze):

$$m \geq n_0 \quad \Rightarrow |t - x_m| < |t - t_k| \;\forall 1 \leq k \leq n \quad , \tag{2}$$

$$m \geq n_0' \quad \Rightarrow \|\gamma(x_m) - \gamma(t)\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad . \tag{3}$$

Summa summarum; die Erkenntnis (2) ist geeignet unsere Zerlegung erneut zu verändern.Wie schon t fügen wir nun x_m als weitere Stellen der Zerlegung hinzu, wiederum die Zerlegung verfeinernd. Aufgrund der Wahl von x_m ist es in der neuen Zerlegung (nach (2)) direkter Nachbar von t, $\|\gamma(x_m) - \gamma(t)\|$ also eine Strecke der Annäherung und analog zu unserem Zwischenergebnis

$$(1) : \forall 1 \leq k \leq n : L_{t_{k-1}}^{t_k} - \frac{\varepsilon}{2} < \|\gamma(t_{k-1}) - \gamma(t_k)\| < L_{t_{k-1}}^{t_k}$$

(für die t_k der Zerlegung Z) folgt jetzt für diese neue Teilstrecke der Abschätzung (für die der „Fehler" im Vergleich zur ursprünglichen Zerlegung ja nicht größer wurde):

$$\begin{aligned} & L^t_{x_m} - \frac{\varepsilon}{2} < \|\gamma(x_m) - \gamma(t)\| < L^t_{x_m} \\ \Rightarrow\ & L^t_{x_m} < \|\gamma(x_m) - \gamma(t)\| + \frac{\varepsilon}{2} <^{(3)} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \\ \Rightarrow\ & L^t_{x_m} < \varepsilon \quad . \end{aligned}$$

Dieser aus (2) und (3) gefolgerte Schluss gelingt nun aber für alle Folgenglieder x_n ab dem Index m; somit existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein solcher Index und, wie gefordert, folgt:

$$L^t_{x_n} \to 0 \quad .$$

Johannes Flake · 10. Juli 2007