Musterlösung zu Blatt 11, Aufgabe 4

I Aufgabenstellung

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x\,y^2}{x^2+y^4}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß f im Nullpunkt $(x,y) = (0,0)$ in alle Richtungen $v \in \mathbb{R}^2$, $\|v\| \neq 0$ Ableitungen besitzt, jedoch nicht total differenzierbar ist.

II Beweisidee

„Worum geht's?“: Augenscheinlich dreht sich hier alles um eine Funktion f in mehreren Veränderlichen mit reellen Bildern. Physikalisch motiviert nennt man eine Funktion $\Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, *Potentialfunktion*. Wie in der Aufgabenstellung verlangt wird, soll man sich hier mit den Begriffen „partielle“ und „totale“ Ableitung beschäftigen.
Um damit arbeiten zu können, müssen diese Buchstabenansammlungen erst einmal definiert werden:

- Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine Funktion und $a, v \in \mathbb{R}^n$.f heißt nun *im Punkt a partiell differenzierbar in v-Richtung*, wenn der Limes

  $$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{1}{h}\left(f(a+h\,v) - f(a)\right)$$

  existiert. Der Grenzwert wird dann als *Richtungsableitung in v-Richtung* $L_v f(a)$ bezeichnet.
  Ferner heißt $f\ldots$

  - …*im Punkt a partiell differenzierbar in j-Richtung*, wenn f (im Punkte a) partiell differenzierbar in e_j-Richtung ist, wobei $e_j = (\delta_j^k)_{1\leq k\leq n} = (\delta_{jk})$ den j-ten Einheitsvektor darstellt. Man schreibt dann:

    $$L_{e_j} f(a) =: \frac{\partial f}{\partial x^j}(a)$$

  - …*im Punkt a partiell differenzierbar*, wenn f (im Punkte a) partiell differenzierbar in alle j-Richtungen ist. (**Achtung**: Das heißt **nicht**, dass f in **alle** Richtungen partiell differenzierbar ist, sondern **nur** in die Richtungen der Einheitsvektoren)
  - …*partiell differenzierbar in* Ω, wenn f in allen Punkten aus Ω partiell differenzierbar ist.

Und nun die totale Differenzierbarkeit:

- Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine Funktion und $a \in \Omega$. f heißt *in a total differenzierbar*, wenn es eine $\mathbb{R}$-lineare Funktion Lf gibt, sodass

$$\lim_{h\to 0, \|h\|\neq 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a) - Lf(h)}{\|h\|} \right) = 0. \tag{1}$$

(Man beachte: die totale Differenzierbarkeit von f ist wesentlich „stärker“ als die partielle Differenzierbarkeit. Denn die Gleichung (1) impliziert, dass für eine Folge $h_n \in \mathbb{R}^n$, $h_n \to 0$, $h_n \neq 0$

$$\left(\frac{f(a+h_n) - f(a) - Lf(h_n)}{\|h_n\|} \right) \to 0.$$

Das heißt im Spezialfall $h_n = t_n\, v$ mit einer positiven Nullfolge $t_n \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{f(a+t_n\, v) - f(a) - Lf(t_n\, v)}{|t_n|\, \|v\|} \to 0 \\ \Leftrightarrow\ & \lim_{n\to\infty} \frac{f(a+t_n\, v) - f(a)}{t_n} = \frac{Lf(v)}{\|v\|} \\ \Leftrightarrow\ & \lim_{t\to 0, t\neq 0} \frac{f(a+t\, v) - f(a)}{t} \quad \text{ex.}) \end{aligned}$$

Also ist jede total differenzierbare Funktion f gleichzeitig auch partiell differenzierbar in alle Richtungen.
Die angegebene Funktion f illustriert nun, dass die Umkehrung nicht gilt: Wir sollen also zeigen, dass unser f im Punkte $(0,0)$ partiell differenzierbar in alle Richtungen ist (d.h. die Richtungsableitung $L_v f(0,0)$ existiert für alle $v \in \mathbb{R}^2, \|v\| \neq 0$), jedoch nicht total differenzierbar.

„Wie mach' ich das?“: Dazu setzen wir unsere Funktionsgleichung von f in die obige Definition der Richtungsableitung ein, und beweisen zunächst, dass der Limes für alle Richtungen $v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$ existiert. Danach möchten wir zeigen, dass f nicht total differenzierbar in $(0,0)$ ist (dazu gibt es einen Katalog an Kriterien von Prof. Schottenloher). Weil die totale Differenzierbarkeit eine so „starke“ Eigenschaft ist, folgt aus ihr u.a. auch die Stetigkeit. Wenn wir also zeigen können, dass f nicht stetig in $(0,0)$ ist (trotzdem partiell differenzierbar in alle Richtungen!), kann f auch nicht total differenzierbar in $(0,0)$ sein.

„Wie komm' ich drauf?“: Am Besten versucht der Leser sich nun selbst an der Aufgabe: Dazu rechne er die Definition der partiellen Differenzierbarkeit für unseren Fall nach und finde außerdem ein geschicktes Kriterium (z.B. das Folgenkriterium mit einer geeigneten Folge, die man am Besten durch Ausprobieren findet), um die Stetigkeit von f zu widerlegen.

III Lösung

Zunächst weisen wir nach, dass f partiell differenzierbar in alle Richtung ist: Sei also $0 \neq v = (r, s) \in \mathbb{R}^2$ unsere Richtung und $0 \neq h \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{h}\left(f((0,0) + h\,v) - f(0,0)\right) = \frac{1}{h}\left(f(hr, hs) - 0\right) = \frac{1}{h}\,\frac{h^3 r\,s^2}{h^2 r^2 + h^4 s^4} = \frac{r\,s^2}{r^2 + h^2 s^4}$$

Unterscheiden wir nun zwei Fälle:

- 1.Fall: $r \neq 0$. Dann gilt:

$$\frac{1}{h}\left(f((0,0) + h\,v) - f(0,0)\right) = \frac{r\,s^2}{r^2 + h^2 s^4} \to \frac{r\,s^2}{r^2} = \frac{s^2}{r} \text{ für } h \to 0.$$

  In diesem Fall exisitert der Limes also.

- 2.Fall: $r = 0$. Wegen $v \neq 0$ folgt sofort: $s \neq 0$. Das heißt:

$$\frac{1}{h}\left(f((0,0) + h\,v) - f(0,0)\right) = \frac{r\,s^2}{r^2 + h^2 s^4} = \frac{0 \cdot s^2}{0^2 + h^2 s^4} = 0 \to 0 \text{ für } h \to 0.$$

  Da hier der Term schon *ohne* den Grenzwert zu betrachten 0 ist, das heißt, sowieso keine h-Abhängigkeit vorhanden ist, erhält man als Limes für $h \to 0$ auch 0. In diesem Fall existiert der Limes also auch.

Damit ist f partiell differenzierbar in alle Richtungen, da es für jedes v eine Richtungsableitung gibt.
Nun wollen wir noch die Stetigkeit widerlegen, in dem wir eine Folge $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ mit $(x_n, y_n) \to 0$ finden, für die aber gilt:

$$f(x_n, y_n) \not\to 0$$

(An dieser Stelle kann der Leser noch einmal selbst sein Glück im Folgen-Finden versuchen)

Sei also zum Beispiel $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})$. Dann ist:

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}, \text{ für } n \to \infty$$

Damit geht $f(x_n, y_n)$ gegen $\frac{1}{2}$, obwohl die Stetigkeit verlangt, dass für eine Nullfolge (x_n, y_n) der Funktionswert $f(x_n, y_n)$ stets gegen $f(0,0) = 0$ konvergiert. Das tut er aber nicht. Und das ist auch gut so. Denn jetzt wissen wir: f ist in $(0,0)$ nicht stetig, d.h. es kann dort auch nie und nimmer total differenzierbar sein.

Ludwig Straub · 10. Juli 2007