Musterlösung zu Blatt 9, Aufgabe 3

Dieser Anhang enthält den Versuch einer Antwort auf die erweitere Fragestellung bezüglich der Konvergenzradien in Musterlösung 9.3. Er ist knapper und sicher mathematisch etwas anspruchsvoller gehalten und verwendet aus der Musterlösung 9.3 Bekanntes. Die Autoren können trotz großer Sorgfalt Lücken oder Fehler nicht vollständig ausschließen, hoffen aber, in jedem Fall einige interessante Überlegungen und Denkanstöße geliefert zu haben.

I Aufgabenstellung

Geben Sie jeweils ein Beispiel von Potenzreihen $\sum a_n T^n$ und $\sum b_n T^n$ an, sodass der Konvergenzradius

a) der Summe der Potenzreihen

b) des Cauchy-Produkts der Potenzreihen

größer ist als $\min\{\varrho_a, \varrho_b\}$, wobei ϱ_a der Konvergenzradius von $\sum a_n T^n$ und ϱ_b derjenige von $\sum b_n T^n$ ist.

II Variationen, Verallgemeinerungen, Abschwächungen

Zwei interessante Fragestellungen:
Ist es möglich,

a) Beispiele zu finden, sodass ϱ_{a+b} bzw. ϱ_{ab} kleiner als $\min\{\varrho_a, \varrho_b\}$ ist?

b) für jede reelle Zahl k Beispiele zu finden, sodass ϱ_{a+b} bzw. ϱ_{ab} gleich $k \cdot \min\{\varrho_a, \varrho_b\}$ ist?

1. $\underline{\varrho_{a+b} \geq \min\{\varrho_a, \varrho_b\}}$

Wird die Potenzreihe der Summe $a_n + b_n$ betrachtet, so ist in Bezug auf a) wegen

$$\sum (a_n + b_n) t^n = \underbrace{\sum a_n t^n}_{\to x_t \text{ für } |t|<\varrho_a} + \underbrace{\sum b_n t^n}_{\to y_t \text{ für } |t|<\varrho_b} \to x_t + y_t \text{ für } |t| < \min\{\varrho_a, \varrho_b\}$$

klar, dass der Konvergenzradius nie kleiner als $\min\{\varrho_a, \varrho_b\}$ werden kann:

$$\varrho_{a+b} \geq \min\{\varrho_a, \varrho_b\}. \tag{1}$$

Alternative: Da die Wurzelfunktion konvex ist, folgt mit der Jensenschen Ungleichungen und der Dreiecksungleichung :

$$f\left(\sum x\right) \leq \sum f(x)$$

Also

$$\sqrt[n]{|a_n + b_n|} \leq \sqrt[n]{|a_n| + |b_n|} \leq \sqrt[n]{|a_n|} + \sqrt[n]{|b_n|}$$

Damit ergibt sich dann ebenfalls, dass $\varrho_{a+b} \geq \min\{\varrho_a, \varrho_b\}$.

2. Potenzreihen für beliebige k und deren Summe

Für Teilfrage b) und jedes $k \geq 1$ ergibt sich etwa mit

$$\begin{aligned}
&p \in \mathbb{R}, p > 1 \\
&a_n := p^n \Rightarrow \varrho_a = \frac{1}{p} \\
&b_n := -p^n + \left(\frac{p}{k}\right)^n \Rightarrow^{(1)} \varrho_b \geq \min\left\{\frac{1}{p}, \frac{k}{p}\right\} = \frac{1}{p} \Rightarrow \min\{\varrho_a, \varrho_b\} = \frac{1}{p} \\
&a_n + b_n = \left(\frac{p}{k}\right)^n \Rightarrow \varrho_{a+b} = \frac{k}{p} = k \cdot \frac{1}{p} = k \cdot \min\{\varrho_a, \varrho_b\}
\end{aligned}$$

eine Lösung.

Besonders anschaulich ist dies mit $p := k$, also $a_n := k^n$ und $b_n := 1 - k^n$.

Dann ist für $k > 1$

$$\begin{aligned}
\varrho_a &= \frac{1}{\limsup\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \frac{1}{\limsup k} = \frac{1}{k} = \min\{\varrho_a, \varrho_b\} \\
\varrho_b &= \frac{1}{\limsup\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|} = \frac{1}{\limsup\left|\frac{1-k^{n+1}}{1-k^n}\right|} = \frac{1}{k} = \min\{\varrho_a, \varrho_b\},
\end{aligned}$$

für $k = 1$:

$$\begin{aligned}
\varrho_a &= \frac{1}{\limsup\left|\sqrt[n]{a_n + 1}\right|} = \frac{1}{\limsup\left|\sqrt[n]{k^n}\right|} = \frac{1}{\limsup k} = \frac{1}{k} = \min\{\varrho_a, \varrho_b\} \\
\varrho_b &= \frac{1}{\limsup\left|\sqrt[n]{b_n + 1}\right|} = \frac{1}{\limsup\left|\sqrt[n]{1 - k^n}\right|} = \frac{1}{0} = \infty
\end{aligned}$$

Entsprechend ist dann

$$\varrho_{a+b} = \frac{1}{\limsup\left|\frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{a_n+b_n}\right|} = \frac{1}{\limsup\left|\frac{k^{n+1}+1-k^{n+1}}{k^n+1-k^n}\right|} = \frac{1}{\limsup\left|\frac{1}{1}\right|} = 1$$

Somit ist $\varrho_{a+b} = k \cdot \min\{\varrho_a, \varrho_b\}$ für $k \geq 1$.

Spezialfälle: Man wähle $a_n = b_n := n^n$, woraus dann $\varrho_{a+b} = \varrho_a = \varrho_b = \min\{\varrho_a, \varrho_b\} = 0$ folgt. Ein Beispiel für jedes denkbare (sogar negative) $k \in \mathbb{R}$; $k \cdot 0 = 0$.

Für $a_n := n^n$ und $b_n := 1 - n^n$ ist $\varrho_a = \varrho_b = \min\{\varrho_a, \varrho_b\} = 0$ und $\varrho_{a+b} = 1$ und es lässt sich kein endliches k angeben.

Für $k < 1$ existieren, von der divergierenden Lösung in „Spezialfälle“ abgesehen, nach 1. keine weiteren Beispiele.

2. Potenzreihen für beliebige k und deren Cauchyprodukt

Ähnlich kann man auch für das Cauchyprodukt verfahren.

Zunächst einige Beispielsrechnungen, die den Beweis später vorbereiten. Will man nämlich

ähnlich wie in 1. verfahren, so ist zu erkennen, dass diese Möglichkeit zunächst nicht ans Ziel führt.
[Dieser Teil kann zur Übung im Umgang mit Potenzreihen genutzt werden, soll aber nur als Motivation dienen für den folgenden Beweis.]

Die Konvergenzradien eines Cauchyprodukts kann man für beliebige Potenzen wie folgt angeben: Sei $a_n := a^n$, $b_n := b^n$ mit $a, b \in \mathbb{R},\ a > b > 0$, dann ist

$$\varrho_a = \frac{1}{a},\ \varrho_b = \frac{1}{b} \Rightarrow \min\{\varrho_a, \varrho_b\} = \frac{1}{a}$$

$$\begin{aligned}
&\limsup \sqrt[n]{\left|\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}\right|} = \limsup \sqrt[n]{\sum_{j=0}^{n} a^j b^{n-j}} = \limsup \sqrt[n]{\sum_{j=0}^{n} a^j \frac{b^n}{b^j}} \\
= \ &\limsup \sqrt[n]{b^n \sum_{j=0}^{n} \frac{a^j}{b^j}} = b \cdot \limsup \sqrt[n]{\sum_{j=0}^{n} \left(\frac{a}{b}\right)^j} = b \cdot \limsup \sqrt[n]{\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} - 1}{\frac{a}{b} - 1}} \\
= \ &b \cdot \limsup \frac{\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} - 1}}{\sqrt[n]{\frac{a}{b} - 1}} = b \cdot \frac{a}{b} \Rightarrow \varrho_{ab} = \frac{1}{a} = \min\{\varrho_a, \varrho_b\}
\end{aligned}$$

Einfachstes Beispiel dieser Art sind wohl $a_n := 1^n = 1$ und $b_n := b^n,\ 1 > b > 0$. Für $n \to \infty$ gilt dann: $\sqrt[n]{|a_n|} \to 1$ und $\sqrt[n]{|b_n|} \to b$, also

$$\varrho_a = \frac{1}{\limsup 1} = 1$$

$$\varrho_b = \frac{1}{\limsup b} = \frac{1}{b}$$

Es berechnet sich dann ϱ_{ab} wie folgt:

$$\begin{aligned}
\varrho_{ab} &= \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\left|\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}\right|}} = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\left|\sum_{j=0}^{n} b^{n-j}\right|}} = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\left|\sum_{j=0}^{n} \frac{b^n}{b^j}\right|}} \\
&= \frac{1}{b \cdot \limsup \sqrt[n]{\left|\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{b^j}\right|}} = \frac{1}{b \cdot \frac{\limsup \sqrt[n]{|1-(1:b)^{n+1}|}}{\limsup \sqrt[n]{|1-(1:b)|}}} = \frac{1}{b \cdot \frac{\frac{1}{b}}{1}} = 1 = \min\{\varrho_a, \varrho_b\}
\end{aligned}$$

<u>Spezialfall:</u> Für $b_n := n^n$ und $a_n := n^n$, ein weiteres Beispiel, ist

$$\begin{aligned}
&\limsup \left|\sqrt[n]{\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}}\right| = \limsup \left|\sqrt[n]{\sum_{j=0}^{n} n^j n^{n-j}}\right| = \limsup \left|\sqrt[n]{(n+1)n^n}\right| \\
&= \limsup |n| = \infty \\
&\Rightarrow \varrho_{ab} = \varrho_a = \varrho_b = \min\{\varrho_a, \varrho_b\} = 0 = k \cdot \min\{\varrho_a, \varrho_b\} \quad \forall\, k \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Um ein etwas aufwändigeres Beispiel anzugeben, betrachte man die Inversen der Potenzreihen.

Einschub

Dazu nutze man die Eigenschaften der Laurentreihen aus Aufgabe 4, Blatt 3. Dort wurde das Inverse einer Laurentreihe bestimmt mit $(a_n) \cdot (b_n) = 1 \Leftrightarrow (b_n) = (a_n)^{-1} = ...$:

$$b_{-n_0} := \frac{1}{a_{n_0}};\ b_{-n_0+k} := -\frac{1}{a_{n_0}} \sum_{i=1}^{k} a_{n_0+i} b_{-n_0+k-i}$$

im vorliegenden Fall mit $n_0 = 0$:

$$b_0 := \frac{1}{a_0};\ b_k := -\frac{1}{a_0} \sum_{i=1}^{k} a_i b_{k-i}\ .$$

Da wir hier allerdings Potenzreihen betrachten, müssen wir auch den Ring der Potenzreihen, einen Unterring der Laurentreihen, betrachten. Offensichtlich ist die multiplikative Gruppe dann genau $R[[X]]^\times = \left\{P = \sum_{i=0}^\infty a_i X^i | a_0 \neq 0\right\}$, da für $a_0 = 0$ Division durch 0. Im Folgenden soll eine solche invertierbare Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty a'_n X^n \neq 0$ und ihr multiplikatives Inverses $\sum_{n=0}^\infty b'_n X^n$ betrachtet werden, wobei $a'_n = p^n$ für ein $p \in \mathbb{R}^+$ gewählt werde.
Da $\sum_{n=0}^\infty b'_n X^n = \frac{1}{\sum_{n=0}^\infty a'_n X^n}$ ist der Konvergenzradius der inversen Potenzreihe ∞, denn für jedes X geht $\sum_{n=0}^\infty a'_n X^n$ nicht gegen 0, der Kehrwert also nicht gegen ∞. Ändert man die Potenzreihen leicht ab, so kann man mit Hilfe dieser Eigenschaft den Konvergenzradius bestimmen.
So seien die Koeffizientenfolgen (a_n) und (b_n) definiert mit $a_n := a'_n = p^n$ und $b_n := b'_n + \left(\frac{p}{\lambda}\right)^n$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Es lässt sich dann umformen:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^\infty b_n X^n &= \sum_{n=0}^\infty \left(b'_n + \left(\frac{p}{\lambda}\right)^n\right) X^n = \sum_{n=0}^\infty b'_n X^n + \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{p}{\lambda}\right)^n X^n = \\
&= \frac{1}{\sum_{n=0}^\infty a'_n X^n} + \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{p}{\lambda}\right)^n X^n = \sum_{n=0}^\infty b'_n X^n + \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{p}{\lambda}\right)^n X^n.
\end{aligned}$$

Weil oben schon gezeigt wurde, dass $\sum b'_n X^n$ stets konvergiert, hat lediglich die Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty \left(\frac{p}{\lambda}\right)^n X^n$ Einfluss auf den Konvergenzradius. Dieser ergibt sich dann zu:

$$\varrho_b = \left(\limsup \sqrt[n]{\left|\left(\frac{p}{\lambda}\right)^n\right|}\right)^{-1} = \frac{\lambda}{p}.$$

Der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^\infty a_n X^n$ ist

$$\varrho_a = \left(\limsup \sqrt[n]{|p^n|}\right)^{-1} = \frac{1}{p}$$

Für das Cauchyprodukt erhält man

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n\right) = \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(b'_n + \left(\frac{p}{\lambda}\right)^n\right) X^n\right) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k} a_n\left(b'_{k-n} + \left(\frac{p}{\lambda}\right)^{k-n}\right) X^k = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{k} a_n b'_{k-n} X^k + \sum_{n=0}^{k} a_n \left(\frac{p}{\lambda}\right)^{k-n} X^k\right) = \\
&= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k} a_n b'_{k-n} X^k}_{\text{Produkt der invertierbaren Potenzreihen}} + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k} a_n \left(\frac{p}{\lambda}\right)^{k-n} X^k = \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k} p^n \left(\frac{p}{\lambda}\right)^{k}\left(\frac{p}{\lambda}\right)^{-n} X^k = \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{k}\left(\frac{p}{\lambda}\right)^{k}\lambda^n\right) X^k
\end{aligned}$$

Der Konvergenzradius ist dann

$$\begin{aligned}
\varrho_{ab} &= \left(\limsup \sqrt[k]{\left|\sum_{n=0}^{k}\left(\frac{p}{\lambda}\right)^{k}\lambda^n\right|}\right)^{-1} = \left(\limsup \left|\frac{p}{\lambda}\right| \cdot \sqrt[k]{\left|\sum_{n=0}^{k}\lambda^n\right|}\right)^{-1} = \\
&= \left(\left|\frac{p}{\lambda}\right| \cdot \limsup \sqrt[k]{\left|\frac{\lambda^{k+1}-1}{\lambda-1}\right|}\right)^{-1} = \\
&= \frac{\lambda}{p}\cdot(\limsup|\lambda|)^{-1} \vee \frac{\lambda}{p}(\limsup|1|)^{-1}
\end{aligned}$$

Der Konvergenzradius ϱ_{ab} ist also für $\lambda \leq 1$ genau $\frac{\lambda}{p}$ und für $\lambda > 1$ genau $\frac{1}{p}$.

$$\ldots = \min\{\varrho_a, \varrho_b\}$$

Ende Einschub

Im Folgenden soll nun eine umfassende Antwort auf Frage b) und damit auch auf a) gegeben werden. Wie in diesen Beispielen deutlich wird, scheint k nur zwei verschiedene Werte anzunehmen, 1 und ∞. Um dies zu zeigen, nutze man folgenden Satz (siehe 12.1, Skript):

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b$ konvergente Reihen und sei $\sum a_n$ zudem absolut konvergent. Dann ist das Cauchyprodukt $\sum c_n$ konvergent mit dem Reihenwert ab:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) = ab.$$

Seien nun zwei Potenzreihen gegeben, wie im obigen Satz mit Konvergenzradien ϱ_a, ϱ_b, innerhalb derer sie definitionsgemäß absolut konvergieren, dann gilt

(a) Für $x \in]-\varrho_a, \varrho_a[$ ist
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n =: a(x) < \infty$

(b) Für $y \in]-\varrho_b, \varrho_b[$ ist
$\sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n =: b(y) < \infty$

(c) $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = a(z)b(z) < \infty$ dann, wenn $a(x) < \infty$ und $b(x) < \infty$, also $|z| < \varrho_a$ und $|z| < \varrho_b \Rightarrow \varrho_{ab} = \min\{\varrho_a, \varrho_b\}$, also $\varrho_{ab} = 1 \cdot \min\{\varrho_a, \varrho_b\}$ mit $k = 1$.

Wie Sie sicherlich feststellen werden, ist Punkt c) noch nicht vollständig. Denn wenn $b_n = 0$ Nullfolge ist, folgt $a(z)b(z) < \infty$ auch für beliebig große $a(z)$, denn $\forall i, j \in \mathbb{N} : a_i b_j = 0$. Folglich ist dann $z \in I_2 = \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \varrho_{ab} = \infty$.

Wie gezeigt wurde, gilt die Behauptung aus b) für k Element eines beliebigen Körpers, sogar Rings, allerdings in dem sehr trivialen Fall, dass alle Konvergenzradien 0 werden (Spezialfall). Ansonsten ist $k \in \{1, \infty\}$.

Pascal Reisert & Johannes Flake, 17. März 2007