Musterlösung zu Blatt 9, Aufgabe 2

I Aufgabenstellung

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge reeller Zahlen, die gegen Null konvergiert.

(a) Zeigen Sie für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1$ und alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \leq m$

$$\left|(1-z)\sum_{k=n}^{m} a_k z^k\right| \leq 2a_n.$$

(b) Folgern Sie, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1, z \neq 1$ konvergiert.

II Beweisidee

„Worum geht's?“: Gegenstand der Beweise in dieser Aufgabe sind offenbar ganz allgemein Potenzreihen, deren Koeffizientenfolge a_n eine bestimmte Bedingung erfüllt: Sie soll eine monoton fallende Nullfolge (d.h. gegen 0 konvergente Folge) sein.
Für Folgen dieser Art soll in Aufgabenteil (a) eine Ungleichung beweisen werden, aus der sich dann in Aufgabenteil (b) eine Abschätzung ergibt, mit der wiederum die Konvergenz der Potenzreihe (mit einem Konvergenzradius von mindestens 1) über das Cauchy-Kriterium zu zeigen ist.

„Wie mach' ich das?“: In Teilaufgabe (a) ist es wichtig, die Terme sauber abzuschätzen und mit Begriffen wie *Dreiecksungleichung* oder *Teleskopsumme* umgehen zu können:

- Eine *Teleskopsumme* ist eine Summe aus vielen Summanden, in welcher sich jedoch die mittleren Summanden wegheben: Die Summe

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{m}(a_{k-1}-a_k) &= (a_n-a_{n+1})+(a_{n+1}-a_{n+2})+(a_{n+2}-a_{n+3})+\ldots+(a_{m-1}-a_m) = \\ &= a_n - a_m\end{aligned}$$

  ist zum Beispiel eine Teleskopsumme.

Für die Aufgabe (b) ist es dagegen wichtig, die Kriterien für die Konvergenz komplexer Reihen genau zu kennen. Da wäre etwa das bereits erwähnte Cauchy-Kriterium:

- Eine Reihe $\sum a_k$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem beliebigen $\varepsilon > 0$ einen Index n_0 gibt, mit dem gilt:

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_{n_0} \text{ und } m \in \mathbb{N} \text{ mit } m \geq n$$

Dieses Kriterium reicht aus, um die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1, z \neq 1$ zu beweisen.

„Wie komm' ich drauf?": Es ist verständlich, dass manchmal Verwirrung wegen der vielen Kriterien herrscht, wenn gefordert ist, die Konvergenz einer Reihe zu zeigen; doch gerade in diesem speziellen Fall ist es wichtig genau hinzusehen: Hier geht es um eine Reihe, deren Teilsummen $\sum_{k=n}^{m} a_k z^k$ mit steigender unterer Grenze des Summationsindex n immer besser abgeschätzt werden können (weil a_n auf der rechten Seite des Ungleichheitszeichens mit steigendem a_n immer kleiner wird). Eine solche Reihe ist ein typischer Fall für das Cauchy-Kriterium.

III Lösung

- Zunächst wird der abzuschätzende Term mithilfe einer Verschiebung des Summationsindex i (in der zweiten Summe) umgeformt:

$$\begin{aligned} \left|(1-z)\sum_{k=n}^{m} a_k z^k\right| &= \left|\sum_{k=n}^{m} a_k z^k - z\cdot\sum_{k=n}^{m} a_k z^k\right| = \left|\sum_{k=n}^{m} a_k z^k - \sum_{k=n}^{m} a_k z^{k+1}\right| \\ &= \left|\sum_{k=n}^{m} a_k z^k - \sum_{k=n+1}^{m+1} a_{k-1} z^k\right| = \ldots \end{aligned}$$

Durch Ausgliederung des ersten Summanden der ersten Summe und des letzten Summanden der zweiten Summe erhält man also mit der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} \ldots &= \left|a_n z^n + \sum_{k=n+1}^{m} a_k z^k - \sum_{k=n+1}^{m} a_{k-1} z^k - a_m z^{m+1}\right| \\ &= \left|a_n z^n + \sum_{k=n+1}^{m} (a_k z^k - a_{k-1} z^k) - a_m z^{m+1}\right| \\ &\leq |\,a_n z^n| + \left|\sum_{k=n+1}^{m} (a_k z^k - a_{k-1} z^k)\right| + |\,(-a_m) z^{m+1}| = \ldots \end{aligned} \tag{1}$$

Offensichtlich ist $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, da für eine monoton fallende Folge mit Limes $a = 0$ gilt:

$$a_n \geq a_{n+1} \geq a_{n+2} \geq \ldots \geq a = 0$$

Und außerdem:

$$a_{k-1} - a_k \geq 0, \quad \text{weil } a_{k-1} \geq a_k$$

Also kann (**??**) nun weiter abgeschätzt werden: (Man bedenke hierbei, dass $|z| \leq 1$ ist):

$$\begin{aligned} \ldots &= a_n|\,z^n| + \left|\sum_{k=n+1}^{m} z^k\,(a_k - a_{k-1})\right| + a_m|\,z^{m+1}| \\ &\leq a_n|\,z|^n + \sum_{k=n+1}^{m} \underbrace{|\,z^k\,(a_k - a_{k-1})|}_{=|\,z|^k\,(a_{k-1}-a_k)} + a_m|\,z|^{m+1} \\ &\leq a_n \cdot 1^n + \sum_{k=n+1}^{m} 1^k \cdot (a_{k-1} - a_k) + a_m \cdot 1^m \end{aligned}$$

Diese Summe ist – wie bereits unter „Beweisidee" erläutert – eine Teleskopsumme und hat den Wert $(a_n - a_m)$. Damit ergibt sich insgesamt folgende Abschätzung:

$$\left|(1-z)\sum_{k=n}^{m} a_k z^k\right| \le a_n + \sum_{k=n+1}^{m} (a_{k-1} - a_k) + a_m = a_n + (a_n - a_m) + a_m = 2\,a_n$$

q.e.d.

- Durch eine leichte Umformung der Aussage aus Aufgabe (a) erhält man mit $z \neq 1$:

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k z^k\right| \le \frac{2\,a_n}{|\,1-z|}$$

Weil a_n gegen 0 konvergiert und $\frac{2}{|\,1-z|}$ konstant ist, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ für den

$$\frac{2\,a_n}{|\,1-z|} < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \ge n_0$$

ist. Mit diesem n_0 gilt aber auch für alle $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $m \ge n$:

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k z^k\right| \le \frac{2\,a_n}{|\,1-z|} < \varepsilon,$$

womit das Cauchy-Kriterium für Reihen erfüllt wäre. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert also für alle komplexen z mit $|\,z| \le 1$, $z \neq 1$ und für eine monoton fallende Nullfolge (a_n) in jedem Fall.

IV Variationen, Verallgemeinerungen, Abschwächungen

Da die Abschätzung zum Beweis des Cauchy-Kriteriums keineswegs optimal gewählt sein muss, ist noch nicht bewiesen, dass 1 der maximale Konvergenzradius der untersuchten Potenzreihen ist, bzw. ob sich nicht ein größerer Konvergenzradius beweisen ließe. Um in diesem Sinne zu ergänzen, reicht es aber aus, für Potenzreihen mit $z \in \mathbb{C}, |z| > 1$ geeignete Folgen a_n zu finden, die alle Bedingungen erfüllen, für welche die zugehörige Potenzreihe aber divergiert. Das soll kurz gezeigt werden:
Sei zu jeder reellen Zahl größer als 1 z (also $z \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}, z > 1 \Rightarrow \frac{1}{z} < 1$) q eine reelle Zahl im Bereich $\frac{1}{z} < q < 1$. Mit $a_n := q^n$ ist dann eine Folge gefunden, die wegen $q < 1$ monoton fallend und Nullfolge ist. Zudem ist aber wegen

$$\frac{1}{z} < q < 1 \Leftrightarrow 1 < qz < z$$

die Potenzreihe $\sum a_n z^n = \sum q^n z^n = \sum (qz)^n$ eine geometrische Reihe mit einem Argument $qz > 1$, also divergent.
Es kann damit allgemein kein Konvergenzradius größer als 1 bewiesen werden.

Wenn dies also allgemein nicht gilt, jedoch zweifellos Potenzreihen mit einem Konvergenzradius größer als 1 existieren, so wäre zu ermitteln, wie diese Potenzreihen (vor allem: ihre Koeffizientenfolgen a_n) aussehen. Beispiele wären Folgen $a_n = q^n$ mit $q < \frac{1}{z}$, deren Potenzreihen als geometrische Reihen mit $qz < 1$ sicher konvergierten. Aber allgemein?

V Nutzen & Anwendungen

Das Interessante dieser Aufgabe ist, dass die Folge (a_n) „nur“ eine monoton fallende Nullfolge sein muss, damit $\sum a_n z^n$ mit einem Konvergenzradius von $\rho \geq 1$ konvergiert. Der Radius auf den ersten Blick komplizierter Potenzreihen kann so leicht abgeschätzt werden.

Als Beispiel betrachte man die Potenzreihe $\sum a_n z^n$ mit der rekursiv definierten Folge

$$a_{n+1} := \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2} + a_n} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \text{mit } a_0 := 1$$

welche streng monoton fallend gegen 0 konvergiert (das kann mit der Musterlösung von Aufgabe 1c) von Blatt 11 nachgerechnet werden, oder als Analogie zu Aufgabe 1a) von Blatt 6 gesehen werden). Nach der Lösung dieser Aufgabe steht sofort ohne weitere Rechnung fest, dass der Konvergenzradius $\rho \geq 1$ ist.

Andere Beispiele wären Potenzreihen wie die Exponentialreihe $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ mit der Folge streng monoton fallenden Nullfolge $a_n = \frac{1}{n!}$; diese Reihe hat sogar einen Konvergenzradius von $\rho = \infty$.

Ludwig Straub und Johannes Flake · 13. März 2007