Musterlösung zu Blatt 7, Aufgabe 6

I Aufgabe

a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen (Blatt 4, Aufgabe 3b).
Zeigen Sie

$$a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2 = (-1)^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

b) Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei durch $b_{n+1} := \frac{a_n}{a_{n+1}}, n \in \mathbb{N}$ definiert. Zeigen Sie, dass $b_0 = 1$ und

$$b_{n+1} = \frac{1}{1+b_n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

c) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|b_n - b_{n+1}| = \frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}} \le \frac{1}{n^2}.$$

d) Zeigen Sie, dass (b_n) eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$, und somit konvergent ist. Benutzen Sie dazu, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergiert.

e) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} b_n$.

II Beweisidee

„Worum geht's?": In dieser Aufgabe werden wie schon an anderer Stelle die Fibonacci-Zahlen behandelt (siehe auch Blatt 4, 3b; Blatt 6,1a, Blatt 9,5). Wer die Definition der Fibonacci-Zahlen nicht auswendig im Kopf hat, der ist gut damit beraten, sich die Definition noch einmal anzuschauen, die da lautet:

Die Fibonacci-Zahlen sind rekursiv definiert durch

$$a_0 = a_1 := 1 \quad \text{und} \quad a_{n+2} = a_n + a_{n+1}, \; n \in \mathbb{N}.$$

In Teilaufgabe d) wird der Begriff der Cauchyfolge erwähnt. Laut Definition (8.1) heißt eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\ge m}$ Cauchyfolge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n,m \ge n_0$ stets $|a_n - a_m| < \varepsilon$ gilt. Da hier der Begriff der Cauchyfolge im Zusammenhang mit der Reihe fällt, schauen wir uns auch das Cauchykriterium für Reihen an

$\sum a_j$ konvergiert genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}_{n_0} \; \forall k \in \mathbb{N} : \left|\sum_{j=n}^{n+k} a_j\right| < \varepsilon.$$

„Wie mach' ich das?": In a) geht es darum, eine Gleichung zu beweisen. Da die Variable $n \in \mathbb{N}$ ist, klingt ein Beweis mittels vollständiger Induktion recht vielversprechend. Auch in b) geht es um eine Gleichung, bei der es durch Einsetzen der Definition von (b_n) zu schaffen sein sollte, sie zu beweisen. Teilaufgabe c) verläuft ähnlich, nur kommt hier zusätzlich noch eine Ungleichung hinzu. Es muss also eine geschickte Abschätzung erfolgen, die dann Beweis dieser Ungleichung wäre. Lassen sich a), b) und c) noch relativ leicht lösen, so entstehen die meisten Schwierigkeiten wahrscheinlich beim Lösen von Teilaufgabe d), da der Begriff der Cauchyfolge eine nicht leicht vorstellbare Definition ist. Freundlicherweise wurde auf die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ verwiesen; nicht ohne Grund, denn in c) taucht bereits dieser Term auf. Da diese Teilaufgabe gleich im Anschluss folgt, liegt der Gedanke nicht fern, dass die Ungleichung aus c) in d) irgendeinen Nutzen finden könnte. In e) soll noch einmal die Grenzwertbestimmung einer Folge vollzogen werden. Hilfreich sind hier natürlich die Regeln zur Bestimmung des Grenzwertes.

„Wie komm' ich drauf?“: Um ein Gespür für die Fibonacci-Zahlen zu bekommen, ist es keine schlechte Idee, sich die ersten Zahlen dieser Reihe einfach aufzuschreiben. $a_0 = 1; a_1 = 1; a_2 = 2; a_3 = 3; a_4 = 5; a_5 = 8; a_6 = 13; \ldots$. Ebenso kann man sich die ersten Glieder der Folge (b_n) notieren, um sich mit ihr bekannt zu machen.

III Lösung

a) Die zu beweisende Gleichung lautet: $a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2 = (-1)^n$

Der erste Schritt heißt die Definition der Fibonacci-Zahlen einfach einzusetzen

$$a_n(a_n + a_{n+1}) - a_{n+1}^2 = (-1)^n$$

$$\Leftrightarrow a_n^2 + a_n a_{n+1} - a_{n+1}^2 = (-1)^n$$

Damit haben wir $a_n^2 + a_n a_{n+1} - a_{n+1}^2 = (-1)^n$ als Induktionsvoraussetzung erhalten.

Nun folgt die Induktion nach n.

I. Induktionsanfang (n = 0):

$$a_0^2 + a_0 a_{0+1} - a_{0+1}^2 = (-1)^0 \;\Leftrightarrow\; 1+1-1=1$$

II. Induktionsschritt $(n \to n+1)$:

$$a_{(n+1)}^2 + a_{(n+1)} a_{(n+1)+1} - a_{(n+1)+1}^2 = (-1)^{(n+1)}$$

Hier kann man wieder die Definition der Fibonacci-Zahlen einsetzen:

$$a_{(n+1)}^2 + a_{(n+1)}(a_n + a_{n+1}) - (a_n + a_{n+1})^2 = (-1)^{(n+1)}$$

$$\Leftrightarrow a_{(n+1)}^2 + a_{(n+1)} a_n + a_{n+1}^2 - \left(a_n^2 + 2a_n a_{n+1} + a_{n+1}^2\right) = (-1)^{(n+1)}$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1}^2 - a_n^2 - a_n a_{n+1} = (-1)^{(n+1)}$$

$$\Leftrightarrow -\left(a_n^2 + a_n a_{n+1} - a_{n+1}^2\right) = (-1)^{(n+1)}$$

$$\Leftrightarrow -(-1)^n = (-1)^{(n+1)}$$

$$\Leftrightarrow (-1)^{(n+1)} = (-1)^{(n+1)}$$

Im vorletzten Schritt wurde die Induktionsvoraussetzung eingesetzt.

b) Zu zeigen: $b_0 = 1$. Aus $b_n := \frac{a_n}{a_{n+1}}$ folgt $b_0 = \frac{a_0}{a_1} = \frac{1}{1} = 1$, wegen $a_0, a_1 := 1$.

Bleibt zu zeigen: $b_{n+1} = \frac{1}{1+b_n}$. Mit Hilfe der Definition der Fibonacci-Zahlen folgt

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} = \frac{a_{n+1}}{a_n + a_{n+1}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a_{n+1}}(a_n + a_{n+1})\right)} = \frac{1}{\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} + 1\right)} = \frac{1}{1+b_n}.$$

c) Zunächst wird die Gleichung bewiesen.

$$\left|b_n - b_{n+1}\right| = \left|\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}\right| = \left|\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{a_{n+1}}{a_n + a_{n+1}}\right| = \left|\frac{a_n(a_n + a_{n+1}) - a_{n+1}a_{n+1}}{a_{n+1}(a_n + a_{n+1})}\right| = \left|\frac{a_n^2 + a_n a_{n+1} + a_{n+1}^2}{a_{n+1}(a_n + a_{n+1})}\right|$$

Ein Blick auf die Induktionsvoraussetzung aus a) hilft bei der Umformung des Zählers

$$\left|\frac{(-1)^n}{a_{n+1}a_{n+2}}\right| = \frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}}.$$

Jetzt bleibt noch die Ungleichung $\frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}} \le \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow n^2 \le a_{n+1}a_{n+2}$ zu beweisen. Wünschenswert wäre es, wenn auf der rechten Seite der Gleichung auch etwas Quadratisches stehen würde. Deshalb soll versucht werden zu beweisen, dass $a_{n+1} \le a_{n+2}$ gilt. Dies ist nach Definition der Fibonacci-Zahlen eindeutig ($a_{n+1} \le a_n + a_{n+1}$, da $a_n > 0$.).

Folgende Abschätzung ist also erlaubt: $n^2 \le a_{n+1}a_{n+2} \le a_{n+1}^2 \Leftrightarrow n \le a_{n+1}$.

Dies lässt sich mittels vollständiger Induktion beweisen (I.V.: $n \le a_{n+1}$).

I. Induktionsanfang (n = 0): $0 \le a_1 = 1$

II. Induktionsschritt: $a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \ge a_n + n \ge n+1$, da $a_n \ge 1$. Im vorletzten Schritt wurde die Induktionsvoraussetzung eingesetzt.

Damit ist $\frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}} \le \frac{1}{n^2}$ bewiesen.

d) Die Ungleichung $\left|b_n - b_{n+1}\right| \le \frac{1}{n^2}$ versuchen wir hier zu benutzen. Dabei gilt für Reihen dann $\sum_{k=n}^{n+m} \left|b_k - b_{k+1}\right| \le \sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{k^2}$. Außerdem gilt wegen der Konvergenz von $\sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{k^2}$:

$\sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{k^2} < \varepsilon$ (für alle $\varepsilon > 0$). (Hilfsschritt: $\sum_{k=n}^{m+n} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \varepsilon$. Will man nun diese Ungleichung für ein kleines ε zeigen, so muss man dementsprechend ein großes n wählen, damit die Ungleichung erfüllt ist.)

Nun muss noch gezeigt werden, dass $\left|b_n - b_{n+m}\right| < \varepsilon$ gilt, denn dann wäre (b_n) Cauchyfolge. Wegen $b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$ und $b_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}$ folgt aus $a_n \le a_{n+1}$: $b_n \ge b_{n+1}$. Deshalb kann folgende Behauptung aufgestellt werden: $\left|b_n - b_{n+m}\right| \le \sum_{k=n}^{n+m} \left|b_k - b_{k+1}\right|$ (Im Prinzip ist dies die Dreiecksungleichung).

Daraus folgt $\left|b_n - b_{n+m}\right| \le \sum_{k=n}^{n+m} \left|b_k - b_{k+1}\right| \le \sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{k^2} < \varepsilon$. Damit ist (b_n) Cauchyfolge.

e) Sei $b = \lim_{n\to\infty}(b_n)$. Dass b existiert, wurde in d) bewiesen. Es gilt bekanntlich $\lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}(b_{n+1})$. Deshalb kann man aus der rekursiven Darstellung aus b) ($b_{n+1} := \frac{1}{1+b_n}$) folgern:

$$\lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \frac{1}{1+\lim_{n\to\infty} b_n} \Leftrightarrow b = \frac{1}{1+b} \Leftrightarrow b(1+b) = 1 \Leftrightarrow b^2 + b - 1 = 0.$$

Daraus folgt: $b_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}; b_1 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}; b_2 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Wegen der Positivität von (b_n) gilt eindeutig: $\lim_{n\to\infty}(b_n) = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Varianten der Beweisführung

Wie in der Lösungsskizze vorgeschlagen, könnte man mit Hilfe der auf Blatt 4, Aufgabe 3b angegebene Formel $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$ auch zum Ziel kommen. Welches Verfahren vorgezogen wird, ist Geschmackssache. Das Prinzip der vollständigen Induktion ist zwar aufwändiger, dafür aber auch nicht so anfällig für Fehler.

IV Variationen

Wie schon zu Beginn erwähnt, gibt es in den Übungsblättern weitere Aufgaben zu den Fibonacci-Zahlen. Eine Beziehung der Fibonacci-Folge zum goldenen Schnitt (in dieser Aufgabe als $\lim_{n\to\infty}(b_n) = -\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 0{,}61803$ aufgetreten.), die eine gewisse Ähnlichkeit zu der Gleichung in dieser Aufgabe hat, ist

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - g\right| = \frac{1}{a_n} \cdot \frac{1}{g^{n+1}} \quad \text{und} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \to g.$$

Dabei wird g gut durch den Quotienten $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ approximiert.

Johannes Müller