Musterlösung zu Blatt 7, Aufgabe 5

I Aufgabenstellung

(a) Geben Sie ein Beispiel für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ an, so dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $a_n \leq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_1$ und $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, a_n$ divergiert.

(b) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ Folgen reeller Zahlen, für die $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ konvergieren. Zeigen Sie: $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)^2$ konvergiert.

(c) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ eine Folge reeller Zahlen. Ist mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ konvergent?

(d) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ eine Folge reeller Zahlen mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_1$. Konvergieren mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$?

II Beweisidee

„Worum geht's?“: In dieser Aufgabe sollen die Konvergenzkriterien für Reihen eingeübt werden. Dazu ist bei (b), (c) und (d) jeweils mindestens eine konvergente Reihe gegeben, aus welcher über die Anwendung von Kriterien auf Konvergenz anderer Reihen geschlossen werden soll. Absolut unersetzlich sind dabei folgende Standardkriterien:

- Cauchykriterium für Reihen: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ und für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left|\sum_{j=n}^{n+k} a_j\right| < \varepsilon$$

- Leibnizkriterium für Reihen: Ist (a_n) eine monotone Nullfolge, so konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$$

- Majorantenkriterium: Ist $\sum c_j$ mit $c_j \geq 0$ konvergent und gibt es zu $\sum a_j$ ein $M > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_j| \leq M\, c_j \qquad \forall j \in \mathbb{N}_{n_0},$$

so konvergiert $\sum a_j$ absolut, d.h. auch $\sum |a_j|$ konvergiert.

Weiterhin gibt es noch das Wurzelkriterium und das Quotientenkriterium, die mindestens ebenso wichtig wie die genannten sind, bei dieser Aufgabe aber nicht angewendet werden können. Ziel ist es also, mit diesen Kriterien im Hinterkopf die in der Aufgabe genannten Reihen auf Konvergenz zu überprüfen.

„Wie mach' ich das?“:

(a) Diese Aufgabe klingt sehr nach langem Ausprobieren von Folgen (a_n). Doch man kann sich das Leben erheblich erleichtern, wenn man (wie oben angemerkt) die Kriterien im Kopf und die Ähnlichkeit der Aufgabe mit dem Leibnizkriterium erkannt hat. Denn damit fallen auf einen Schlag alle monoton steigenden Folgen weg, denn wäre (a_n) eine solche negative, monoton steigende Nullfolge, so gälte automatisch das Leibnizkriterium, was zur Folge hätte, dass $\sum(-1)^n a_n$ mit Bestimmtheit konvergiert und nicht – wie in der Aufgabe erforderlich – divergiert. Also suchen wir eine nicht monoton gegen 0 laufende Folge. Eine (einfache) Möglichkeit eine solche zu finden, ist sie aus zwei einzelnen Teilfolgen aufzubauen: Zum Beispiel aus der Folge $(-\frac{1}{n})$ (weil sie eine sehr einfache negative, gegen 0 konvergierende Folge ist) und einer einfachen Nullfolge: (0). Unsere künstliche Folge (a_n) „hüpft“ also immer zwischen der $(-\frac{1}{n})$ und der (0) hin und her. So erreichen wir, dass die Folge nicht monoton ist, aber auch nicht wirklich schwierig zu handhaben. Jetzt bleibt nur noch zu überprüfen, ob diese (relativ einfache) Folge die Erwartungen erfüllt.

(b) Hier gilt es wieder die Kriterien gut zu kennen. Denn: Konvergieren $\sum a_n^2$ und $\sum b_n^2$, so konvergiert auch jede Kombination der beiden Reihen:
z.B.: $\sum(a_n^2 + 2\,b_n^2)$ oder $\sum(2a_n^2 + 2b_n^2)$. Um nun die Konvergenz von $\sum(a_n + b_n)^2$ zu zeigen, würde es ausreichen, $(a_n + b_n)^2$ durch einen linear von a_n^2 und b_n^2 abhängigen Term abzuschätzen. Das ist sehr einfach und einsichtig möglich, wenn man zunächst $\sum(a_n + b_n)^2$ auf drei Summen $\sum a_n^2$, $\sum b_n^2$ und $\sum 2a_nb_n$ aufspaltet; die unten en detail durchgeführte Abschätzung für $2\,a_nb_n$ sollte man immer parat haben. Durch sie ist es möglich das Majorantenkriterium anzuwenden und die Konvergenz zu beweisen.

(c) Na, gut aufgepasst? Diese Teilaufgabe lässt sich komplett mit dem Wissen aus (b) lösen: Wiederum ist die Konvergenz von $\sum a_n^2$ Voraussetzung. Mit ihr soll man beweisen oder widerlegen, dass $\sum \frac{a_n}{n}$ konvergiert. Und als Spezialfall von (b) lässt sich $\frac{a_n}{n}$ abschätzen: Hier ist die Folge (b_n) aus Teilaufgabe (b) einfach die Folge $(\frac{1}{n})$. Da die Konvergenz von $\sum b_n^2 = \sum \frac{1}{n^2}$ aus der Vorlesung bekannt ist, kann nun $a_n \cdot \frac{1}{n}$ wie unter (b) abgeschätzt werden.

(d) Bekannt ist hier, dass $\sum a_n$ mit $a_n \geq 0$ konvergiert. Damit wissen wir sofort, dass (a_n) eine Nullfolge ist (sonst würde $\sum a_n$ ja nicht konvergieren!). Die Frage ob deshalb $\sum a_n^2$ und $\sum \sqrt{a_n}$ auch konvergent sind, kann man sich am einfachsten dadurch beantworten, dass man sich verdeutlicht, was mit kleinen nicht-negativen Zahlen in der Nähe von 0 geschieht, wenn sie quadriert oder gewurzelt werden. Offensichtlich werden die Quadrate dieser kleinen Zahlen noch kleiner, während die Wurzeln größer werden. Den Gedanken weiterführend, kann man beweisen, dass $\sum a_n^2$ tatsächlich auch konvergieren muss, dagegen $\sum \sqrt{a_n}$ im Allgemeinen nicht, wie die Reihe $\sum \frac{1}{n}$ illustriert, die divergiert, obwohl $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

„Wie komm' ich drauf?": Die Lösung für Teilaufgabe (a) zu finden, fällt einem ganz bestimmt je leichter, desto länger man bestimmte Folgen (a_n) einsetzt und einfach auf Konvergenz prüft.
Die anderen drei Aufgaben sind allesamt mit einem Fundus an Abschätzungen und Konvergenzkriterien zu bewältigen, wenn man den Umgang mit ihnen geübt hat und die Grenzen ihre Anwendungsbereiche abschätzen kann. Diese Sammlung an Hilfsmitteln muss man sich selbstverständlich erst erarbeiten; ist dies aber einmal geschehen, sollten weitere Aufgaben dieses Typs gut gelöst werden können.

III Lösung

(a) Wie oben schon angedeutet, bietet sich an, die Folge (a_n), definiert durch

$$a_n := \begin{cases} -\frac{1}{n}, & \text{für ungerade n} \\ 0, & \text{für gerade n} \end{cases},$$

auszuprobieren. Damit ergibt sich also:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = -(-\frac{1}{1}) + 0 - (-\frac{1}{3}) + 0 - (-\frac{1}{5}) + \ldots = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$$

Diese Reihe ist divergent, wie folgende Abschätzung der Partialsummen durch die bekanntermaßen divergente harmonische Reihe zeigt:

$$\begin{aligned} & 2\cdot\frac{1}{2n-1} \geq \left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right) \\ \Rightarrow 2\cdot\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{2n-1} &= 1+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2m-1}+\frac{1}{2m-1} \\ &\geq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2m-1}+\frac{1}{2m} = \sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{2n-1} &\geq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n} \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1} &= \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{2n-1} \geq \lim_{m\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty, \end{aligned}$$

womit die Divergenz der Reihe $\sum a_n$ bewiesen wäre.

(b) Man kann diese Aufgabe lösen, indem man die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 2a_nb_n$ auf Konvergenz untersucht. Konvergiert sie nämlich, so gilt (mit der Konvergenz von $\sum a_n^2$ und $\sum b_n^2$):

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty}b_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty}2a_nb_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2,$$

womit auch die gesuchte Reihe konvergent wäre.
Also: Um die Konvergenz von $\sum 2a_nb_n$ zu zeigen, schätzt man die Summanden $2a_nb_n$ am besten durch einen linear von a_n^2 und b_n^2 abhängigen Ausdruck ab:

$$2a_nb_n \leq a_n^2 + b_n^2$$

Diese Ungleichung erscheint auf den ersten Blick weit hergeholt, ist aber einfach aus der binomischen Formel zu erkennen:

$$(a_n - b_n)^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_n^2 + b_n^2 - 2a_nb_n \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2a_nb_n \leq a_n^2 + b_n^2$$

Damit konvergiert $\sum 2a_nb_n$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2a_nb_n \quad \leq \quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < \infty$$

Also ist – wie oben ausgeführt – auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ konvergent.

(c) Nach den einleitenden Worten im Abschnitt „Beweisidee“ ist klar was zu tun ist: $\frac{a_n}{n}$ muss in Abhänigkeit von a_n^2 und $\frac{1}{n^2}$ abgeschätzt werden, da die beiden Reihen $\sum a_n^2$ und $\sum \frac{1}{n^2}$ bekanntermaßen konvergieren. Dazu benutzen wir wieder die Ungleichung aus Aufgabe (b):

$$2\, a_n \frac{1}{n} \leq a_n^2 + \frac{1}{n^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_n}{n} \leq \frac{1}{2}\left(a_n^2 + \frac{1}{n^2}\right)$$

Damit kann die Konvergenz von $\sum \frac{a_n}{n}$ bewiesen werden:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \leq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$$

(d) Hier ist die Voraussetzung, dass $\sum a_n$ konvergiert. Das bedeutet, a_n muss eine Nullfolge sein. Außerdem ist gegeben, dass $a_n \geq 0$ ist für alle $n \in \mathbb{N}_1$. Aus der Konvergenz von a_n folgt, dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}_1$ geben muss, ab dem alle a_n, $n \geq n_0$, kleiner als 1 sind. Deshalb sind ab diesem n_0 die Quadrate a_n^2 immer kleiner als a_n, weshalb die Reihe $\sum a_n^2$ so abgeschätzt werden kann:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n^2 \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n < \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{n_0-1} a_n^2 + \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n^2 \leq \sum_{n=1}^{n_0-1} a_n^2 + \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n < \infty$$

Also konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.
Die Reihe $\sum \sqrt{a_n}$ konvergiert (wie unter „Beweisidee“ skizziert) im Allgemeinen nicht: Als Beispiel betrachte man $a_n = \frac{1}{n^2}$: Hier konvergiert $\sum a_n = \sum \frac{1}{n^2}$, aber nicht die harmonische Reihe $\sum \sqrt{a_n} = \sum \frac{1}{n}$.

IV Variationen, Verallgemeinerungen, Abschwächungen

In Bezug auf Teilaufgabe (a) kann man sich überlegen, wie allgemein eine nicht-positive Folge (a_n) aussieht, wenn ihr Limes 0 ist und $\sum(-1)^n a_n$ divergiert. Bisher wurde ja nur ein Beispiel für eine solche Folge genannt.

V Nutzen & Anwendungen

Diese Aufgabe ist eine wieder eine gute Übung für die Konvergenzkriterien für Reihen. Trotzdem kann man einige Tricks mitnehmen, die später und bei anderen Aufgaben essentiell sind: Die Konvergenz der Reihe $\sum \frac{2n^2+2}{(n-1)^2(n+1)^2}$ kann zum Beispiel sehr schnell mit Hilfe der Teilaufgabe (b) gelöst werden:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{2n^2+2}{(n-1)^2(n+1)^2} = \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \right)$$

Die Reihe $\sum \left(\frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \right)$ konvergiert dabei, weil die Reihen $\sum \frac{1}{(n-1)^2}$ und $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ (trivialerweise) konvergent sind.
Diese Aufgabe verstärkt das Gespür für die Konvergenz von Reihen und legt das Fundament (damit auch das handwerkliche Rüstzeug, wie Ungleichungen oder geschickte Abschätzungen) für schwierigere Probleme.

Ludwig Straub, 13. März 2007