Musterlösung zu Blatt 6, Aufgabe 1

I – Aufgabenstellung

a. Die Folge (a_n) sei durch $a_1 = \sqrt{2}$ und $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$ für $n \geq 1$ definiert.

Zeigen Sie, dass diese Folge konvergiert und bestimmen Sie ihren Limes.

b. Seien $0 < b \leq a$. Zeigen Sie, dass die durch $a_0 = a,\ b_0 = b$ und $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, $n \in \mathbb{N}$, rekursiv definierten Folgen konvergieren und zwar gegen denselben Grenzwert.

II – Beweisidee

„ Worum geht's?": Wir müssen zeigen, dass die Folgen konvergieren und ihre Limes bestimmen. Die Folgen sind nur rekursiv definiert und wir haben keine explizite Darstellung von ihnen.

„Was mach'ich?": a) Wir können uns erst mal den Graphen anschauen, wie die Folge ausschaut. Dann sieht man genau, was man zeigen muss, um die Konvergenz und den Grenzwert zu beweisen.

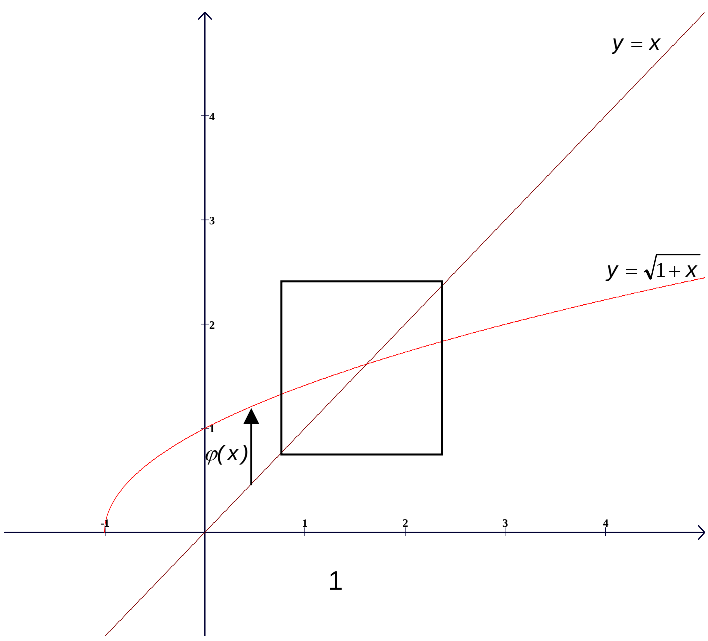
b) Es bietet sich die vollständige Induktion an. Besonders ist es wichtig, den Platz von (a_n) und (b_n) abzuschätzen.

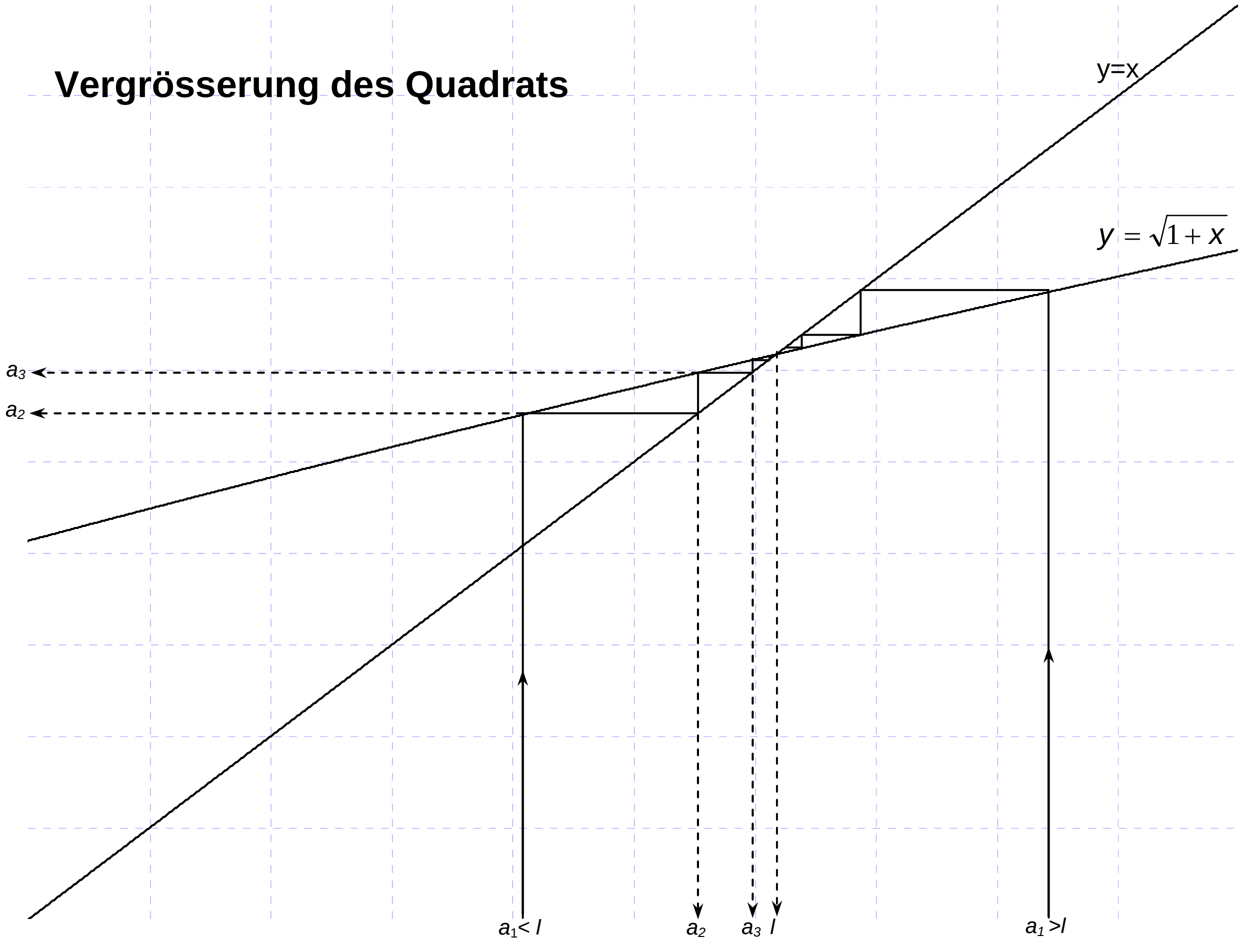
III – Lösung

a. Angenommen $f : I = [-1; \infty[\to IR$

$x \mapsto \sqrt{1+x}$ (so dass $a_{n+1} = f(a_n)$).

1. Wir können erst mal mit einem Graphen illustrieren!





Also folgt aus dem Graphen, dass

- wenn $a_1 < l$: (a_n) ist wachsend und nach oben beschränkt von $l = f(l)$,
- wenn $a_1 > l$: (a_n) ist fallend und nach unten beschränkt von $l = f(l)$,

daraus folgt in beiden Fällen, ist (a_n) nach Konvergenzkriterium (7.11) konvergent.

2. <u>N.B.$_1$:</u> Weil $f(I) \subset I$ und f auf I monotone wächst, ist (a_n) monoton.

Aus $a_1 \leq a_2$, folgt dann $f(a_1) \leq f(a_2)$ ($a_1 \in I$ und f wachsend auf I)

d.h. $a_2 \leq a_3$ ... durch Induktion, und folgt dass (a_n) wachsend ist.

Analog gilt, wenn $a_1 \geq a_2$, dann ist $f(a_1) \geq f(a_2)$ und durch Induktion ist (a_n) fallend.

Diese N.B.$_1$ zeigt :

➢ Wir müssen nicht mehr schauen, ob (a_n) wirklich wachsend ist, um zu zeigen dass sie konvergiert. Denn wir haben dann $0 \leq a_n \leq l$ oder $l \leq a_n \leq a_1$, also ist (a_n) beschränkt und (a_n) konvergiert wie eine monotone beschränkte Folge.

- Wir sehen leicht, dass das Wachstumsverhalten von (a_n) durch das Vorzeichen von $f(a_1)-a_1$, (d.h. $a_2-a_1) = \varphi(a_1)$, bestimmt ist, wobei $\varphi(x) = f(x) - x$.

  Hier ist $f(a_1) - a_1 < 0$. Tatsächlich:

  $a_2 = \sqrt{1+\sqrt{2}}$ und $a_1 = \sqrt{2}$, also $a_1 > 0, a_2 > 0$ und $a_2{}^2 - a_1{}^2 = 1 - \sqrt{2} < 0$

N.B.2: Die Folge (a_n) sei nun konvergent gegen $l \in IR$, dann folgt : $l = \sqrt{1+l}$ (mit Rechenregeln für Grenzwerte, und $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$).

Also, es folgt: $l^2 = l + 1$ mit $l \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $l^2 - l - 1 = 0$ mit $l \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ oder $l = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ mit $l \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ weil $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$

Also folgt : Wenn (a_n) konvergiert, dann konvergiert (a_n) gegen $l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3. Wir zeigen mit vollständiger Induktion nach n, dass für alle $n \in IN^*$, a_n existiert und $0 \leq a_n \leq l$

Induktionsanfang:

n = 1: $\left(1+\sqrt{5}\right)^2 = 6 + \sqrt{5}$

$\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8$

$\left(1+\sqrt{5}\right)^2 > \left(2\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow 1+\sqrt{5} > 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > \sqrt{2}$

$\Rightarrow a_1 \leq l \leq$ l

Induktionsvoraussetzung: a_n existiert und $0 \leq a_n \leq l$ für $n \geq 1$.

Induktionsschritt: $n \to n+1$

Es ist $1 + a_n \geq 1 > 0$ und es folgt, $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$ existiert und $a_{n+1} \geq 0$.

Anderseits ist $a_n \leq l \Rightarrow f(a_n) \leq f(l)$ weil f wachsend ist,

d.h. $a_{n+1} \leq l$ weil $l = f(l)$ et $f(a_n) = a_{n+1}$.

So $0 \leq a_{n+1} \leq l$

Daraus folgt, dass (a_n) eine monotone beschränkte konvergente Folge ist und ihr Grenzwert ist $l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, (nach N.B$_2$).

b.

1. Wir zeigen durch vollständige Induktion nach n, dass $\forall n \in IN$:

$$\begin{cases} a_n \text{ existiert} \\ b_n \text{ existiert} \\ 0 < b_n \le a_n \end{cases}$$

<u>Induktionsanfang:</u>

$n = 0 \qquad 0 < b_0 = b \le a = a_0$.

<u>Induktionsvoraussetzung:</u> $\begin{cases} a_n \text{ existiert} \\ b_n \text{ existiert} . \\ 0 < b_n \le a_n \end{cases}$

<u>Induktionsschritt:</u> $n \to n+1$

Also nach I.V., $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ existiert,

und $a_n b_n > 0 \Rightarrow \begin{cases} b_{n+1} = \sqrt{a_n . b_n} \quad \text{existiert} \\ und \\ b_{n+1} > 0 \end{cases}$.

Also $a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + b_n - 2\sqrt{a_n . b_n}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)^2$

es folgt $a_{n+1} - b_{n+1} \ge 0$

2. Wir zeigen jetzt, dass (a_n) fallend und (b_n) wachsend ist.

- $\forall n \in IN,\ a_{n+1} - a_n = \dfrac{b_n - a_n}{2} \le 0$ nach 1.
- $\forall n \in IN,\ b_{n+1} - b_n = \sqrt{b_n}\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right) \ge 0$ nach 1.

3. Wir zeigen jetzt, dass (a_n) durch b nach unten beschränkt ist, und dass (b_n) durch a nach oben beschränkt ist.

- $\forall n \in IN, \qquad a_n \ge b_n \ge b_0 = b$

  (b_n) wachsend

  Nach 1.

  Daraus folgt, $a_n \ge b$.

- $\forall n \in IN, \qquad b_n \le a_n \le a_0 = a$

  (a_n) fallend

  Nach 1

  Daraus folgt, $(b_n) \le a$.

4. Es folgt :

   - (a_n) ist fallend und durch b nach unten beschränkt, (a_n) konvergiert gegen l.
   - (b_n) ist wachsend und durch a nach oben beschränkt, (b_n) konvergiert gegen l'.

   Aber weil $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, gilt mit Hilfe der Rechenregeln für Grenzwerte, $l = \dfrac{l + l'}{2}$,

   also $2l = l + l'$.

   Daraus folgt, $l = l'$.

IV – Variationen, Verallgemeinerungen, Abschwächungen Verschärfungen:

Zu a.

Verallgemeinerungen für rekursive Folgen definiert sodass $a_{n+1} = f(a_n)$.

Sei I ein geschlossenes Intervall von IR, $f : I \to I$ eine Abbildung.

- Angenommen f ist monoton auf I.
  - Falls f wachsend auf I ist:

    Für alle $n \in IN, a_{n+1} - a_n = f(a_n) - f(a_{n-1})$, gilt, dass $a_{n+1} - a_n$ das gleiche Vorzeichen wie $a_1 - a_0$ hat. Genauer gesagt:

    $$\begin{cases} a_0 \le a_1 \Rightarrow a_1 \le a_2 \Rightarrow ... \Rightarrow a_n \le a_{n+1} \Rightarrow ... \\ a_0 \ge a_1 \Rightarrow a_1 \ge a_2 \Rightarrow ... \Rightarrow a_n \ge a_{n+1} \Rightarrow ... \end{cases}.$$

    Also, $(a_n)_{n \in IN}$ ist monoton, und ihr Wachstumsverhalten (fallend oder wachsend) ist von der Positionen von a_1 und a_0 abhängig.

  - Falls f fallend gegen s ist:

    Die Abbildung $f \circ f$ ist wachsend gegen s also (wie oben), die zwei folgenden Teilfolgen $(a_{2p})_{p \in IN}$ und $(a_{2p+1})_{p \in IN}$ sind monoton.

- Angenommen f ist stetig auf I.

  Falls $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} s \in IR$, also $s \in I$ und, von $a_{n+1} = f(a_n)$ es folgt, wenn $n \to \infty$, $f(s) = s$. Oft, können wir die Gleichung $f(s) = s$ lösen, und die einzige möglichen Grenzwert von $(a_n)_{n \in IN}$ finden.

Zu b.

Im Allgemein, wenn wir zwei Folgen haben, so dass:

- (a_n) wachsend
- (b_n) fallend
- $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$

folgt dass sie beide konvergieren, und haben dieselben Grenzwert.

Tatsächlich, $(a_{n+1} - b_{n+1}) - (a_n - b_n) = (a_{n+1} - a_n) - (b_{n+1} - b_n)$
Nun, $(a_{n+1} - a_n) > 0$, weil (a_n) wachsend und $(b_{n+1} - b_n) < 0$, weil (b_n) fallend,

folgt, dass $(a_{n+1} - b_{n+1}) - (a_n - b_n) > 0$.

Also $(a_n - b_n)$ ist wachsend und $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$ also:

$\forall n \in IN,\quad a_n \le b_n$, $a_0 \le a_1 \le a_2 \le ... \le a_n \le b_n \le b_{n-1} \le ... \le b_0$

also $\forall p,q \in IN$, $a_p \le b_p$.

Daraus folgt, (a_n) ist durch b_0 nach oben beschränkt, und (b_n) ist durch a_0 nach unten beschränkt. Also (a_n) konvergiert nach L, und (b_n) konvergiert nach L' und weil $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$, folgt $L = L' = l$. Damit bekommt man zwei Folgen, die eine obere und eine untere Approximation von l geben. Wir können das folgende Beispiel geben, sei $a_n = \sum_{p=0}^{p=n} \frac{1}{p!}$ und $b_n = a_n + \frac{1}{n!}$; Der gemeinsame Grenzwert ist e. Und für $n = 8$ bekommt man $a_8 = 2{,}7182281 < e < b_8 = 2{,}7182286$.

Erweiterung:

Zu b.

Seien a, b, c > 0. Seien drei Folgen folgendes definiert:

$$a_0 = a,\ b_0 = b,\ c_0 = 0;$$

$$\frac{3}{a_n + 1} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} + \frac{1}{c_n}$$

$$b_{n+1} = \sqrt[3]{a_n.b_n.c_n}$$

und $c_{n+1} = \frac{a_n + b_n + c_n}{3}$.

Wir schauen jetzt die drei Folgen nach Konvergenz und Grenzwert.

Nach der Cauchy-Schwarz Ungleichung haben wir:

$\forall x, y, z \rangle 0 \qquad xy + yz + zx \le \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.\sqrt{y^2 + z^2 + x^2}$ weil

$xy + yz + zx$ den Skalarprodukt von (x, y, z) und (y, z, x) also:

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) > 0$.

Angenommen jetzt $x = \sqrt[3]{a_n}$, $y = \sqrt[3]{b_n}$, $z = \sqrt[3]{c_n}$, es folgt also $c_{n+1} \geq b_{n+1}$.

Angenommen jetzt $x = \frac{1}{\sqrt[3]{a_n}}$, $y = \frac{1}{\sqrt[3]{b_n}}$, $z = \frac{1}{\sqrt[3]{c_n}}$, es folgt also $b_{n+1} \geq a_{n+1}$.

Von diesen zwei Relationen folgt, dass: $\frac{3}{a_{n+1}} \leq \frac{3}{a_n}$ also die Folge (a_n) ist wachsend und $c_{n+1} \leq c_n$ also die Folge (c_n) ist fallend.

Die beiden Folgen konvergieren also nach l und l'' mit $0 < l < l''$.

Weil $b_n = 3c_{n+1} - a_n - c_n$, b_n konvergiert nach l' und $l' = 3l'' - l - l''$.

Also wir haben jetzt $\begin{cases} 2l'' = l + l' \\ l'^2 = l.l'.l'' \end{cases}$

und folgt $l' \neq 0$ und $l'' \neq 0$, also $\begin{matrix} 2 = \frac{l}{l''} + \frac{l'}{l''} \\ \left(\frac{l'}{l''}\right)^2 = \frac{l}{l''} \end{matrix}$,also es folgt $\frac{l}{l''} = \frac{l'}{l''} = 1$.

Also die drei Folgen konvergieren und haben die gleichen Grenzwert!!!

(a_n) ist der geometrische Durchschnitt.

(b_n) ist der algebraische Durchschnitt.

(c_n) ist der arithmetische Durchschnitt.