Musterlösung zu Blatt 5, Aufgabe 6

I Aufgabenstellung

Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ und seien (b_n), (c_n), (d_n) definiert durch

$$b_n := \inf\{a_k : k \geq n\}, \tag{1}$$

$$c_n := \sup\{a_k : k \geq n\}, \tag{2}$$

$$d_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}_1. \tag{3}$$

a) Zeigen Sie: Aus $(a_n) \to a$ folgen auch $(b_n) \to a$, $(c_n) \to a$ und $(d_n) \to a$.
b) Geben Sie eine divergente Folge (a_n) an, für die (b_n), (c_n) und (d_n) konvergieren.

II Beweisidee

„Worum geht's?": Offensichtlich sind 3 Folgen (b_n), (c_n), (d_n) gegeben. Folgen (b_n) und (c_n) stellen dabei Infimum und Supremum der Folge (a_k) ab einem bestimmten (dem n-ten) Element dar. (d_n) dagegen ist der (arithmetische) Mittelwert der ersten n Folgenglieder von (a_k).
Die Aufgabe besteht nun darin, einen Zusammenhang zwischen der Konvergenz (und damit dem Limes) von (a_n) (das ist dieselbe Folge wie (a_k), nur dass bei letzterer k die „Laufvariable" ist) und denen der Folgen (b_n), (c_n) und (d_n) herzustellen.

„Wie mach' ich das?": Für (b_n) und (c_n) ist es sinnvoll, sich vorzustellen, dass die Folgenglieder von (a_n) ab einem bestimmten Folgenglied aufgrund der Konvergenz in einer jeweiligen ε-Umgebung um den Grenzwert (=Limes) a zu finden sind. Weil damit alle Folgenglieder von (a_n) ab dem bestimmten in dieser ε-Umgebung liegen, sind dabei auch Infimum und Supremum in der abgeschlossenen Menge der ε-Umgebung, wie in der Lösung gezeigt wird. Damit erfüllen auch (b_n) und (c_n) das ε-Kriterium für Folgenkonvergenz.
Um die Konvergenz der „Mittelwertsfolge" (d_n) zu zeigen, untersucht man die Folge a_n für kleine und große n. Für die großen n ist anschaulich klar, dass für die entsprechenden Glieder a_n, weil immer näher an a liegend, der Mittelwert gegen a geht. Die relativ großen Abweichungen der Glieder a_n mit kleinen n von a fällt dabei bei immer größer werdenden n im Mittelwert immer weniger ins Gewicht. Das Gewicht der unendlich vielen beliebig nahe an a gelegenen Folgeglieder a_n mit großen n verschiebt also den Mittelwert immer mehr gegen a.
In Aufgabenteil b) muss ein Gegenbeispiel gefunden werden (siehe „Wie komm' ich drauf?").

„Wie komm' ich drauf?": Hilfreich ist, wie so oft, eine Skizze. Darin ist zum Beispiel zu erkennen, welche Auswirkungen die ε-Umgebung auf die zu untersuchenden Folgen (b_n), (c_n) und (d_n) hat. Unerlässlich für den formalen Beweis ist es dann, die erkannten Konvergenzen zu „quantifizieren" und, in diesem Fall, mit der ε-Definition festzuhalten.
Besonders nützlich sind genannte Skizzen auch bei der Suche nach Beispielen für Aufgabenteil b), weiterhin das Ausprobieren bekannter Folgen und den „üblichen Verdächtigen".

III Lösung

a) Konvergenz von (b_n) und (c_n):
$(a_n) \to a \quad \Rightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $a_n \in\ [a-\varepsilon, a+\varepsilon]\ \ \forall\, n \geq n_0$
Sei also ε vorgegeben und $n \geq n_0$ beliebig. Da $b_n = \inf\{a_k : k \geq n\}$, ist in diesem Fall b_n das Infimum einer Teilfolge von a_n, die in einer geschlossenen ε - Umgebung um a liegt. Also liegt b_n selber in dieser Umgebung. Für c_n gilt die selbe Aussage (nur mit Supremum statt Infimum). Also gibt es für jedes vorgebene ε ein n_0, sodass gilt:

$$a - \varepsilon \leq b_n \leq a + \varepsilon \ \ \forall n \geq n_0$$
$$a - \varepsilon \leq c_n \leq a + \varepsilon \ \ \forall n \geq n_0$$

Dies ist aber gerade die ε - Definition der Konvergenz $\Rightarrow (b_n) \to a$, $(c_n) \to a$.

Konvergenz von (d_n):
$(a_n) \to a \quad \Rightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_1 \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\ \ \forall\, n \geq n_1$
Nach dem Satz von Eudoxos gibt es dann auch ein $n_2 \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_1} |a_k - a| < \frac{\varepsilon}{2}\ \ \forall\, n \geq n_2$, dieses n_2 muss dazu nur beliebig groß gewählt werden, da die Summe ja konstant ist.
Sei $N := \max(n_1,\ n_2)$, also die größere der beiden Zahlen. Dann gilt unter Anwendung der Dreiecksungleichung für alle $n \geq N$:

$$|d_n - a| = \left|\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) - a\right| = \left|\frac{1}{n}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) - na\right)\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}(a_k - a)\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k - a|$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_1}|a_k - a| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_1+1}^{n}|a_k - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n}\sum_{k=n_1+1}^{n}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n}(n - n_1)\frac{\varepsilon}{2}$$
$$= \frac{\varepsilon}{2} + \left(1 - \frac{n_1}{n}\right)\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Für alle ε liegen also ab einem hinreichend großen n alle d_n in der ε - Umgebung um a, also $(d_n) \to a$

b) Sei $(a_n) := (-1)^n \Rightarrow (a_n)$ ist bekanntermaßen divergent.

$$\begin{aligned} \Rightarrow b_n &= \inf\{a_k : k \geq n\} = -1, \\ c_n &= \sup\{a_k : k \geq n\} = 1, \\ d_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{für } n \text{ ungerade, } n \geq 1 \\ 0 & \text{für } n \text{ gerade, } n > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Für beide Fälle ist $d_n \to 0$ für $n \to \infty$.

IV Variationen, Verallgemeinerungen, Abschwächungen

Wie in Aufgabenteil b) schon angedeutet, ist die Konvergenz von (a_n) hinreichende, aber noch keineswegs notwendige Bedingung für die Konvergenz von (b_n), (c_n) und (d_n). Umgekehrt ist die Divergenz von (a_n) offenbar noch keine hinreichende Bedingung (es ließen sich leicht auch

Beispiele finden, für die (b_n), (c_n) und (d_n) divergieren).
Zu untersuchen bleibt nun also, welche weiteren Bedingungen dies (bei divergenten (a_n)) sind. Ansätze hierfür sind Bedingungen wie Beschränktheit oder die Konvergenz der Absolutbeträge von (a_n).

V Nutzen & Anwendungen

Diese Aufgabe illustriert und trainiert den Umgang mit dem ε-Kriterium für die Konvergenz von Folgen und den Begriffen von Supremum und Infimum von Mengen. Sie stellt keinen Erkenntniszugewinn im eigentlichen Sinne dar, sondern erweitert das Verständnis des Begriffs „Konvergenz“ (und seiner Implikationen) und stellt somit, quasi in zweiter Stufe, die Grundlage für weitergehende Untersuchungen dar.

Yilin Xu, Johannes Flake, Ludwig Straub · 17. März 2007