Musterlösung zu Blatt 4, Aufgabe 3

I - Aufgabenstellung

Es sei $IR((X))$ der Körper der formalen Laurent-Folgen aus Aufgabe 4) von Blatt 3. Zu jedem Nullelement verschiedenen $f \in IR((X))$ bezeichnet $\frac{1}{f}$ das multiplikative Inverse.

a) Es sei $q \in IR$. Zeigen Sie

$$\frac{1}{1-qX} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n X^n.$$

b) Die Fibonacci-Zahlen sind rekursiv definiert durch

$$a_0 = a_1 = 1 \text{ und } a_{n+2} = a_n + a_{n+1}, \; n \in \mathrm{IN}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{1-X-X^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n.$$

c) Zeigen Sie unter Ausnutzung von a) und b)

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] \text{ für alle } n \in IN.$$

II – Beweisidee

„Worum geht's?": Offensichtlich sollen die Gleichungen beweisen werden. Die zwei ersten Gleichungen beinhalten die Summe von Reihen, für die keine explizite Darstellung angegeben werden kann. In der letzten Gleichung soll man die Koeffizienten von der Entwicklung von $\frac{1}{1-X-X^2}$ finden.

„Wie mach'ich das?": a) und b): Es bietet sich die vollständige Induktion an. In beiden Fälle werden wir die Ergebnisse über die Laurent-Folgen benutzen, besonders sie Ergebnisse über die Inverse einer Funktion (siehe Blatt 3, Aufgabe 4).

c) Wir werden die zwei ersten Gleichungen benutzen, weil man bemerken soll, dass $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ die zwei Nullstellen von $1-X-X^2$ sind.

III - Lösung

a) $f(x) = 1 - qX = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ mit $a_0 = 1$ und $a_1 = -q$.

$$\frac{1}{f}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k \quad \text{mit} \quad \begin{cases} b_0 = \frac{1}{1} = 1 \\ b_k = -\sum_{i=1}^{k} a_i b_{k-i} \end{cases} .$$

Wir machen einen Induktionsbeweis nach k :

<u>Induktionsanfang:</u>

$k = 1$ $\qquad b_1 = -a_1 b_0 = -(-q) = q$

<u>Induktionsvoraussetzung:</u>

$b_k = q^k$

<u>Induktionsschritt:</u>

$k \to k+1$

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= -\sum_{i=1}^{k+1} a_i b_{k+1-i} \\ &= -a_1 b_k \\ &= -(-q).q^k \\ &= q^{k+1} \end{aligned}$$

Daraus folgt, $\frac{1}{1-qX} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k X^k$.

b) $f(X) = 1 - X - X^2 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ mit $a_0 = 1,\ a_1 = -1,\ a_2 = -1.$

$$\frac{1}{f}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k \quad \text{mit} \quad \begin{cases} b_0 = 1 \\ b_k = -\sum_{i=1}^{k} a_i b_{k-i} \end{cases} .$$

Wir machen einen Induktionsbeweis nach k:

<u>Induktionsanfang:</u>

$k = 1$

$$b_1 = -a_1.b_0 = -(-1) = 1$$
$$b_2 = -\sum_{i=1}^{2} a_i b_{2-i} = -a_1.b_1 - a_2.b_0 = b_1 + b_0$$

<u>Induktionsvoraussetzung:</u>

$b_{n+2} = b_n + b_{n+1}$

<u>Induktionsschritt:</u>

$k \to k+1$ $\qquad b_{n+3} = -\sum_{i=1}^{n+3} a_i.b_{n+3-i} = -a_1.b_{n+2} - a_2.b_{n+1} = b_{n+2} - b_{n+1}$

Daraus folgt, $\frac{1}{1-X-X^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ mit $\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_{n+2} = a_n - a_{n+1} \end{cases}$.

c) $1-X-X^2$ hat zwei Nullstellen und zwar $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{-2}$ und $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{-2}$.

Also $1-X-X^2 = -\left(X - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

$$\frac{1}{1-X-X^2} = \frac{1}{-\left(X + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(X + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}$$

$$= \frac{a}{\left(X + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} + \frac{b}{\left(X + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}$$

$$= \frac{a\left(X + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + b\left(X + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\left(X + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(X + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}$$

$$= \frac{(a+b)X + a\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + b\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\left(X + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(X + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}$$

Nun $\begin{cases} a+b=0 \\ \frac{a - a\sqrt{5} + b + b\sqrt{5}}{2} = -1 \end{cases}$

Also $\begin{cases} a = -b \\ \frac{2b\sqrt{5}}{2} = -1 \end{cases}$

Es folgt $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$ und $b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Also wir haben jetzt:

$$\frac{1}{1-X-X^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{X + \frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{1}{X + \frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(1 + \frac{2}{1+\sqrt{5}}X\right)} - \frac{1}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(1 + \frac{2}{1-\sqrt{5}}X\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^n X^n\right) - \frac{1}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{1-\sqrt{5}}\right)^n X^n\right)\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \left(-\frac{2}{1+\sqrt{5}} \right)^n - \frac{1}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \left(-\frac{2}{1-\sqrt{5}} \right)^n \right] X^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{2}{1+\sqrt{5}} \right) \left(-\frac{2}{1+\sqrt{5}} \right)^n - \left(\frac{2}{1-\sqrt{5}} \right) \left(-\frac{2}{1-\sqrt{5}} \right)^n \right] X^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left[(-1)^n \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}} \right)^{n+1} - (-1)^n \left(\frac{2}{1-\sqrt{5}} \right)^{n+1} \right] X^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left[(-1)^n \left(\frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} \right)^{n+1} - (-1)^n \left(\frac{2(1+\sqrt{5})}{1-5} \right)^{n+1} \right] X^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left[(-1)^n \left(\frac{1-\sqrt{5}}{-2} \right)^{n+1} - (-1)^n \left(\frac{1+\sqrt{5}}{-2} \right) \right] X^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left[(-1)^{2n+1} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - (-1)^{2n+1} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right] X^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right] X^n.$$

Und wir haben nach b), $\frac{1}{1-X-X_2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$.

Daraus folgt, $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]$

IV - Variationen, Verallgemeinerungen, Abschwächungen

Erweiterung:

Die Fibonacci-Folge divergiert, aber sie hat eine erstaunliche Eigenschaft und zwar:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Angenommen $s_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $s_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

So $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{s_1^{n+2} - s_2^{n+2}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{s_1^{n+1} - s_2^{n+1}}$

Nun $\left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right| < 1$ so $\lim_{n\to\infty} s_2^{n+2} = \lim_{n\to\infty} s_2^{n+1} = 0$.

Daraus folgt, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = s_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$s_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ heißt der Goldene Schnitt.

Eine weitere Gleichung mit den Fibonacci-Zahlen:

Die sogenannte „Simson-Gleichung":

$\forall n \in IN, a_0 = a_1 = 1$ und $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$.

Also die Gleichung ist :

$$\forall n \geq 2, a_{n-2}.a_n - a_{n-1}^2 = (-1)^n.$$

Die ist leicht durch die Induktion nach n zu beweisen.

Induktionsanfang:

$n = 2$

$$\begin{aligned} a_0.a_2 - a_1^2 &= 1 \\ 1.2 - 1^2 &= 1 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung: $\forall n \geq 2, a_{n-2}.a_n - a_{n-1}^2 = (-1)^n.$

Induktionsschritt:

$n \to n+1$

$$\begin{aligned} a_{n-1}.a_{n+1} - a_n^2 &= a_{n-1}(a_n + a_{n-1}) - a_n^2 \\ &= a_{n-1}a_n - a_{n-1}^2 - a_n^2 \\ &= a_n(a_{n-1} - a_n) + a_{n-1}^2 \\ &= a_{n-1}^2 - a_n a_{n-2} \\ &= (-1)^n.(-1) \\ &= (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$