Musterlösung zu Blatt 13, Aufgabe 3

I Aufgabenstellung

a) Bestimmen Sie die Taylorreihe von $\log :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ in einem beliebigen Entwicklungspunkt $a > 0$ und untersuchen Sie, in welchen Punkten die Reihe konvergiert und wo sie die Logarithmusfunktion darstellt
b) Zeigen Sie, dass $\log :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ ein Gruppenhomomorphismus ist (für welche Gruppenstrukturen?)

II Beweisidee

„Worum geht's?“: a) Mit „log“ ist hier, wie in der Vorlesung, der natürliche Logarithmus gemeint. Zunächst einmal gilt es, die Reihenentwicklung im Punkte $a > 0$ zu finden (gemeint ist hier ein allgemeiner Punkt, man darf sich nicht einen beliebigen Punkt, z.B. 1 aussuchen). Es kann bei Taylorreihen durchaus vorkommen, dass sie an gewissen Stellen überhaupt nicht konvergieren oder gegen einen anderen Wert als den Funktionswert an dieser Stelle konvergieren. Daher soll anschließend die Konvergenz untersucht werden.

b) Hier geht es vor allem darum, mit Hilfe bereits bekannter Eigenschaften des Logarithmus die richtigen Gruppenstrukturen zu finden, sodass der Logarithmus tatsächlich ein Gruppenhomomorphismus ist.

„Wie mach' ich das?“: Für beide Teile muss man die Rechengesetze für Logarithmen im Kopf haben.
a) Hier sollte man eine Taylorentwicklung durchführen können. Für eine n-mal differenzierbare Funktion $f(x)$ gilt für die Taylorreihe im Entwicklungspunkt $a \in D_f$ folgendes (dies sagt zunächst nichts über die Konvergenz der Reihe aus):

$$T_a^n(f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

Um die Konvergenz zu überprüfen, ist es in diesem Fall von Vorteil, bereits bekanntes Wissen aus der Vorlesung heranzuziehen, indem man mit einer Reihe vergleicht, deren Konvergenzeigenschaften man schon kennt.

b) Hier schadet es nicht, aus der Linearen Algebra die Gruppenaxiome (Existenz des neutralen und inversen Elements in der Gruppe zu jedem Element, Assoziativität) zu wissen. Ganz dringend braucht man die Definition eines Gruppenhomomorphismus:
Seien $(G, \cdot)$ und $(H, \odot)$ zwei Gruppen. Dann ist $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, wenn $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \odot \varphi(b)$ für alle $a, b \in G$ gilt.

„Wie komm' ich drauf?“: a) Eine ähnliche Restgliedabschätzung wurde in der Vorlesung vorgenommen (für $\log(1+x)$). Allerdings gestaltet sich dieser (vielleicht intuitivere) Weg, eine ähnliche Restgliedabschätzung vorzunehmen schwieriger. Daher sollte der nächste Gedanke darin bestehen, möglichst bereits bekannte Eigenschaften auszunutzen.

b) Zunächst hilft es, sich die Definitionen eines Gruppenhomomorphismus und einer Gruppe sowie die Eigenschaften des Logarithmus in Erinnerung zu rufen. Dann sollte es leicht sein, die richtigen Gruppenstrukturen zu finden (für die reellen Zahlen sind die Verknüpfungen „Multiplikation" und „Addition" natürlich die erstbesten Kandidaten). Vorsicht mit der Restriktion des Zahlenbereichs (siehe Lösung). Man sollte immer überprüfen, ob alles wohldefiniert ist.

III Lösung

a) Sei f die gegebene Logarithmusfunktion. Zunächst die Ableitungen von f an der Stelle a:

$$\begin{aligned} f(a) &= \log a \\ f'(a) &= \frac{1}{a} \\ f''(a) &= -\frac{1}{a^2} \\ f'''(a) &= \frac{2!}{a^3} \\ &\dots \end{aligned}$$

Für $n \geq 1$ gilt also (wenn man will, kann man die Formel sehr leicht mit vollständiger Induktion beweisen):

$$f^{(n)}(a) = \frac{(-1)^{(n+1)} \cdot (n-1)!}{a^n}$$

Nun kann man die Taylorreihe aufschreiben:

$$\begin{aligned} T_a^n(f) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(n)}(a)(x-a)^n = \log a + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \frac{(-1)^{(k+1)} \cdot (k-1)!}{a^k} (x-a)^k \\ &= \log a + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{(k+1)}}{k} \left(\frac{x-a}{a} \right)^k \end{aligned}$$

Nun ist noch gefordert, die Konvergenz zu untersuchen. Dies geschieht am einfachsten, indem man mit der bereits bekannten logarithmischen Reihe vergleicht (andere Methode: siehe Varianten):
$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{(k+1)}}{k} y^k$ konvergiert für $y \in]-1, 1]$ gegen den Wert $\log(1+y)$. Außerhalb dieser Grenzen divergiert die Reihe.
Fasst man also $y = \left(\frac{x-a}{a}\right)$ als Variable auf, so sieht man sofort, dass $T_a^n(f)$ genau dann konvergiert, wenn $\left(\frac{x-a}{a}\right) \in]-1, 1]$ liegt. Dies ist dann, wenn $\frac{x-a}{a} \leq 1$, also $x \leq 2a$ und gleichzeitig $\frac{x-a}{a} > -1$, also $x > 0$ gilt. In Intervallschreibweise: $x \in]0, 2a]$. Für $T_a^n(f)$ ergibt sich in diesem

Fall:

$$
\begin{aligned}
T_a^n(f) &= \log a + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{(k+1)}}{k} \left(\frac{x-a}{a}\right)^k \\
&\to \log a + \log\left(1 + \frac{x-a}{a}\right) = \log\left(a\left(1 + \frac{x-a}{a}\right)\right) = \log x
\end{aligned}
$$

Für $x \in]0, 2a]$ konvergiert die Reihe $T_a^n(f)$ also gegen den Funktionswert $\log x$.

b) Die beiden Gruppen, um die es hier geht, sind $G := (\mathbb{R}^+, \cdot)$ und $H := (\mathbb{R}, +)$ (Dass die Gruppenaxiome erfüllt sind, lässt sich leicht überprüfen). Dann ist $\log : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, da G der Definitionsbereich und H der Wertebereich der Logarithmusfunktion ist (also ist $\log : G \to H$ wohldefiniert) und für zwei beliebige Zahlen a, $b \in G$ gilt: $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$.

IV Variationen, Verallgemeinerungen, Abschwächungen

Versuchen Sie, Teilaufgabe a) auf direktem Weg (ohne die Reihe $\log(1 + x)$) durch Restgliedabschätzung zu lösen. Ist das Lagrangesche Restglied $R_a^n(f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}$ geeignet? Was kann man daraus folgern?

V Nutzen & Anwendungen

Die Logarithmusreihe $ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n} x^n$ für $x \in]-1, 1]$ wurde von N. Mercator 1668 durch Flächenberechnung an der Hyperbel hergeleitet und diente ihm hauptsächlich zur Aufstellung einer Logarithmentafel. Noch vor einigen Jahrzehnten verwendete man Rechenschieber, um Multiplikationen/Divisionen in Additionen/Subtraktionen umzuwandeln (siehe Aufgabenteil b)). Auch moderne Taschenrechner rechnen Multiplikationen noch nach diesem Verfahren. Doch wie kann man z.B. $\log 3$ mit Hilfe einer Reihe näherungsweise berechnen, wo doch die eben genannte Reihe nur für $x \in]-1, 1]$ die Logarithmusfunktion darstellt? Prinzipiell stellt Aufgabenteil a) eine Lösung dieses Problems dar, die jedoch nicht praxistauglich ist. Die Grundlage zur Berechnung von Logarithmen bildet die durch James Gregory (1638-1675) abgeleitete Reihe $\log \frac{1+x}{1-x} = \log(1+x) - \log(1-x) = ... = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Um den Logarithmus einer Zahl $y > 0$ zu berechnen, bringt man diese in die Form $y = \frac{1+x}{1-x}$, wozu man $x = \frac{y-1}{y+1}$ zu nehmen hat. Bsp.: Für $y = 3$ ist $x = \frac{1}{2}$ und $\log 3 = 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + ...)$. Addiert man nur bis zu dem Summanden mit der $(2n + 1)$-ten Potenz von x, so ergibt sich für die Fehlerabschätzung dieses Verfahrens $R_{2n+1}(x) \leq \frac{2}{2n+1} \frac{|x|^{2n+1}}{1-x^2}$. Im Beispiel würden die ersten 10 Summanden einen Wert von 1,09861223... ergeben, wobei der Fehler im Bereich von 10^{-8} liegt ($\log 3 = 1.09861229...$).

Yilin Xu, 17. März 2007