Musterlösung zu Blatt 10, Aufgabe 6

I Aufgabenstellung

Untersuchen Sie, in welchen Punkten die folgenden Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig bzw. unstetig sind:

a) $f(x) := \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 1-x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

b) $f(x) := \begin{cases} x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \text{ mit } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}_1 \text{ und } p,q \text{ teilerfremd.} \end{cases}$

II Beweisidee

„Worum geht's?": Um zwei punktweise definierte Funktionen offensichtlich, die auf Stetigkeit geprüft werden sollen. Beide haben verschiedene Definitionsgleichungen für rationale und irrationale Stellen.
Für einen Stetigkeitsbeweis bieten sich nun mindestens zwei verschiedene Varianten an: den mit Folgen und den mit der δ-ε-Definition. In diesem Fall ist das erste wohl einfacher.

„Wie mach' ich das?": Soll Stetigkeit mit Folgen bewiesen werden, so ist zu zeigen, dass für alle konvergenten Folgen $(x_n) \to x$ (hier: in $\mathbb{R}$) $f(x_n)$ gegen $f(x)$ konvergiert. In den vorliegenden Fällen ist es sinnvoll, dies für Folgen mit ausschließlich rationalen oder irrationalen Gliedern zu überprüfen, so können unstetige Stellen schnell gefunden werden. Für die verbleibenden stetigen Stellen lässt sich damit zudem jede konvergente Folge in eine rationale und eine irrationale Teilfolgen aufspalten und das Stetigkeitskriterium, wie gezeigt wird, erfüllen. (Rationale wie auch irrationale Teilfolgen müssen übrigens nicht zwangsläufig existieren, existieren sie aber nicht, so sind in der ursprünglichen Folge nur endlich viele rationale bzw. irrationale Glieder enthalten, die bei der Konvergenzbetrachtung später keine Rolle spielen würden.)
Im zweiten Aufgabenteil kommt noch ein wichtiger Gedanke hinzu, bei der Konvergenzuntersuchung von $f(x_n)$ für rationale x_n nämlich. Es ist schon aus der Vorlesung bekannt, dass in jedem (beliebig kleinen) Intervall um ein $x \in \mathbb{R}$ unendliche viele rationalen Zahlen liegen. Eine entscheidende Erweiterung dessen ist die Tatsache, dass in immer kleiner werdenden solchen Intervallen um eine irrationale Zahl oder 0 rationale Zahlen mit immer größer werdenden Nennern liegen, je kleiner die Intervalle also gewählt werden, um so größer ist der kleinste Nenner einer rationalen Zahl in diesem Intervall.

„Wie komm' ich drauf?": Von den zwei bekannten Stetigkeitsbeweisen bietet sich der Beweis mit Folgen hier aufgrund der punktweise definierten zu untersuchenden Funktionen besonders an. Diese Eigenheit bei der Definition lässt sich mit der Betrachtung rationaler und irrationaler konvergenter Folgen dann optimal nutzen.

Der Beweis zu Aufgabenteil b) verwendet zudem einige bekannte Aussagen über rationale und irrationale Zahlen. Fraglich ist zunächst, ob die Funktionswerte rationaler konvergenter Teilfolgen gegen 0 konvergieren, was gleichbedeutend ist mit der Aussage, ihre Zähler konvergierten gegen ∞. Wie die Betrachtung ergeben wird: sie tun es.

III Lösung

Vorausgesetzt wird, wie aus der Vorlesung bekannt, dass in jedem (beliebigen) Intervall um eine reelle Zahl rationale und irrationale Zahlen liegen, also konvergente Folgen gegen jede Zahl aus $\mathbb{R}$ existieren, die vollständig rational oder vollständig irrational sind.

a) Wie angekündigt kann jede beliebige in $\mathbb{R}$ konvergente Folge (x_n) in eine rationale und/oder eine irrationale Teilfolgen aufgespalten werden, es seien dies Teilfolgen $(x_{n_r})_r$ und $(x_{n_i})_i$, wobei n_r und n_i die Indizes der rationalen bzw. irrationalen Glieder sind. Die Teilfolgen müssen dann ebenfalls gegen x konvergieren, es werden jetzt die Funktionswerte ihrer Folgenglieder auf Konvergenz untersucht. Es ergibt sich:

$$x_{n_r} \to x \Rightarrow f(x_{n_r}) \to x \quad ,$$

$$x_{n_i} \to x \Rightarrow f(x_{n_i}) \to 1 - x \quad .$$

Die stetigen Stellen von f müssen folglich die Gleichung

$$f(x) = x = 1 - x$$

erfüllen, es folgt als einzige stetige Stelle: $x = \frac{1}{2}$.

b) Analog zu Aufgabenteil a) seien $(x_{n_r})_r$ und $(x_{n_i})_i$ rationale und irrationale Teilfolge beliebiger konvergenter Folgen. Es gilt hier:

$$x_{n_r} \to x \Rightarrow f(x_{n_r}) \to \frac{1}{q} \quad (q \text{ wie definiert}) \ ,$$

$$x_{n_i} \to x \Rightarrow f(x_{n_i}) \to 0 \quad .$$

Gefordert wird nun, dass diese Folgen stets gegen den Funktionswert $f(x)$ konvergieren. Alle rationalen Zahlen außer der 0, deren Funktionswerte $\neq 0$ sind, also nicht der Grenzwert konvergenter irrationaler Folgen, scheiden damit als stetige Punkte bereits aus.
Für alle übrigen, also die irrationalen Zahlen und die 0, ist nun zu zeigen, dass alle rationalen Folgen, die gegen eine solche Zahl konvergieren, in die Funktion eingesetzt gegen ihrer Funktionswert, also 0, konvergieren - womit sie stetig sind; zu zeigen also : $x_{n_r} \to x \Rightarrow f(x_{n_r}) \to 0$.

Dazu werde eine Umgebung einer beliebigen irrationalen Zahl x betrachtet, also ein Intervall $[x - \delta, x + \delta]$. Innerhalb dieses Intervalls liegen nun bekanntermaßen unendlich viele rationale Zahlen, es ist jedoch ebenso klar, dass zu jedem gegeben Nenner q' nur endlich viele rationale Zahlen in diesem Intervall liegen können. Genauer: weil zwei rationale Zahlen mit dem Nenner q' mindestens den Abstand $\frac{1}{q'}$ haben, gibt es in diesem Intervall höchstens $\left(2\delta : \frac{1}{q'} + 1\right)$ solcher Zahlen (1). Dann folgt aber, dass es auch nur endlich viele rationale Zahlen in einem solchen

Intervall geben kann, die einen Nenner $q' \leq q_{max}$ für einen bestimmen maximalen Nenner q_{max} haben (2).
Von diesen endlich vielen rationalen Zahlen muss es nun eine mit dem kleinsten Abstand zu x geben (und dieser Abstand muss größer als 0 sein, da x irrational ist), wenn dieser minimale Abstand als ε bezeichnet werde, so folgt unmittelbar, dass im Intervall $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ keine rationale Zahl mit einem Nenner kleiner/gleich q_{max} liegt (3).
Weil schließlich aber für eine gegen x konvergente rationale Folge $(x_{n_r})_r$ für immer größer werdende r alle weiteren Folgenglieder in immer kleiner werdenden solchen Intervallen liegen, müssen die Folgenglieder immer größer werdende Nenner q haben (4). Die Funktionswerte dieser Folgenglieder $f(x_{n_r}) = \frac{1}{q}$ konvergieren damit gegen 0 (5) - was zu zeigen war.
Die selben Überlegungen lassen sich für den Fall $x = 0$ durchführen.

Der letzte Abschnitt noch einmal in Quantoren-Kurzschreibweise, wobei $\mathbb{P}$ die Menge der gekürzten Brüche $\frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}_1$ sei:

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cup \{0\},\ \delta > 0,\ q \in \mathbb{N}_1 :$$
$$\# \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{P} \,\middle|\, \frac{p}{q} \in [x-\delta, x+\delta] \right\} \leq \left(2\delta : \frac{1}{q} + 1 \right) < \infty \tag{1}$$
$$\Rightarrow \forall q_{max} > 0 : \# \left\{ \frac{p}{q'} \in \mathbb{P} \,\middle|\, q' < q_{max}, \frac{p}{q'} \in [x-\delta, x+\delta] \right\} < \infty \tag{2}$$
$$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \forall \frac{p}{q} \in \mathbb{P} \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[: q > q_{max} \left[\Rightarrow \frac{1}{q} < \frac{1}{q_{max}} \right] \tag{3}$$
$$x_{n_r} \to x \Rightarrow \exists r_0 \in \mathbb{N}\, \forall r > r_0 :$$
$$x_{n_r} =: \frac{p}{q} \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}_1 \Rightarrow f(x_{n_r}) = \frac{1}{q} < \frac{1}{q_{max}} \tag{4}$$
$$q_{max} \to \infty \Rightarrow f(x_{n_r}) \to 0 \tag{5}$$

Die Raute # vor einer Menge steht dabei für die Anzahl ihrer Elemente.
Es konnte also gezeigt werden, dass sowohl für rationale, als auch für irrationale kovergente Folgen die Funktionswerte der Folgenglieder gegen 0 konvergieren. Somit ist die Funktion genau an den Stellen mit dem Wert 0 stetig, es sind dies nach Definition alle irrationalen Zahlen sowie die rationale Zahl 0.

Variante: Vollständige Induktion nach Nenner q anstelle von (1)-(3)
Zu zeigen: Es gibt um jede irrationale Zahl x und für jeden Nenner q ein Intervall, in dem keine rationalen Zahlen mit einem Nenner kleiner als (q+1) (d.h. kleiner/gleich q) liegen.
Induktionsanfang $q = 1$: Zwischen zwei ganzen Zahlen liegt keine weitere ganze Zahl, es gibt also ein Intervall um jede irrationale Zahl, in dem keine ganzen Zahlen (keine rationalen Zahlen mit einem Nenner kleiner als 2) liegen.
Induktionsanfang $q \to q+1$: Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein Intervall um jede irrationale Zahl, in dem keine rationalen Zahlen mit einem Nenner kleiner als $(q+1)$ liegen. In diesem Intervall können also rationale Zahlen mit dem Nenner $(q+1)$ liegen, jedoch nur endlich viele. Es muss damit aber auch ein kleineres Teilintervall um x geben, in dem auch diese Zahlen nicht liegen, in dem also wiederum keine rationale Zahlen mit einem Nenner kleiner

als $(q+2) = ((q+1)+1)$ liegen.

IV Variationen, Verallgemeinerungen, Abschwächungen

Es können ähnliche punktweise definierte Funktionen auf Stetigkeit untersucht oder umgekehrt stetige, punktweise definierte Funktion konstruiert werden. Unter welchen Bedingungen sind solche punktweise definierten Funktion an welchen Stellen stetig?
Zudem können derartige Funktionen auf Differenzierbarkeit (und den Zusammenhang mit Stetigkeit) und Integrierbarkeit untersucht werden (was etwa zu der Dirichlet-Funktion und dem Lebesgue-Integral führt).

V Nutzen & Anwendungen

Beispielhaft wurde eine Untersuchung und die zugehörigen Beweise zur Stetigekeit einer Funktion durchgeführt, dieses Verfahren lässt sich nun auf weitere Funktionen übertragen.
Wichtige beweistechnische Methoden waren die Aufspaltung beliebiger Folgen in (rationale und irrationale) Teilfolgen, die Anwendung der Stetigkeitsdefinition und in der Variante die vollständige Induktion, zudem die Konvergenzdefinition und, wohl als wichtigster, wenn auch zunächst unzugänglichster Part, die Betrachtungen über rationale und irrationale Zahlen. Hier wurden Sätze über die (vollständige) Angeordnetheit und Dichte der Zahlenmengen zunächst angewendet und dann erweitert.

Johannes Flake · 13. März 2007